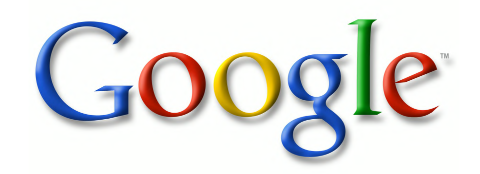
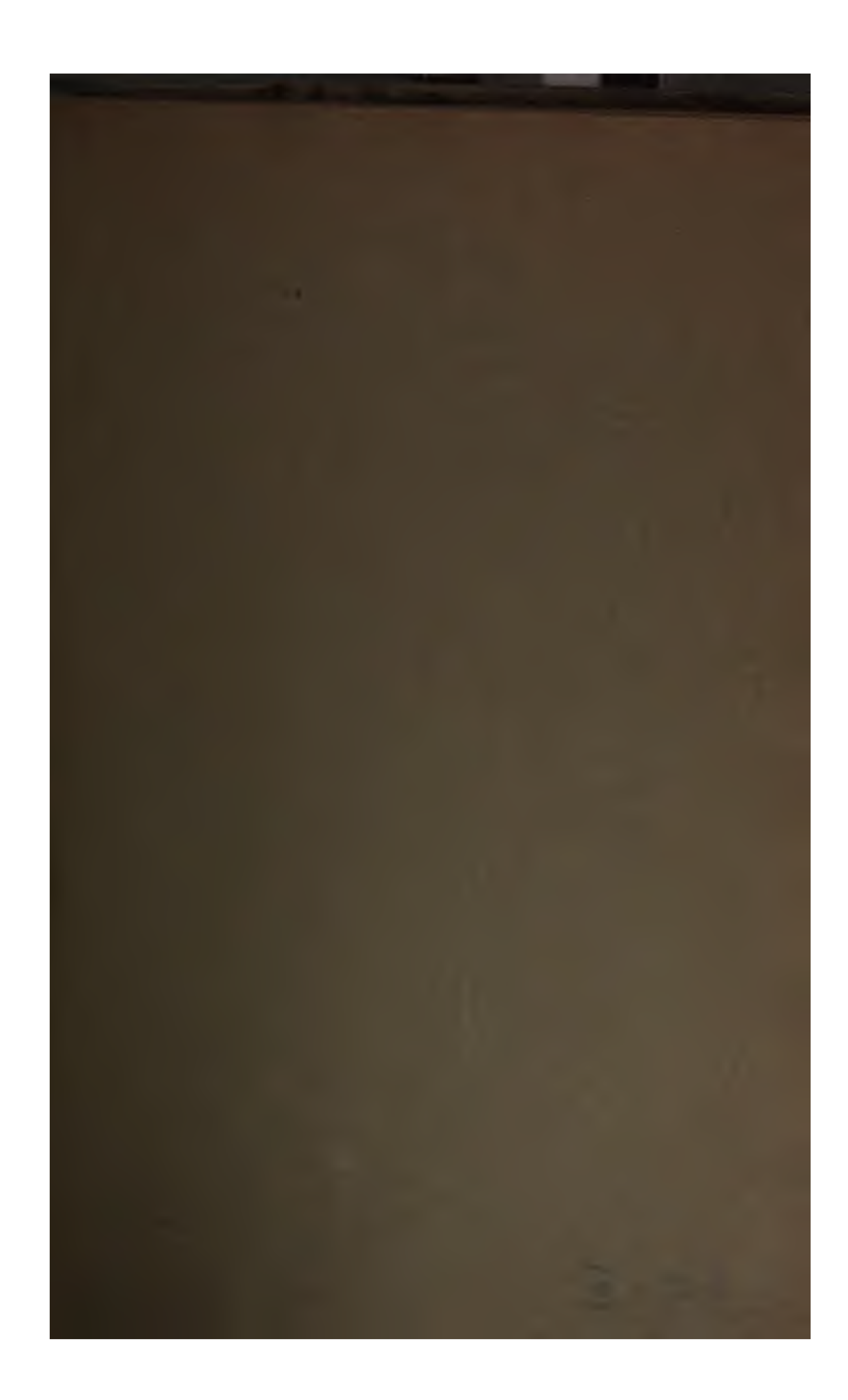



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06639468 9











LEHRBUCH

DER

EXPERIMENTALPHYSIK

VON

DR. ADOLPH WÜLLNER,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU AACHEN.

ERSTER BAND.

ALLGEMEINE PHYSIK UND AKUSTIK.

VIERTE VIELFACH UMGEARBEITETE UND VERBESSERTE AUFLAGE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

Zweites Kapitel.

Von der drehenden Bewegung.

Drittes Kapitel.

Von der allgemeinen Gravitation.

Zweiter Abschnitt.

Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Teilen.

Erstes Kapitel.

Von den festen Körpern.

Zweites Kapitel.

Von den tropfbar flüssigen Körpern.

Drittes Kapitel.

Von den gasförmigen Körpern.

Dritter Abschnitt.

Von der Wellenbewegung.

Erstes Kapitel.

Theoretische Principien der Wellenbewegung.

Zweites Kapitel.

Von der Wellenbewegung fester Körper.

Drittes Kapitel.

Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

Vierter Abschnitt.

Vom Schalle.

Erstes Kapitel.

Über die Erregung des Schalles.

Zweites Kapitel.

Von der Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

Einleitung.

Aufgabe der Physik.

Die uns umgebende Körperwelt, welche wir in dem Begriffe der Natur zusammenfassen, kann nach einer doppelten Richtung der Gegenstand unseres Studiums werden. Wir können einerseits die Körper, welche wir vorfinden, im einzelnen kennen zu lernen, zu beschreiben und zu klassificieren suchen. Diese Aufgabe haben sich die beschreibenden Naturwissenschaften gestellt. An diesen Naturkörpern nehmen wir dann aber eine ganze Reihe von Veränderungen wahr, die an denselben teils ohne, teils mit unserer Einwirkung erfolgen, welche wir mit dem Namen Naturerscheinungen bezeichnen. Das Studium dieser Naturerscheinungen, der Bedingungen, unter denen sie stattfinden, der Gesetze, nach denen sie verlaufen, und der Folgen, welche sie für die Naturkörper haben, an denen sie stattfinden, ist die Aufgabe des zweiten Zweiges der Naturwissenschaften, der Physik und der Chemie.

Die als Naturerscheinungen bezeichneten Veränderungen der Körper können sich entweder auf deren Form, diesen Begriff in seiner allgemeinsten Bedeutung genommen, oder auf deren Inhalt beziehen. Was der letztere eigentlich ist, wissen wir nicht, da wir den Inhalt der Körper nicht direkt wahrzunehmen imstande sind. Wir nehmen die Körper nur wahr durch den Eindruck, den sie auf unsere Sinne machen, indem wir sie sehen oder auch bei der Berührung fühlen, das heifst, indem wir durch unsern Gesichtssinn oder Gefühlssinn erkennen, dafs ein gewisser Teil des uns umgebenden Raumes andere Eigenschaften hat, als der übrige Raum. Dasjenige nun, was sich im Innern dieses von der Umgebung sich unterscheidenden Raumes befindet und bewirkt, dafs er sich von der Umgebung unterscheidet, bezeichnet man ganz allgemein als Materie. Die Materie ist also die Trägerin der Eigenschaften, welche die Körper besitzen, sie ist die Ursache der Eindrücke, welche dieselben auf unsere Sinne machen.

Die Naturerscheinungen können wir also genauer als Vorgänge definieren, welche an und in der Materie stattfinden, welche die Eigenschaften der Materie ändern. Das Studium dieser Vorgänge, welches wir als die Aufgabe der Physik und Chemie bezeichnet haben, setzt demnach voraus, dafs wir zunächst die Eigenschaften der Materie selbst kennen lernen, denn nur wenn uns diese bekannt sind, können wir die Änderungen derselben erkennen.

Physik und Chemie haben also das Gemeinsame, dafs sie die Eigenschaften der Materie und die Vorgänge untersuchen, welche dieselbe verändern; die beiden Schwesterwissenschaften unterscheiden sich durch die Eigenschaften der Materie, welche jede derselben vorwiegend ins Auge fafst.

Gewisse Eigenschaften sind allen Körpern gemeinsam, sie kommen denselben nur in gröſserem oder geringerem Maſse zu, wie z. B. die oben schon erwähnte Sichtbarkeit oder Fühlbarkeit. Andere Eigenschaften kommen dagegen gewissen Körpern zu, anderen nicht, es sind diejenigen, welche einen Körper charakterisieren, d. h. ihn von andern unterscheiden. Da wir die Materie nur an ihren Eigenschaften erkennen, müssen wir aus dem letztern Umstande schlieſsen, daſs es verschiedene Materien gibt. Unter den Naturerscheinungen können wir nun zunächst solche unterscheiden, welche diese einer bestimmten Materie eigentümlichen Eigenschaften dauernd ändern, die Materie also in eine andere verwandeln, indem sie ihr andere Eigenschaften erteilen. Es sind das vorzugsweise solche Erscheinungen, bei denen sich zwei oder mehrere Materien zu einer neuen vereinigen, oder aus einer Materie andere abgeschieden werden. Das Studium dieser Erscheinungen und ihrer Folgen für die einzelnen Materien ist die Aufgabe der Chemie; dieselbe hat demnach zunächst auch jene Eigenschaften aufzusuchen, durch welche sich die einzelnen Materien von einander unterscheiden.

Es hat sich dabei herausgestellt, daſs es eine gewisse Anzahl von Materien gibt, deren Eigenschaften sich durch Abscheiden von Materie nicht ändern lassen; man nennt diese deshalb einfache Materien oder Elemente. Man hat weiter erkannt, daſs aus diesen einfachen Materien sich sämtliche in der Natur vorhandenen Materien herstellen, indem zwei oder mehrere Materien zu einer neuen zusammentreten, daſs somit die eine bestimmte Materie als solche charakterisierenden Eigenschaften durch die innere Zusammensetzung derselben bedingt werden. Wir können demnach als die Aufgabe der Chemie auch bezeichnen das Studium jener Eigenschaften der Materie, welche von deren innerer Zusammensetzung abhängen und jener Erscheinungen, welche die innere Zusammensetzung derselben ändern.

Die Physik lässt alle diese Erscheinungen auſser Acht; sie hat daher auch nicht die Eigenschaften kennen zu lehren, welche die einzelnen Materien von einander unterscheiden, sondern jene, welche allen den verschiedenen Materien gemeinsam sind, ihnen in gröſserem oder geringerem Maſse zukommen, je nach dem Zustande, in welchem wir die Materien vorfinden, dem festen, flüssigen oder luftförmigen und unabhängig davon, welche von der Chemie erkannten Materien den Körper gerade bilden. Die Erscheinungen, welche die Physik dann zu untersuchen hat, sind solche, welche die innere Zusammensetzung der Körper ungeändert lassen, welche also an den Körpern im allgemeinen nicht dauernde, sondern vorübergehende Veränderungen bewirken. Die Erscheinungen dieser Art können wir, wie sich später zeigen wird, in fünf groſse Gruppen ordnen, die Bewegungserscheinungen, die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme, des Magnetismus und der Elektricität; wir kennen in der Natur keine Erscheinung, welche sich nicht in eine dieser Gruppen einordnen lieſse. Die Betrachtung dieser fünf Erscheinungsgruppen ist daher die Aufgabe der Physik.

Methode der Physik.

Aus der im Vorigen dargelegten Aufgabe der Naturwissenschaften, Untersuchung der Naturerscheinungen nach ihrem Verlaufe, ihren Folgen, ihren Ursachen, ergibt sich, daſs die Grundlage und der Ausgangspunkt

dieser Wissenschaft die Erfahrung sein mufs von dem, was in der Natur vorgeht. Zu dieser Erfahrung gelangen wir aber lediglich durch die Beobachtung und zwar durch eine systematische, vorsichtige, genaue und ins einzelne gehende Beobachtung der Naturerscheinungen selbst.

Dieser Grundsatz der naturwissenschaftlichen Methode erscheint uns jetzt so selbstverständlich, so unmittelbar aus der Aufgabe dieser Wissenschaft, etwas aufser uns Existierendes zu erforschen, sich zu ergeben, dafs seine Richtigkeit keines besondern Beweises mehr bedarf. Es war indes nicht immer so; Jahrhunderte lang glaubte man auf rein spekulativem Wege die Naturgesetze, den Mechanismus der ganzen Natur auffinden zu können. Die Folge dieses Irrtums war der absolute Stillstand in der Erkenntnis der Natur; selbst die einfachsten Erscheinungen, deren Gesetze jetzt jeder kennt, wurden mifsverstanden, weil man es verschmähte die Natur selbst zu befragen. Bis an das Ende des Mittelalters, bis zu den Zeiten Galileis, glaubte man, dafs Körper von verschiedenem Gewichte mit verschiedener Geschwindigkeit zu Boden fallen, dafs der schwerere in demselben Verhältnis schneller falle als der leichtere, in welchem er schwerer ist als dieser. Man glaubte es auf Grund eines von Aristoteles in seiner Schrift über den Himmel aufgestellten Satzes, dafs derjenige Körper der schwerere sei, welcher bei gleichem Rauminhalt rascher abwärts gehe. Dieser letztere Satz ist nicht unrichtig; denn in der That wird die Fallgeschwindigkeit etwas durch den Luftwiderstand modificiert, und die Geschwindigkeit des leichtern Körpers wird bei gleichem Rauminhalt etwas stärker vermindert als die des schwerern. Völlig unrichtig war aber die obige aus diesem Satze gefolgerte Ansicht über den Fall der Körper, und die einfachste Beobachtung zweier verschiedener fallender Körper hätte ihre Unrichtigkeit bewiesen; man hätte gesehen, dafs sich bei Körpern selbst des verschiedensten Gewichtes nur äufserst geringe Unterschiede in der Fallgeschwindigkeit zeigen, man hätte gefunden, dafs im luftleeren Raume auch diese Unterschiede schwinden.

Damit die Beobachtung die Grundlage der Naturwissenschaften sein kann, mufs sie, wie schon erwähnt, eine genaue und vollständige, die Erscheinungen in ihre Einzelnheiten verfolgende sein. Genau, das heifst, wir müssen die Erscheinung so wahrzunehmen suchen, wie sie in der That verläuft, und uns vor jeder Täuschung hüten. Die erste dazu erforderliche Bedingung ist, dafs wir an die Erscheinung ohne irgend eine vorgefafste Meinung herantreten, da sonst die Phantasie des Beobachters leicht eine verderbliche Rolle spielt; schon mancher Beobachter hat das zu sehen geglaubt, was er auf Grund einer Auffassung, welche er aus vorherigen Spekulationen sich gebildet hatte, zu sehen gewünscht hat. Jede Anstellung einer Beobachtung ist eine Frage, welche wir an die Natur richten, das Resultat der Beobachtung ist die Antwort; welche Antwort wir erhalten, mufs uns gleichgültig sein, möge sie unsern Ideen entsprechen oder nicht, nur dann können wir mit der nötigen Unbefangenheit beobachten.

Die Vollständigkeit der Beobachtung verlangt, dafs sie uns Aufschlufs gebe über den ganzen Verlauf der Erscheinung und über alle Umstände, welche denselben bedingen; jede Beobachtung einer Erscheinung setzt sich daher zusammen aus einer Summe von Einzelbeobachtungen, deren jede uns einen Moment des im zeitlichen Verlauf nach einander oder eine Seite

[illegible] Vorgehenden [illegible]. Diese Einzelbeobachtungen müssen wir dann systematisch so durchführen, dafs wir aus ihnen den ganzen Verlauf der Erscheinungen erhalten. Bei einer einmaligen Beobachtung des gestirnten Himmels scheinen uns alle Gestirne in einer und derselben gegenseitigen Lage zu bleiben; eine zu verschiedenen Zeiten wiederholte Beobachtung zeigt uns, dafs die Planeten ihre Lage gegenüber andern Sternen im Laufe der Zeit in einer scheinbar sehr unregelmäfsigen Weise ändern, dafs sie bald nach der einen bald nach der andern Seite sich verschieben. Wenn wir dann bei regelmäfsig und systematisch wiederholten Beobachtungen die Lage der einzelnen Planeten scharf bestimmen, so gelangen wir zu der Erkenntnis, dafs sie und mit ihnen unsere Erde sich in nahezu kreisförmigen Bahnen um die Sonne bewegen.

Die Beobachtung der Naturerscheinungen allein genügt indes nur in seltenen Fällen zu einer so genauen Kenntnis, dafs wir den Verlauf derselben vollständig übersehen können, denn der Verlauf derselben ist meist nicht so einfach, dafs wir durch Beobachtung allein alle Einzelnheiten erkennen können. Fällt ein Stein aus einiger Höhe zu Boden, so erkennen wir bei genauer Beobachtung wohl, dafs der Stein immer rascher fällt, wir sind aber nicht imstande die durchfallenen Strecken mit den Zeiten zu vergleichen, in denen sie durchfallen sind und so zu bestimmen, wie die Geschwindigkeit des fallenden Steines wächst.

Neben der Beobachtung müssen wir deshalb den Versuch zu Hülfe nehmen, das Experiment, durch welches wir die Naturerscheinungen unter solchen Umständen hervorrufen, dafs wir sie in ihren Einzelnheiten verfolgen, dafs wir sie also beobachten können. Um die Gesetze des Falles erkennen zu können, müssen wir demnach Körper unter solchen Verhältnissen fallen lassen, dafs die Bewegung eine langsamere wird, und dafs wir imstande sind die durchfallenen Räume mit der Zeitdauer des Falls zu vergleichen. Die Kunst des Experimentierens liefert uns die Methode und Apparate, welche erforderlich sind, um den Naturerscheinungen diesen Verlauf zu geben und um die Gröfsen, um welche es sich bei denselben handelt, mit aller Schärfe messen zu können.

Der Versuch lehrt uns aber nicht nur den genauern Verlauf der Erscheinungen kennen, die wir in der Natur auch ohne unser Zuthun beobachten, er führt uns selbst zur Kenntnis ganz neuer Naturerscheinungen, die ohne unsere Mitwirkung gar nicht eintreten würden, er lehrt uns die Körper in solchen Verhältnissen zusammen zu bringen, dafs die in ihnen schlummernden Kräfte geweckt werden. Der weitaus gröfste Teil unserer Kenntnis der Naturerscheinungen ist nur durch Versuche erhalten worden, welche in systematischer Weise diese Erscheinungen, meist von unscheinbaren sehr oft nur zufällig beobachteten Wirkungen der Naturkräfte ausgehend, hervorriefen. Man hat zufällig schon im Altertum die Beobachtung gemacht, dafs geriebener Bernstein die Eigenschaft erhält, leichte ihm nahe gebrachte Körper, wie Strohhalme, anzuziehen; indem man auch andere Körper diesem Versuche unterwarf, fand man, dafs diese als Elektricität bezeichnete Kraft viel mächtigere Wirkungen hervorbringen könne, man erkannte, dafs eine der gewaltigsten Naturerscheinungen, der Blitz, eine starke elektrische Entladung sei. Zufällig fand man, dafs zwei Metalle, wenn sie in passender Weise mit einander zur Berührung gebracht, und

dann getrennt werden, dieselbe Fähigkeit besitzen wie der geriebene Bernstein; die systematische Verfolgung dieses Versuches lieferte uns das grofse Gebiet der galvanischen Ströme, welche nicht nur unsere Kenntnis der Naturkräfte gewaltig erweitert, sondern auch durch ihre Verwendung zur Telegraphie das ganze Kulturleben umgewandelt haben.

Die Beobachtungen und Versuche lehren uns das Thatsächliche der Naturerscheinungen kennen, sie liefern uns so das Material, aus welchem dann der kombinierende Scharfsinn des menschlichen Verstandes die Gesetze ableitet, welche das Bedingende und das Bedingte in den Naturerscheinungen mit einander verknüpfen, welche uns also angeben, in welcher Weise der Verlauf einer Erscheinung von den Umständen abhängt, unter denen sie stattfindet. Ein Beispiel wird uns am besten zeigen, wie wir zu einem solchen Gesetze gelangen.

Wenn ein Lichtstrahl in seiner Bahn auf eine glatte Fläche trifft, so wird er von derselben immer zurückgeworfen, und man erkennt leicht, dafs die Richtung, nach welcher der Strahl zurückgeworfen wird, verschieden ist, je nach der Richtung, in welcher der Strahl auf die Fläche auftrifft. Die Richtung des einfallenden Strahles ist hier somit das Bedingende, die Richtung des zurückgeworfenen das Bedingte. Das Gesetz der Zurückwerfung des Lichtes mufs uns also allgemein sagen, in welcher Weise die Richtung des zurückgeworfenen Strahles von der Richtung des einfallenden abhängig ist. Man findet dasselbe, indem man in einer Reihe von Versuchen die Richtung des einfallenden Strahles willkürlich ändert, jedesmal diejenige des zurückgeworfenen messend bestimmt, und dann die zu einander gehörigen Richtungen mit einander vergleicht. Rechnet man die Richtung der beiden Strahlen von der in dem Punkte, in welchem der einfallende Strahl die Fläche trifft, zu derselben senkrecht genommenen Richtung, dem sogenannten Einfallslot, so findet man erstens, dafs der reflektierte Strahl stets in der Ebene liegt, welche durch das Einfallslot und den einfallenden Strahl bestimmt ist, und dafs in dieser die Winkel, welche der einfallende und der zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslote bilden, einander immer gleich sind. Wir schliefsen aus dieser stets im Versuche sich ergebenden Beziehung zwischen den Winkeln des einfallenden Strahles, dem Einfallswinkel, und dem des zurückgeworfenen Strahles, dem Zurückwerfungswinkel, als das die beiden verknüpfende Gesetz: „Der Zurückwerfungswinkel ist dem Einfallswinkel gleich“.

Man sieht, dieses Gesetz, und so ist es mit allen physikalischen Gesetzen, ist eine mathematische Beziehung zwischen den bedingenden und bedingten physikalischen Gröfsen einer Naturerscheinung; man kann deshalb jedes physikalische Gesetz durch eine Gleichung ausdrücken.

Die physikalischen Gesetze sind hiernach zunächst der gemeinsame Ausdruck einer Reihe einzelner Thatsachen, deren Gemeinsames sie in einem allgemeinen Satze zusammenfassen. Ihre Bedeutung ist aber eine noch sehr viel weiter gehende; sie drücken nicht nur die Thatsachen aus, aus denen sie abgeleitet wurden, sondern sie enthalten auch alle Erscheinungen, welche aus jenen Thatsachen folgen. Man habe z. B. einen Spiegel von beliebiger, aber irgendwie geometrisch bestimmbarer Gestalt, und es fallen auf ihn Lichtstrahlen etwa von einer in bestimmter Entfernung aufgestellten Lichtflamme. Das eben ausgesprochene Gesetz gestattet uns dann, die Erscheinungen

der Reflexion in jedem Falle zu bestimmen, ohne dafs wir den Versu
zu Hülfe nehmen, denn wir können auf Grund jenes Gesetzes für jed
einfallenden Strahl die Richtung des zurückgeworfenen mit Hülfe einfach
geometrischer Konstruktion oder auch nach den Rechnungsmethoden d
analytischen Geometrie angeben. Wie hier, so können wir in allen Fäll
aus jedem Gesetze mit Hülfe der Mathematik eine Reihe von Folgesätz
ableiten; man hat die Gesetze nur mathematisch zu formulieren, und dan
indem man dieselben als Ausgangspunkt nimmt, durch mathematische En
wicklungen aus denselben die Folgerungen zu ziehen.

Aus dieser Bemerkung erhellt die äufserst wichtige Rolle, welche d
Mathematik in der Physik spielt; sie ist für dieselbe von der gleichen B
deutung wie Beobachtung und Versuche, denn sie dient dazu, diese zu b
rechnen und zusammenzufassen, die erhaltenen Gesetze scharf auszudrücke
und die in ihnen enthaltenen Folgerungen abzuleiten.

Wenn hiernach aus einem physikalischen Gesetze sich eine Reihe vo
weitern Erscheinungen auf mathematischem Wege ableiten läfst, so beda
es selbstverständlich, um diese und ihre Gesetze kennen zu lernen, nic
mehr der Beobachtung und der Versuche; wir erhalten vielmehr diese G
setze lediglich durch mathematische Deduktion. Die Versuche dienen da
zur Bestätigung unserer Folgerungen, sie bilden die Kontrole, dass wir u
in unsern Deduktionen nicht geirrt haben. Dieser Weg der Deduktion i
neben dem der Erfahrung der wichtigste, auf dem die Physik fortschreit
er lehrt uns ebenso gut neue Erscheinungen kennen, wie der Versuch;
wir werden Erscheinungen kennen lernen, die man voraussichtlich niema
aufgefunden hätte, wenn uns der Weg der Deduktion nicht vorher die U
stände kennen gelehrt hätte, unter welchen dieselben beobachtet werd
können.

Hat uns die Erfahrung die fundamentalen Gesetze einer Erscheinung
gruppe kennen gelehrt, so können wir aus diesen alle zu dieser Grup
gehörigen Erscheinungen ableiten. Da wir bei dieser Ableitung den inne
Zusammenhang aller zu einer Gruppe gehörigen Erscheinungen unmittelb
erkennen, so können wir es als ein Ziel der Physik bezeichnen, die fundame
talen Gesetze aufzusuchen und aus diesen das ganze Gebiet der zusamme
gehörigen Erscheinungen zu deducieren. Wir werden sehen, dafs auf einig
Gebieten dieses Ziel schon erreicht ist, so vor allem in demjenigen d
Bewegungserscheinungen.

Fassen wir die Resultate der bisherigen Betrachtungen zusammen,
können wir in der Entwicklung der physikalischen Wissenschaften d
Epochen unterscheiden; die erste ist die der Empirie, durch Beobachtu
und Versuche werden Thatsachen gesammelt und aus diesen durch die ko
binierende Thätigkeit des Verstandes die Gesetze der einzelnen Erscheinung
aufgestellt; an diese schliefst sich, sobald hinreichendes Material vorhand
ist, die philosophische Thätigkeit der Abstraktion, des Aufsuchens der Hau
gesetze für eine Reihe aus gleicher Ursache hervortretender Erscheinunge
und auf diese folgt dann eine Zeit, in welcher man durch Deduktion a
jenen Gesetzen neue Folgerungen und Thatsachen ableitet, eine Zeit,
welcher Beobachtung und Versuch nur dazu dienen, die theoretisch a
geleiteten Folgerungen zu kontrolieren und nachträglich zu bestätigen.]

allgemeinen ist das auch der geschichtliche Gang in der Entwicklung der Physik, man findet fast stets diese drei Epochen auch zeitlich verschieden.

Die der Naturwissenschaft gestellte Aufgabe ist indes hiermit noch nicht vollständig gelöst, denn eine vollständige Kenntnis der Natur muſs uns auch angeben, warum die Naturerscheinungen gerade den beobachteten Verlauf haben und nicht einen andern. Da nun aber der Verlauf einer Erscheinung wesentlich von der Ursache bedingt wird, welche diese Erscheinung bewirkt, so fällt die Frage nach dem Grunde, aus welchem die Erscheinungen gerade den ihnen eigentümlichen Verlauf haben, zusammen mit der Frage nach der Ursache der Erscheinungen. Die Ursache einer Veränderung in der Natur bezeichnet man allgemein als eine Kraft, wir können daher das Aufsuchen der Ursachen auch bezeichnen als das der Naturkräfte.

Gerade diese letzte Aufgabe der Naturwissenschaften ist aber die schwierigste; denn die Naturkräfte selbst können wir niemals direkt beobachten, wir nehmen sie nur wahr in ihren Wirkungen. Um also irgend etwas über die Naturkräfte auszusagen, müssen wir aus den Wirkungen auf die Ursachen zurückschlieſsen. Diese Art des Schlusses ist aber immer mit einer so groſsen Unsicherheit behaftet, daſs wir über die wirksamen Naturkräfte niemals eine ähnliche Gewiſsheit erhalten können wie über die Gesetze, denen die Naturerscheinungen folgen. Denn eine und dieselbe Erscheinung kann aus sehr verschiedenen Ursachen hervorgehen, und von diesen möglichen Ursachen müssen wir bei jener Art des Schlieſsens eine auswählen; nichts bürgt uns aber dafür, daſs wir bei dieser Wahl aus den möglichen Ursachen die richtige treffen. Wenn wir wissen, daſs das Wasser unter dem Drucke der Atmosphäre steht, so ist eine notwendige Folgerung, daſs es in einer Pumpe aufsteigen muſs, in welcher wir über dem Wasser einen luftleeren Raum hergestellt haben; weiſs man aber nicht, daſs das Wasser dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzt ist, und sieht man dasselbe in einer luftleer gemachten Pumpe aufsteigen, so kann man eine Reihe von Ursachen ersinnen, welche das Aufsteigen bewirken. Will man zwischen diesen wählen, so hat man alle Chancen dafür, daſs man eine unrichtige wählt, gegen eine einzige, daſs man die richtige wählt. Die Geschichte lehrt uns, wie sich die ältern Physiker in der That täuschten, als sie annahmen, die Natur habe einen Abscheu vor dem leeren Raume. Die Mechanik des Himmels beweist uns, daſs zwischen den Gestirnen eine Kraft thätig ist, welche in dem Maſse gröſser ist, als die Masse der Gestirne gröſser ist, und welche in dem Maſse abnimmt, als das Quadrat der Entfernung der Gestirne zunimmt. Man nimmt an, daſs diese Kraft in einer Anziehung der Materien ihren Grund habe. Auch diese Annahme wählt aus einer ganzen Reihe von möglichen Gründen einen aus, und wir haben strenge genommen ebenso wenig ein Recht diesen Grund für den wahren zu halten, wie aus dem Aufsteigen des Wassers in der Pumpe den horror vacui zu folgern.

Über die Naturkräfte selbst können wir demnach nur Annahmen, sogenannte Hypothesen bilden, welche für uns einen geringern oder gröſsern Grad von Wahrscheinlichkeit haben, je nach der Vorsicht, mit welcher man bei dem Aufstellen der Hypothesen verfuhr, und je nach der Menge von Naturerscheinungen, welche wir bei ihrer Wahl berücksichtigten, und welche sich dann als notwendige Folgen aus dieser Hypothese ergeben. So lange man nur wenige Erscheinungen aus einem Gebiete in Betracht zieht, findet

man stets, daſs mehrere Hypothesen dieselben gleich gut erklären, das heiſst als notwendige Folgen aus der supponierten Ursache hervorgehen lassen; je weiter aber unsere Kenntnis der Erscheinungen in einem Gebiete sich ausdehnt, um so geringer wird die Anzahl der möglichen Hypothesen, bis schlieſslich nur eine Hypothese übrig bleibt, aus welcher man sämtliche experimentell gefundenen Thatsachen mathematisch entwickeln kann, und welche selbst zur Auffindung neuer Thatsachen führt. Diese Hypothese hat dann für uns den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit.

Eine solche Hypothese ist die jetzt der Behandlung der Optik zu Grunde gelegte Undulationstheorie. Seitdem man angenommen hat, das Licht sei eine zitternde Bewegung des Aethers, wurden alle experimentell aufgefundenen Gesetze der Lichterscheinungen Folgerungen dieses einen Grundsatzes, und mit ihr hat die Optik fast jene Stufe der Vollkommenheit erreicht, auf welcher die Beobachtung nur mehr ein Mittel ist, die Folgerungen der Theorie zu bestätigen, anstatt das einzige Mittel zu sein, um die Gesetze der Erscheinungen aufzufinden. Das ist eben das Charakteristische einer guten Hypothese.

Zunächst erhält man eine solche Hypothese für die verschiedenen Gruppen der unter sich gleichartigen Erscheinungen, wie diejenige des Lichts oder der Wärme, und man muſs dieselbe für gut erklären, wenn sie das Gesamtgebiet der Erscheinungen, für welche sie ersonnen wurde, als notwendige Folgen erkennen läſst. Mit dem Fortschritte der Naturerkenntnis hat sich nun aber ergeben, daſs die einzelnen Gruppen von unter sich gleichartigen Erscheinungen, welche scheinbar sich ganz fremd sind, wie die Bewegungserscheinungen, Licht- oder Wärmeerscheinungen, unter einander in dem innigsten Zusammenhange stehen. Bei der Abwägung der Hypothesen über die einer bestimmten Erscheinungsgruppe zu Grunde liegenden Naturkräfte darf man deshalb nicht nur diese Erscheinungsgruppe allein ins Auge fassen, sondern muss auch die übrigen mit in Erwägung ziehen, und sich die Frage stellen, ob es zur Erklärung der bestimmten Gruppe der Annahme einer besondern Naturkraft bedarf. Gerade durch diese Erwägung hat die neuere Physik die Zahl der von den ältern Forschern angenommenen Naturkräfte wesentlich beschränkt; wir werden sehen, wie sie immer mehr dahin strebt, die verschiedenartigsten Erscheinungen auf ein und dieselbe Grundursache, auf Bewegung, zurückzuführen und an die Stelle der früher angenommenen so mannigfachen Kräfte nur eine zu setzen, die Kraft, welche der Materie Bewegung erteilen kann, welche in einer Anziehung und Abstoſsung der einzelnen Teile der Materie besteht.

Aber selbst, wenn es gelungen ist alle Erscheinungen auf diese eine, der Materie eigentümliche und deshalb unveränderliche Kraft zurückzuführen, darf man immer nicht vergessen, daſs es eine Hypothese ist, auf welche wir die Erklärung der Naturerscheinungen stützen, die allerdings den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit hat, der wir aber eine Gewiſsheit erst dann beilegen dürfen, wenn wir beweisen können, daſs die so angenommene Ursache der Naturerscheinungen die einzig mögliche ist. Dann erst wäre dieselbe, nach dem Ausspruche von Helmholtz[1], als die notwendige Begriffsform der Naturauffassung erwiesen, es würde derselben

---

[1] *Helmholtz*. Über die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. p. 7.

alsdann objektive Wahrheit zuzuschreiben sein. Dahin zu gelangen, das können wir als das letzte Ziel der Naturwissenschaften bezeichnen; ob es erreicht werden kann, das läfst sich jetzt noch nicht übersehen.

Ableitung der physikalischen Gesetze aus Messungen.

Wir haben im Vorigen bereits mehrfach gezeigt, dafs die Grundlage alles physikalischen Wissens genaue Beobachtungen und Messungen sind; ehe wir zur Besprechung der physikalischen Naturerscheinungen selbst übergehen, müssen wir uns daher noch die Frage vorlegen, wie wir aus den Messungen die Gesetze der Erscheinungen ableiten, und wie wir bei den Messungen zu verfahren haben. Wir wollen dieses an dem Beispiele der Zurückwerfung des Lichtes zeigen, welches wir vorhin bereits angeführt haben. Wir wissen also, dafs jedesmal, wenn ein Lichtstrahl auf eine polirte Fläche fällt, derselbe zurückgeworfen wird, ferner, dafs die Richtung, nach welcher der zurückgeworfene Strahl fortgepflanzt wird, sich ändert, wenn die Richtung des einfallenden sich ändert. Um das Gesetz zu erhalten, welches die Abhängigkeit der Richtung des zurückgeworfenen von der des einfallenden Strahles darstellt, setzen wir einen Spiegel in den Mittelpunkt eines geteilten Kreises, so dafs die Ebene des Spiegels senkrecht ist zur Ebene des Kreises. An dem Kreise sind zwei bewegliche Radien, deren Enden mit einer Spitze auf die Teilung des Kreises zeigen. Die Radien tragen durchsichtige Röhren, deren Achsen den Radien parallel sind; vor der einen Röhre steht eine möglichst kleine Flamme, welche nur durch die Röhre Licht auf den Spiegel senden kann. Ist nun der Spiegel so aufgestellt, dafs die Spiegelnormale, das Einfallslot, den Nullpunkt der Teilung trifft, so gibt uns der Abstand des die Flamme tragenden Radius vom Nullpunkte der Teilung den Einfallswinkel des Lichtstrahls. Wir verschieben dann den zweiten beweglichen Radius so lange, bis wir durch die Röhre blickend den zurückgeworfenen Strahl sehen. Da dann die Richtung dieses zweiten Radius jene des zurückgeworfenen Lichtstrahles ist, so gibt uns der Abstand seiner Spitze von dem Nullpunkte der Teilung den Zurückwerfungswinkel. Man setzt dann die beiden beobachteten Winkel neben einander. Man wiederholt dann den Versuch, indem man nach und nach verschiedene Einfallswinkel wählt, dabei von dem kleinsten, der senkrechten Incidenz, bis zum gröfsten, der streifenden Incidenz, fortschreitet, und entwirft sich eine Tabelle, auf welcher neben jedem gewählten Einfallswinkel der beobachtete Zurückwerfungswinkel verzeichnet ist. Eine Vergleichung der zusammengehörigen Winkel zeigt uns dann, unter Voraussetzung absoluter Genauigkeit, dafs die zu einander gehörigen Winkel immer gleich sind. Indem man dann so eine ganz konstante Beziehung zwischen den beiden Winkeln in den beobachteten Fällen erkennt, schliefst man, dafs das in allen so sein wird, und erhält auf diese Weise ein experimentell bewiesenes Gesetz.

Der Beweis eines physikalischen Gesetzes ist somit der Nachweis einer bestimmten Beziehung zwischen Zahlen, welche durch direkte Messung erhalten oder aus direkt gemessenen Gröfsen berechnet werden; wir erkennen diese Beziehung in einer gröfsern oder geringern Anzahl von Fällen und schliefsen daraus, dafs sie in allen bestehe.

Damit aber die zwischen den verglichenen Gröfsen bestehende Beziehung in aller Schärfe hervortrete, ist es nötig, dafs die Messungen absolut genau sind. Das ist niemals zu erreichen, einmal wegen der Ungenauigkeit der Instrumente, dann aber auch wegen der Unvollkommenheit unserer Sinne. In dem eben besprochenen Beispiele ist der Mafsstab, an welchem gemessen wird, ein geteilter Kreis; eine solche Teilung läfst sich nie absolut genau herstellen, der eine Grad ist niemals dem andern absolut gleich, und die Teilstriche haben niemals absolut gleiche Breite. An dem Kreise lassen sich ferner niemals die beweglichen Radien mit absoluter Genauigkeit einstellen, und schliefslich läfst sich die Stellung der Radien nicht mit vollkommener Sicherheit ablesen. Deshalb sind auch die besten Messungen mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet, welche je nach der Güte der Instrumente und der Geschicklichkeit des Beobachters gröfser oder kleiner sein können. Sind die Instrumente schlecht, besitzt der Beobachter nicht die notwendige Geschicklichkeit, oder wendet er nicht die gehörige Sorgfalt an, so können die Beobachtungsfehler eine solche Gröfse erreichen, dafs die Messungen das Gesetz gar nicht erkennen lassen; man würde dann gar keine oder auch sehr viele algebraische Beziehungen finden, welche die beobachteten Werte mit der gleichen Genauigkeit wiedergeben, und keine dieser Beziehungen würde nach den Messungen den Vorzug verdienen.

Haben aber die Instrumente die nötige Feinheit, und hat der Beobachter die erforderliche Sorgfalt angewandt, so findet man immer eine Beziehung, welche die beobachteten Werte am genauesten wiedergibt, und indem man dann erwägt, dafs vollkommene Genauigkeit nicht erreicht werden kann, darf man diese Beziehung als den Ausdruck des physikalischen Gesetzes betrachten.

Hierbei sind aber noch folgende Punkte zu beachten. Da man bei einer hinreichend grofsen Zahl von Messungen ebenso oft Wahrscheinlichkeit hat, dafs die beobachteten Werte zu klein als dafs sie zu grofs sind, so müssen im allgemeinen ebenso viele Werte kleiner als gröfser sein wie diejenigen, welche das aus den Messungen abzuleitende Gesetz verlangt. Findet man dagegen, dafs die gefundenen Werte, wenn auch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, stets gröfser oder stets kleiner sind, so mufs man dennoch schliefsen, dafs das Gesetz nicht genau besteht. Wir werden sehen, dafs die Erkenntnis der nicht ganz strengen Gültigkeit des Mariotteschen Gesetzes lange Zeit dadurch verzögert wurde, dafs Arago und Dulong diese Vorsicht bei den aus ihren Versuchen gezogenen Schlüssen verabsäumten.

Die Abweichungen der beobachteten Werte von den vom Gesetze verlangten müssen ferner ganz unregelmäfsig sein, dieselben dürfen nicht eine bestimmte Gesetzmäfsigkeit zeigen. Würde man finden, dafs etwa für kleine Werte der gegebenen Gröfse der beobachtete Wert der von derselben abhängigen Gröfse immer gröfser, für grofse dagegen immer kleiner ist als der vom Gesetze verlangte, so würde man auch dann nicht schliefsen dürfen, dafs das aus den Messungen abgeleitete Gesetz der Wirklichkeit vollständig entspricht; wir dürfen es auch dann, wie in dem vorigen Falle, nur für ein annähernd richtiges halten.

Wie grofs in den einzelnen Fällen die Beobachtungsfehler sein können, [...]he die beobachteten Werte den wirklich stattfindenden entsprechen

können, das läfst sich nicht allgemein feststellen; es hängt das unter sonst gleichen Umständen von der Schwierigkeit der Messungen ab. Man hat in jedem Falle die Grenze der erreichbaren Genauigkeit zu bestimmen, in welcher Weise, das werden wir später bei den einzelnen Untersuchungen kennen lernen. Das aber ist immer festzuhalten, dafs, wenn Beobachtungen ein Gesetz bestätigen sollen, die Differenzen des beobachteten und gesetzmäfsigen Wertes nur ein kleiner Bruchteil des erstern sein dürfen.

Die in der Physik gebräuchlichen Mafse.

Die Mafse, welche in der Physik angewandt werden, sind dem neufranzösischen Mafssystem entnommen, welches den grofsen Vorzug hat, dafs es alle Mafsbestimmungen auf ein und dieselbe Einheit, die des Längenmafses zurückführt. Die Einheit des französischen Längenmafses ist das Meter. Dasselbe ist von der Länge eines Erdmeridians abgeleitet, und zwar wurde der zehnmillionte Teil des durch genaue Messungen bestimmten Quadranten eines Erdmeridian dazu gewählt. Später hat sich zwar ergeben, dafs in die dem Meter zu Grunde liegenden Messungen sich ein kleiner Fehler eingeschlichen hat, da aber die Mafseinheit einmal festgestellt und verbreitet war, so hat man es unterlassen, dieselbe darnach zu ändern. Das Meter ist sonach um ein sehr Geringes von dem zehnmillionten Teile eines Erdmeridianquadranten verschieden. Das Originalmeter, nach welchem alle übrigen Mafsstäbe abgeglichen werden, ist in den Archiven zu Paris niedergelegt.

Man teilt das Meter nach dem Decimalsystem

1 Meter $= 10^{dc}$ Decimeter $= 100^{cm}$ Centimeter $= 1000^{mm}$ Millimeter.

Im deutschen Reiche ist seit dem 1. Januar 1872 dasselbe Mafssystem eingeführt worden. Als deutsche Bezeichnung ist für das Meter der Name Stab, für das Centimeter Neuzoll und für das Millimeter der Name Strich gewählt, welche Bezeichnungen indessen gegenüber den ältern oben angeführten wenig in Gebrauch sind.

Früher legte man in Frankreich und Deutschland und noch jetzt in vielen Ländern die willkürlich gewählte Einheit des Fufses (ungefähr von der Länge des menschlichen Fufses) zu Grunde.

Eine Vergleichung der wichtigsten Fufsmafse, wie sie bisher gebraucht wurden, mit dem Metermafse gibt folgende Zusammenstellung:

Meter	Pariser Fufs	Preufsen Rhnl. Fufs	England Fufs	Östreich Wiener F.	Baiern Fufs	Baden Fufs	Sachsen Fufs	Schweden Fufs
1 =	3,078444	3,186199	3,280899	3,163446	3,426310	3,333333	3,531197	3,368126

Dem hier angegebenen preufsischen ist das dänische, dem englischen das russische und dem badischen das schweizerische Fufsmafs an Gröfse gleich.

Der Fufs wird entweder duodecimal, in 12″ Zoll, der Zoll in 12‴ Linien oder decimal, in 10″, der Zoll in 10‴ Linien eingeteilt.

Das Flächenmafs wird in dem metrischen System durch Quadrierung des Meters erhalten und ebenso das Körpermafs durch Kubation des Meters

1^{qm} Quadratmeter $= 100^{qdm} = 10\,000^{qcm} = 1\,000\,000^{qmm}$.

1^{km} Kubikmeter $= 1000^{kdm} = 1\,000\,000\ ^{kcm} = 1\,000\,000\,000^{kmm}$.

Es ist leicht darnach das Verhältnis der Quadrat- und Kubik-Fuſse, Zolle etc. zum metrischen Flächen- und Körpermaſse zu erhalten, z. B.

1^{qm} = 9,476817 □' Paris = 10,15187 □' preuſs. etc.
1^{km} = 29',17385 kub. Paris = 32',32587 kub. preuſs. etc.

Als Einheit des Hohlmaſses nimmt das metrische System den Rauminhalt eines Kubikdecimeters und nennt dieses Maſs ein Liter (französisch Litre).

Dasselbe Hohlmaſs ist jetzt auch als Einheit im deutschen Reiche acceptiert.

Früher wurde bei uns, und noch jetzt in den Ländern, welche das metrische System nicht acceptiert haben, das Hohlmaſs aus dem Fuſsmaſs verschieden gebildet. In Preuſsen war das Quart = 64″ kub., in Baiern das Maſs = 84″,304 kub., in England ist die Gallone = 277″,2738 kub., das östreichische Maſs ist = 0′,0448 kub. u. s. f.

1 Liter = 0,873 3386 preuſs. Quart = 0,935 4301 baier. Maſs.
= 0,220 0967 engl. Gallone = 0,706 6483 östr. Maſs.

Auch die Einheit des Gewichtes ist im metrischen Systeme aus jenem des Längenmaſses abgeleitet. Man geht vom Centimeter aus und nennt **das Gewicht von einem Kubikcentimeter Wasser** bei der Temperatur 4° C. ein Gramm.

Im gewöhnlichen Leben wird das Gewicht von einem Liter Wasser als Einheit genommen; dasselbe enthält 1000^{cm} kub. und wiegt daher 1000 Gramm. Dieses Gewicht wird Kilogramm genannt. Ein bei der Aufstellung des metrischen Systemes mit der gröſsten Sorgfalt hergestelltes Kilogramm wird in den Pariser Archiven aufbewahrt. Da man mit viel gröſserer Genauigkeit zwei Gewichte mit einander vergleichen kann, als das Gewicht eines bestimmten Volumens Wasser bestimmen, so werden alle Normalgewichte nach dem pariser Kilogramm abgeglichen.

Die Unterabteilungen des Grammes sind nach dem Decimalsystem gebildet

1 Gramm = 10 Decigramme = 100 Centigramme = 1000 Milligramme.

Besondere Zeichen werden für diese Unterabteilungen nicht benutzt, man schreibt sie als Decimalstellen des Grammes.

Im deutschen Reich ist seit Einführung des metrischen Systems auch dieses Gewichtssystem eingeführt, nur wird als Einheit die Hälfte des Kilogramms, das Pfund, genommen. Dasselbe wird dann ohne weitere Unterabteilung in 500 Gramm geteilt. Die in andern Ländern gewählten Gewichtseinheiten, die meist den Namen Pfund führen, sind von dem halben Kilogramm nicht sehr verschieden. Eine Vergleichung der wichtigsten Pfunde mit dem Kilogramm bietet folgende Zusammenstellung:

1 Kilogramm = 2,204 597 Pfd. englisch Avoirdupois
1,785 675 „ östreichisch
2,441 883 „ russisch
2,002 768 „ dänisch und norwegisch
2,351 063 „ schwedisch Schalgewicht
2,000 000 deutsch.

Das Pfund wird meist in 16 Unzen, wie in England, oder in 32 Loth ilt.

In den Niederlanden, Spanien und Italien ist das metrische System eingeführt, zum Teil nur mit andern Benennungen.

Um eine Richtung im Raume mit einer andern zu vergleichen, hat man ein Maſs für Winkel oder Richtungsverschiedenheiten eingeführt; man teilt zu dem Ende überall den Kreisumfang in 360 gleiche Teile, deren einer ein Grad genannt wird. Der Grad wird in 60′ Minuten, die Minute in 60″ Sekunden geteilt.

Die Erscheinungen, welche wir in der Physik zu untersuchen haben, treten nicht nur räumlich, sondern auch zeitlich verschieden auf. Wir haben daher in vielen Fällen auch die Zeit zu messen. Das Zeitmaſs ist auf die Länge des Tages gegründet, es ist

1 Tag mittlerer Zeit = 24 Stunden
1^h Stunde = 60′ Minuten
1′ Minute = 60″ Sekunden.

Bei den physikalischen Zeitangaben wird meist die Sekunde als Zeiteinheit gewählt.

Einige Meſsinstrumente.

Der Komparator.

Der Angabe der in der Physik gebräuchlichen Maſse lassen wir eine kurze Beschreibung der ohne besondere Theorie in ihrem Princip verständlichen Meſsinstrumente, der Längenmeſsinstrumente, und der Winkelmeſsinstrumente folgen.

Die Grundlage für alle Längenmessungen ist das Meter, und zwar wird, wie vorhin erwähnt wurde, als das Normalmeter das in den Pariser Archiven befindliche aus Platin gefertigte Meter angenommen. Die sämtlichen in Gebrauch befindlichen Meter sind entweder direkt mit dem Pariser Normalmeter verglichen, oder nach solchen dargestellt, welche mit den Pariser Metern verglichen waren.

Zur Vergleichung der Längenmaſse wendet man Komparatoren an, welche verschieden eingerichtet sind, je nachdem man Endmaſse, das heiſst Maſse vergleichen will, welche zwischen den Endpunkten des Maſsstabes eine bestimmte Länge haben sollen, oder Strichmaſse, das heiſst solche, welche zwischen zweien auf dem Maſsstabe gezogenen Strichen eine bestimmte Länge haben. Wir begnügen uns damit, einen für die Vergleichung von Endmaſsen konstruierten Fühlhebelkomparator zu beschreiben[1]).

Eine breite Platte von gehobeltem Guſseisen dient dem Apparat (Fig. 1) als Basis.

Fig. 1.




Diese Platte besitzt an dem einen Ende ein mit Schrauben befestigtes stählernes Aufsatzstück C; an diesem befindet sich eine vorspringende stumpfe

[1]) Andere Komparatoren sehe man im ersten Bande von *Karstens* Encyklopädie der Physik p. 502 ff. und *Wild,* Bericht über die Reform der schweizerischen Urmaſse. Zürich 1868.

Schneide, gegen welche das Meter fest angelegt wird Gegen das and Ende des Apparats hin ist ein stählerner Stift DE angebracht, der sei Länge nach gleiten kann; man kann ihn von D nach E hin verschieb aber eine Spiralfeder drückt ihn immer nach D hin zurück. Der Mefsappa des Instrumentes wird von einem um eine Axe G beweglichen Winkelhel ZGE, dem Fühlhebel, gebildet. Der Winkelhebel hat einen sehr kurzen A GE, der durch eine Feder F immer an das Ende E des Stiftes DE a gedrückt ist, und einen 100mal längeren Arm ZG, dessen Ende auf eine geteilten Kreisbogen sich bewegt. Bei L befindet sich eine Lupe, dur welche man scharf beobachten kann, an welchem Teilstrich das Ende ansteht.

Um nun ein Meter zu prüfen, verfährt man folgendermafsen. Zunäch legt man den Etalon, mit welchem man den Mafsstab vergleichen wi gegen die Scheide bei C und richtet ihn gerade durch Anschieben an d beiden festen Aufsatzstücke M und N. Der bewegliche Stift DE wird da durch die ihn umgebende Spiralfeder gegen das Ende A des Etalons g drückt; der Hebelarm GE wird dann durch die Feder F an das vorde Ende E des Stiftes DE angedrückt, und der Zeiger GZ stellt sich a irgend einen Teilstrich der Teilung ein. Man beobachtet und bemerkt si denselben.

Darauf ersetzt man den Etalon durch den Mafsstab, der geprüft werde soll. Wenn der Zeiger dann genau auf demselben Teilstrich einsteht, ist derselbe richtig, zeigt er auf eine andere Stelle der Teilung, so ist d Mafstab unrichtig und mufs, je nachdem der Zeiger sich mehr oder wenig entfernt von Z einstellt, verkürzt oder verlängert werden.

Um die Empfindlichkeit des Apparates zu beurteilen, genügt es beachten, dafs der Unterschied der beiden verglichenen Mafsstäbe in d Bewegung des Hebelendes Z hundertmal gröfser erscheint, weil der A ZG des Winkelhebels hundertmal gröfser ist als der Arm GE. Da m nun eine Verschiebung von $0^{mm},1$ auf der Teilung mit Hülfe der Lupe no recht gut wahrnehmen kann, so kann man einen Unterschied der Mafsstä von $0^{mm},001$ noch gut bestimmen.

Die Vergleichung eines Mafsstabes mit dem Etalon ist aber denno meist nicht so einfach, da nur selten der verglichene Mafsstab von Plat verfertigt ist. Die Wärme dehnt nämlich alle Körper aus, und der a Etalon benutzte Platinmafsstab hat nur bei der Temperatur des schmelzend Eises genau die Länge des als Einheit angenommenen Meters. Man mu daher alle Vergleichungen bei dieser Temperatur ausführen oder, wenn m sie bei einer andern Temperatur ausgeführt hat, Rücksicht nehmen auf d Ausdehnung der Körper durch die Wärme, welche für die verschieden Mafsstäbe eine andere ist, wenn sie nicht aus dem gleichen Material g fertigt sind. Dadurch wird das Verfahren etwas komplicierter; wir werd später sehen, wie man diese notwendigen Korrektionen anbringen kann.

Mit Hülfe des Komparators kann man sich also jeder Zeit ein genau Meter verschaffen. Ist das geschehen, so müssen wir dasselbe in sei Unterabteilungen, Decimeter, Centimeter und Millimeter teilen. Die Operation geschieht mittels der Teilmaschine.

Die Teilmaschine.

Der wichtigste Teil dieses Apparates ist eine Mikrometerschraube. Dieselbe ist auf einem möglichst homogenen Cylinder von hartem Stahl eingeschnitten und hat eine Länge von 50—80 Centimeter. Bei der Herstellung derselben sucht man es dahin zu bringen, dafs ein Schraubengang genau einem Millimeter entspricht, das heifst also einmal zu erreichen, dafs die Höhe aller Schraubengänge unter sich gleich und jeder gleich einem Millimeter ist. Es mufs also die Anzahl der Schraubengänge genau der Anzahl Millimeter entsprechen, welche der Cylinder lang ist. Absolute Genauigkeit kann natürlich nicht erreicht werden, die Ungenauigkeiten dürfen aber nur sehr klein sein und müssen durch Messung bestimmt werden. Bei der Beschreibung des Instrumentes und seiner Anwendung nehmen wir an, dafs die Schraube möglichst genau gearbeitet sei.

Fig. 2.



An seinen beiden Enden ist der mit der Schraube versehene Cylinder in zwei Zapfenlager *P* und *B* (Fig. 2) eingeschlossen, in denen er sich mit sanfter Reibung drehen kann, ohne die geringste fortschreitende Bewegung anzunehmen; eine Kurbel *A*, welche man mit der Hand dreht, bringt diese Bewegung hervor.

Die Schraube geht in einer Mutter *Q*, welche sie umfafst, und welche sich nicht mit derselben drehen kann. Die Mutter bewegt sich daher vorwärts oder rückwärts, wenn man die Schraube in dem einen oder andern Sinne dreht. Die Mutter teilt ihre Bewegung einer stählernen Platte *F* mit, welche an ihr befestigt ist. An der Platte *F* ist ein Grabstichel *H* angebracht, der also genau die Bewegung der Platte und somit der Schraubenmutter *Q* annimmt.

Durch eine ganze Umdrehung der Kurbel schreitet der Grabstichel um die Höhe eines Schraubenganges, also um 1^{mm} fort, durch eine zehntel, hundertstel, tausendstel Umdrehung bewegt sich auch der Stichel um $0^{mm},1$, $0^{mm},01$, $0^{mm},001$ weiter. Es genügt daher den Bruchteil der Umdrehung der Schraube zu kennen, um zu wissen, wie weit der Stichel vorgeschoben ist.

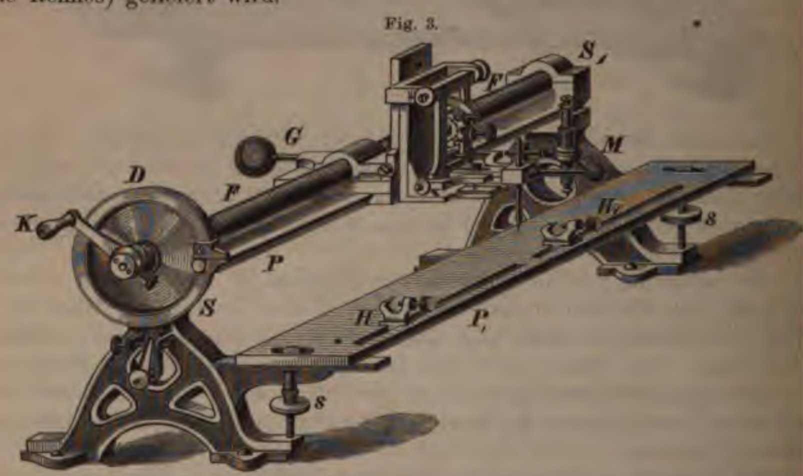
Zu dem Zwecke ist an dem mit der Kurbel versehenen Ende der Schraube auf den Cylinder eine kreisförmige Scheibe *D* aufgesetzt, welche sich mit der Schraube dreht, und deren Rand in 100 Teile geteilt ist; ein unbeweglicher an dem Tisch des Apparates angebrachter Zeiger *C* gibt dann an, um welchen Bruchteil einer Umdrehung die Schraube gedreht, um welchen Bruchteil eines Millimeter somit der Stichel vorgeschoben ist.

Will man z. B. eine Glasröhre teilen, so legt man dieselbe, wie die Figur zeigt, auf zwei Lager, in denen sie durch zwei Faden *L* und *K* festgehalten wird, so dafs sie sich drehen, aber nicht ihrer Länge nach ver-

schieben kann. Man nimmt dann als Stichel einen Schreibdiamanten, od
besser noch, man überzieht vorher die Röhre mit einer dünnen gleic
mäfsigen Schicht von Wachs oder Paraffin, und nimmt einen Stahlstich
und führt denselben durch passendes Drehen der Schraube an das En
der Röhre. Dort macht man den ersten Strich, indem man den Stichel m
der einen Hand sanft niederdrückt, und mit der andern Hand die Röhre
ihren Lagern herumdreht, so dafs die Spitze des Stichels die Wachsschic
von dem Glase entfernt. Man dreht dann die Kurbel um n Teile des Kreise
bewirkt dadurch ein Fortschreiten des Stichels um $n \cdot 0{,}01^{mm}$ und zieht d
zweiten Strich; so fährt man fort, bis die Teilung auf die gewünschte Län
vollendet ist. Schliefslich ätzt man die Teilung auf dem Glase durch Fluf
säure.

Die Teilmaschine in dieser einfachen Form ist zur Anwendung nic
gerade bequem, indem sie zu jeder Operation die gröfste Aufmerksamk
fordert. Man hat deshalb die Teilmaschine in ihrem mechanischen Tei
vielfach verbessert, besonders um den richtigen Abstand der Teilstric
sicher zu erhalten, und die Teilstriche besser ziehen zu können. Fig.
zeigt die Teilmaschine in der Form, wie sie jetzt von Bianchi in Paris (R
de Rennes) geliefert wird.

Fig. 3.



Die Mikrometerschraube F, bei meinem Apparate 56 Centimeter lan
hat ihre Lager in dem eisernen Gestell SS_1. An demselben Gestelle si
zwei abgehobelte Eisenplatten P und P_1 befestigt, deren obere sorgfält
eben gearbeitete Flächen der Axe der Schraube parallel sind. Die ob
dieser Platten trägt einen Schlitten, an welchem der Stichel, resp. das de
selben tragende später zu beschreibende Reifserwerk befestigt ist. Eine
dem Schlitten befindliche Mutter greift in die Mikrometerschraube ein,
dafs die Drehung der Schraube den Schlitten fortbewegt. Die Schrau
kann nur in einem Sinne, von K aus gesehen im Sinne der Bewegung ein
Uhrzeigers gedreht und deshalb der Schlitten nur von S_1 aus gegen K h
bewegt werden. Um den Schlitten im entgegengesetzten Sinne bewegen
können, ist die Mutter des Schlittens aus zwei Teilen zusammengesetzt, u
die obere Hälfte in einem Gelenke drehbar kann an dem Griffe G emp

gehoben werden. Nur in diese obere Hälfte der Mutter sind Windungen eingeschnitten, so dafs, wenn sie empor gehoben ist, der Schlitten frei auf der Platte verschoben werden kann. Die an dem Ende des Griffes angebrachte schwere Messingkugel bewirkt durch ihr Gewicht ein sicheres Eingreifen der Windungen der Mutter in jene der Schraube, wenn die obere Hälfte der Mutter niedergelassen ist.

Neben dem Reifserwerk ist an dem Schlitten ein Mikroskop M angebracht, durch welches man die gezogenen Teilstriche scharf sehen kann, und welches aufserdem in nachher zu beschreibender Weise die Teilmaschine befähigt als Längenmefsapparat zu dienen.

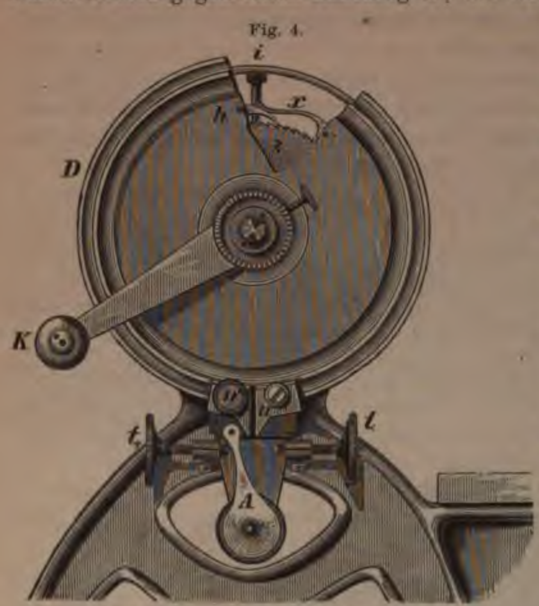
Die Platte P_1 dient zur Befestigung der Gegenstände, welche mit einer Teilung versehen werden sollen; zu dem Zwecke trägt sie in einem Schlitz verschiebbare Lager H, H_1, in welchen die betreffenden Gegenstände, Röhren, Mafsstäbe etc. befestigt werden. Um bei zu teilenden Objekten verschiedener Breite die Teilung an der richtigen Stelle anbringen zu können, ist die Platte P_1 etwas verschiebbar, so dafs sie der Mikrometerschraube etwas näher gebracht, oder etwas von ihr entfernt werden kann. Gleichzeitig dient diese Verschiebbarkeit der Platte dazu die Gegenstände, welche mit einer Teilung versehen werden sollen, der Schraube genau parallel zu legen. Man bringt zu dem Zwecke den Schlitten zunächst an das eine Ende des zu teilenden Objektes und verschiebt die Platte P_1 so, dafs der Stichel sich gerade über dem Punkte befindet, wo die Teilung beginnen soll. Dann bringt man den Schlitten an das andere Ende und bewirkt durch einen gelinden Druck auf dieses Ende der Platte, dafs auch dort sich der Stichel gerade über dem Punkte befindet, wo die Teilung enden soll. Durch anziehen der Schrauben s wird dann die Platte so festgesetzt.

An dem mit der Kurbel versehenen Ende der Schraube befindet sich auch an dieser Maschine die auf ihrem Umfange in 100 gleiche Teile geteilte Scheibe D; ein an dem Gestelle der Maschine befestigter Index läfst erkennen, um welchen Bruchteil des Umfanges die Schraube gedreht ist.

Bei der einfachen Teilmaschine erfordert es grofse Aufmerksamkeit, dafs man die Schraube von einem zu dem andern zu ziehenden Teilstrich nicht zu wenig oder zu viel dreht, es ist deshalb sehr schwierig, die Teilung genau gleichmäfsig zu machen. Diese Schwierigkeit ist bei der vervollkommneten Maschine durch einen besondern Mechanismus gehoben. Zunächst kann man mit der Kurbel K die Schraube nur in dem einen Sinne drehen; zu dem Zwecke ist die Scheibe D, welche mit der Kurbel gedreht wird, nicht fest mit der Schraube verbunden, sondern für sich drehbar auf das Ende der Schraube aufgesetzt. Dreht man die Scheibe nach links herum, so bewegt sie sich ohne die Schraube mitzunehmen, nur bei der Drehung nach rechts herum wird auch die Schraube gedreht. Um das zu erreichen, ist unmittelbar neben der Scheibe und derselben parallel, wie Fig. 4 zeigt, in der ein Stück der Scheibe fortgenommen ist, auf die Schraube ein gezahntes Rad z gesetzt, und an der Scheibe D ist ein Haken h befestigt, welcher bei der Drehung nach links auf den Zähnen des Rades schleift, bei derjenigen nach rechts aber durch die Feder f auf das Zahnrad aufgedrückt wird, in die Zähne eingreift, und so die Schraube mitnimmt.

An der Scheibe D sind, wie Fig. 4 zeigt, zwei Nasen angebracht, n und n', von denen die eine n unveränderlich befestigt ist, während die andere n' an jeder Stelle des Umfanges eingeklemmt werden kann. Diese Nasen stoſsen gegen einen Anschlag A, der an dem Gestelle der Maschine drehbar befestigt ist, und dessen Bewegung durch die Spitzen der Schrauben t und t_1 gehemmt wird. Die Schraube t wird so gestellt, daſs wenn bei einer Drehung nach links herum der Anschlag A durch die Nase n gegen die Spitze von t gedrückt wird, der Nullpunkt der Teilung auf der Scheibe D sich gerade am Index i befindet. Man kann dann mit der Kurbel K die Schraube nur so weit drehen, bis die Nase n' den Anschlag A gegen das Ende der Schraube t_1 drückt. In der Fig. 4 angedeuteten Stellung der Nase n' würde das nach einer ganzen Umdrehung der Schraube sein,

Fig. 4.



wenn man t_1 so stellt, daſs der Anschlag A gegen das Ende von t_1 drückt, wenn sich wieder der Nullpunkt der Teilung an dem Index i befindet. Um die Schraube weiter zu drehen, muſs man erst die Scheibe wieder nach links drehen, bis die Nase n den Anschlag A wieder gegen das Ende von t drückt. Die in Fig. 4 dargestellte Anordnung würde somit die geeignete sein, um, ohne besondere Aufmerksamkeit auf die Drehung verwenden zu müssen, einen Gegenstand, etwa einen Maſsstab mit einer Millimeterteilung zu versehen. Man stellt durch Drehung nach links die Scheibe D so, daſs der Nullpunkt der Teilung der Scheibe am Index i sich befindet, wenn die Nase n den Anschlag A an t drückt. Man bringt dann den Maſsstab in die richtige Lage, so daſs der Stichel den ersten Strich dort zieht, wo auf demselben die Teilung beginnen soll. Man zieht den betreffenden Strich; dann dreht man die Scheibe rechts herum, bis die Nase n' den Anschlag gegen das Ende von t_1 drückt; bei dieser Drehung wird der Schlitten um 1^{mm} fortgeschoben, da bei derselben die Schraube einmal vollständig gedreht wurde. Man zieht den zweiten Strich und dreht dann die Scheibe zunächst links herum, bis die Nase n den Anschlag A trifft, und wieder rechts herum, bis die Nase n' wieder den Anschlag trifft. Die erste Drehung lieſs den Schlitten stehen, brachte aber die Scheibe in die Lage, welche eine Drehung nach rechts und damit eine Drehung der Schraube möglich machte. Man zieht den zweiten Strich und so fort, so daſs man zwischen je zwei Strichen die Scheibe einmal nach links, einmal nach rechts drehen muſs, bis der Anschlag die Bewegung der Scheibe hemmt.

Will man den Maſsstab statt in Millimeter in kleinere Teile teilen, so hat man nur die Nase n', welche die Drehung nach rechts hemmt, zu versetzen. Entfernt man z. B. die Nase um ein viertel Umkreis nach links hin, so würde die Bewegung nach rechts jedesmal gehemmt, wenn die Schraube um drei viertel Umdrehung gedreht, somit der Stichel um $0{,}75^{mm}$ verschoben wäre. Wir erhielten somit eine Teilung, bei der je zwei Teilstriche um $0{,}75^{mm}$ von einander entfernt wären.

Man zieht auf einem Maſsstabe, den man teilen will, nicht alle Striche gleich lang, sondern den ersten lang, dann vier kurze, den fünften von mittlerer Länge, dann wieder vier kurze und den zehnten mit dem ersten von gleicher Länge. Bei der alten Maschine muſste die Hand des Teilenden diese Gruppierung der Linien besorgen; das erforderte Geschicklichkeit und stete Aufmerksamkeit, ohne daſs man jedoch imstande war, die gewünschte Regelmäſsigkeit zu erreichen. Die neue Einrichtung des Grabstichels jedoch, wie sie Fig. 3 perspectivisch und Fig. 5 vom Profil zeigt, enthält einen besondern Mechanismus zur Lösung dieser Aufgabe. Man hat in der Hand den kleinen Haken U (Fig. 5).

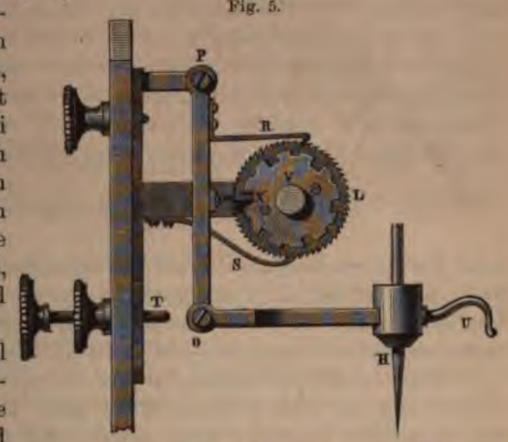


Fig. 5.

Man zieht denselben anfangs gegen sich hin, indem man ihn ein wenig aufhebt, dann schiebt man ihn leicht niederdrückend zurück. Dabei dringt der Stift ein wenig in das zu teilende Objekt ein und hinterläſst den Strich. Um dem Striche die gewünschte Länge zu geben, genügt es, den Gang des Stichels passend zu hemmen.

Dazu ist über dem Stichel ein Rad LVX (Fig. 5) angebracht, welches sich um eine feste Axe drehen kann; das Rad besteht aus zwei kreisrunden Platten, deren eine L auf ihrem Umfange mit Zähnen versehen ist, die andere VX aber mit Ausschnitten, welche abwechselnd tiefer und weniger tief sind, getrennt durch Zwischenräume von gleicher Länge, die durch den Umfang der Scheibe gebildet werden. In dem Augenblick nun, wo man den Haken U anzieht, bewegt sich ein vorspringendes Stück bei X gegen das Rad, dringt in einen tieferen Ausschnitt ein und hemmt auf den Boden desselben aufstoſsend die Bewegung des Schreibstiftes. Wenn man dann den Stift zurückschiebt, so bewegt er sich so weit, bis er an den Vorsprung T stöſst, welcher ihm nicht weiter zu gehen erlaubt.

Während dieser Bewegung greift nun aber ein Haken R in die Zähne des Rades L, dreht es um einen Zahn voran und verschiebt den Ausschnitt des nebenliegenden Rades V. Wenn man dann den Stift von neuem anzieht, so trifft er nicht mehr auf einen Ausschnitt, sondern auf den äuſseren Umfang des Rades, welcher an Stelle des Ausschnittes getreten ist. Die Bewegung des Stichels geht daher nicht so weit, und der von ihm gemachte

[illegible] dieselbe Drehung der Räd[illegible] [illegible] wieder in eine[illegible] [illegible] der Strich länger als d[illegible] [illegible] der Arbeiter brauch[illegible] [illegible] Sie werden genau g[illegible] [illegible] durch ihre gröfsere Läng[illegible] [illegible]

[illegible] Teilmaschine vorausgesetzt, da[illegible] [illegible] die Höhe alle[illegible] [illegible] Maschinen, besonders di[illegible] [illegible] dieselben doch prüfe[illegible] [illegible] eines Schraubenganges [illegible] 300 Umdrehunge[illegible] [illegible] nimmt man einen mit einem Kom[illegible] [illegible] Länge, und legt denselbe[illegible] [illegible] Man stellt dann das an der [illegible] der Teilung ein [illegible] dann das Mikrosko[illegible] [illegible] Ist das nicht der Fall, s[illegible] [illegible] genau 1^{mm}. B[illegible] [illegible] Teilmaschine von Bianchi mit eine[illegible] [illegible] ^{mm} [illegible] 300,08 Umdrehunge[illegible] [illegible] Schraubenganges ist daher im Mitt[illegible]

$$\frac{300}{300{,}08} = [illegible]$$

[illegible] Hunderttausendstel eines Millimeters [illegible] [illegible] in den meisten Fällen zu vernachlässig[illegible] [illegible] Teilmaschine erkannt werden, schon durch klei[illegible] [illegible] Temperatur bedingt, überwogen wird.

[illegible] Teilung bedarf es um zu erkennen, ob die einzeln[illegible] [illegible] Höhe sind. Man erkennt das, indem m[illegible] [illegible] Teilung [illegible] von 2 bis 3^{mm}, die man sich mit d[illegible] [illegible] an der Maschine verschiebt. Man brin[illegible] [illegible] Maschine, stellt das Mikroskop auf d[illegible] [illegible] durch Drehung der Schraube d[illegible] [illegible] auf dem andern Ende der Teilung einste[illegible] [illegible] Ende der Teilung unter das Mikrosko[illegible] [illegible] dass man eine Teilung von 30^{mm} g[illegible] [illegible] Schraubengänge alle gleich sind, stets [illegible] [illegible] das Mikroskop von dem einen Ende der Teilu[illegible] [illegible] In dieser Weise fand ich z. B. bei meiner Te[illegible] [illegible] Schraubengänge in der Nähe der Enden nur et[illegible] [illegible] dass sie gegen die Mitte hin von beiden Seit[illegible] [illegible] etwa 150^{mm} von beiden Enden entfernt den We[illegible] [illegible] und auf den mittlern 250^{mm} zwischen 1 und 1,0003[illegible] [illegible] Es sind das Fehler, die in den allermeisten Fällen ganz [illegible] vernachlässigen sind.

Die Beschreibung der Methoden, nach denen die Höhe der Schraube

gänge zu prüfen ist, läfst gleichzeitig erkennen, dafs die Teilmaschine auch ein wertvoller Mefsapparat ist; man kann die Länge von Platten, Röhren, kurz aller Gegenstände, die man wie die mit einer Teilung zu versehenden Objekte auf der Platte P_1 der Teilmaschine befestigen kann, mit derselben auf das schärfste messen. Wir werden sehen, wie die Teilmaschine vielfach zu diesem Zwecke verwertet wird.

Die mit der Teilmaschine herzustellenden Mafsstäbe teilt man selten in kleinere Abteilungen als Millimeter oder höchstens $0{,}5^{mm}$, weil bei zu enge gezogenen Teilungen die Ablesung zu grofse Schwierigkeit bietet. Um nun Unterabteilungen des Millimeters mit den Mafsstäben noch genau bestimmen zu können, bringt man an denselben einen Nonius an.

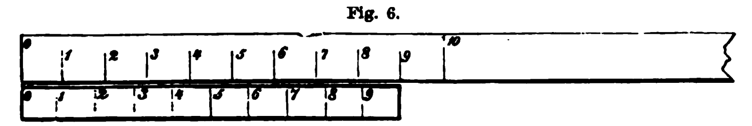
Der Nonius.

Nehmen wir einen Mafsstab von genau 9^{mm} Länge und teilen ihn mit der Teilmaschine in 10 genau gleiche Teile, legen ihn dann der Länge nach an unser geteiltes Meter, so dafs er längs des geteilten Randes verschoben werden kann, so ist dieser einfache Apparat ein Nonius. Da die Länge des Mafsstabes 9^{mm} in 10 Teile geteilt ist, so ist der Wert jedes Teilstriches $0{,}9^{mm}$. Der Wert der Teilung unseres Metermafses ist dagegen 1^{mm}. Der Unterschied beider daher

$$1^{mm} - 0^{mm}{,}9 = 0^{mm}{,}1.$$

Es folgt daraus, dafs, wenn die beiden Teilstriche 0 (Fig. 6) zusammenfallen, die beiden Teilstriche 1 um $0{,}1^{mm}$ von einander abstehen,

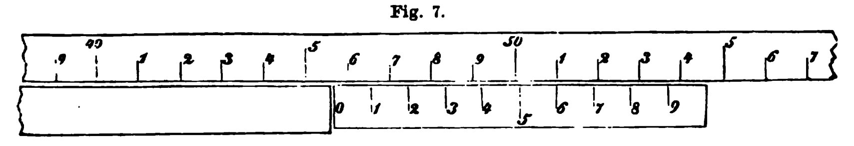
Fig. 6.



die beiden Teilstriche 2 um $0^{mm}{,}2$ u. s. f., bis der Teilstrich 10 des Nonius mit dem Teilstrich 9 des Mafsstabes zusammentrifft. Ähnlich wird es sein, wenn statt der Teilstriche 0 zwei andere Teilstriche auf einander treffen, von diesen aus werden dann die beiden nächsten zu jeder Seite um 1, die folgenden um 2 Zehntel eines Millimeters differieren.

Nehmen wir nun an, man wolle die Länge eines Objektes mit unserm Metermafs bestimmen, und es zeigte sich, dafs es 4^{cm} 5^{mm} und einen Bruchteil eines Millimeters (Fig. 7) lang wäre. Dieser Bruchteil wird dann mittels des Nonius bestimmt.

Fig. 7.



Zu dem Ende führt man den Nonius, bis er das Ende des zu messenden Objektes berührt, und sucht, welcher Teilstrich des Nonius mit einem des Mafsstabes zusammenfällt. In unserer Abbildung ist es der sechste.

Von diesem ausgehend findet man dann, dafs die Teilstriche 5, 4, ... 0 des Nonius um $0^{mm}{,}1$ $0^{mm}{,}2$ . . . . $0^{mm}{,}6$ hinter denen des

Mafsstabes zurückbleiben. Der auszuwertende Bruchteil ist demnach $0^{mm},6$, sein Wert ist in Zehnteilen eines Millimeters angegeben durch die Zahl, welche neben dem mit einem des Mafsstabes zusammenfallenden Teilstrich steht.

Wir haben bei der Beschreibung des Nonius vorausgesetzt, dafs derselbe eine Länge von 9^{mm} habe und in 10 Teile geteilt sei. Dadurch erhielten wir die Teile des Millimeters in Zehnteln angegeben. Wir können nun ebenso gut die Länge desselben zu 19^{mm}, 29^{mm}, 39^{mm} nehmen und diese Länge in 20, 30, 40 Teile teilen; wir erhalten dann Zwanzigstel, Dreissigstel, Vierzigstel eines Millimeters. Wenn man jedoch die Teile zu sehr vervielfältigt, so tritt der Übelstand ein, dafs zur Rechten und Linken der koincidierenden Teilstriche eine Anzahl so wenig von einander abstehender Teilstriche sich findet, dafs sie noch zusammenzufallen scheinen, und man daher nicht imstande ist anzugeben, welche nun eigentlich die koincidierenden Teile sind. Indem man die Teilstriche möglichst fein zieht und dieselben durch ein Mikroskop betrachtet, kann man zwar die Genauigkeit ziemlich weit, vielleicht bis auf 0,01 eines Millimeters bringen; es gibt jedoch immer eine Grenze, welche nicht überschritten werden kann.

Der Nonius kann an allen Teilungen, auch an geteilten Kreisen angebracht werden; dort befindet er sich auf den Alhidaden. Wir werden ihn an allen feineren Mefsapparaten wiederfinden.

Das Sphärometer.

Die Mikrometerschraube dient nicht allein dazu Längen zu teilen, sondern sie findet auch ganz besonders Anwendung, wenn es sich darum handelt, sehr kleine Abstände zu messen. Es folge hier die Beschreibung eines Apparates, in welchem sie benutzt wird, um sehr kleine Höhenunterschiede, z. B. die Dicke von Platten oder Drähten, mit gröfster Genauigkeit zu messen, des Sphärometers.

Der Hauptteil dieses Apparates (Fig. 8) besteht in einer möglichst genau gearbeiteten Mikrometerschraube, deren Gänge die Höhe von $0^{mm},5$ haben. Dieselbe bewegt sich in einer Mutter, welche unten in der Hülse A sich befindet. Die Hülse A ist in dem Arm B unveränderlich befestigt und wird mittels desselben von dem Stativ SSG getragen, welches seinerseits auf dem Dreifufs DD aufgesetzt ist. Um durch dieses Stativ den Apparat nicht einseitig zu belasten, ist bei G an der anderen Seite des Punktes, mit welchem der Rahmen S' S auf den Dreifufs gesetzt ist, ein Gegengewicht angebracht. Der Dreifufs ist mit Stellschrauben versehen, um den Apparat vertikal zu stellen. In der Büchse A befindet sich ein oben hervorragender Stahlstift J, welcher mit sanfter Reibung auf und nieder bewegt werden kann. Wird die Mikrometerschraube in dem einen Sinne gedreht, so hebt sie den Stift J empor, wird sie in dem andern Sinne gedreht, so sinkt der Stift J durch sein eigenes Gewicht herab. Auf den Stift J kann ein kleiner Stahlteller aufgeschraubt werden oder eine ziemlich scharfe Schneide, wie sie die Figur an dem Stifte J' zeigt. Gerade über dem Stifte J ist durch den horizontalen Arm SH ein unten mit einer Schneide versehener Stift J' geführt, welcher in der Durchbohrung des Armes mit sanfter Reibung auf und nieder bewegt werden kann. Auf der oberen Spitze dieses Stiftes ruht

die um eine bei a befestigte Axe drehbare Libelle L. Damit die Libelle auf die Spitze des Stiftes J' nur einen sehr leisen Druck ausübt und so der Stift J' auf den leisesten Druck von untenher emporsteigt, ist auf der andern Seite der Axe a das Gegengewicht c angebracht.

Durch Heben oder Senken des Stiftes J', der mit seiner Schneide auf dem Teller oder der Schneide des untern Stiftes J ruht, kann man somit die eine Seite der Libelle heben oder senken, also immer dafür sorgen, dafs die Libelle genau horizontal steht. Diese horizontale Stellung der Libelle ist das Hülfsmittel, um mit dem Apparate messen zu können.

Fig. 8.



Diese Messung selbst geschieht an der unten am Rahmen S angebrachten Millimeterteilung T und an der Scheibe Z, welche auf ihrem Rande eine Teilung trägt, welche den Umfang der Scheibe in 500 gleiche Teile teilt. Diese Scheibe ist unten an die Mikrometerschraube angeschraubt, so dafs die Axe der Schraubenspindel gleichzeitig die Axe der Kreisscheibe ist. Wie erwähnt, ist die Höhe eines Schraubenganges der Mikrometerschraube ein halbes Millimeter, es bedarf daher zwei Umdrehungen der Schraube, um die Scheibe an der Teilung 1^{mm} zu heben. Die Teilung T ist an dem Apparate so befestigt, dafs jedesmal, wenn die Scheibe einen Teilstrich passiert, der Nullpunkt der Teilung auf der Scheibe an dem Rande der Platte T vorübergeht. Die auf die Teilung T gerichtete Lupe l hat den Zweck, genau zu erkennen, welche Stellung zwischen den Teilstrichen die Scheibe hat.

Aus der Beschreibung des Apparates ergibt sich leicht, wie bei den Messungen verfahren werden mufs. Setzen wir voraus, es solle die Dicke einer planparallelen Glasplatte gemessen werden. Man schraubt auf die Spitze des Stiftes J den kleinen Stahlteller und schraubt die Mikrometerschraube so hoch empor, dafs die Libelle genau horizontal steht. Man liest dann die Stellung der Scheibe Z an der Teilung T ab. Befinde sich der Rand der Scheibe zwischen den Teilstrichen 2 und 3, aber näher an 2, und sei der Teilstrich 325 der auf der Scheibe angebrachten Teilung an dem Rande der Platte T. Da die Höhe der Schraubengänge $0{,}5^{mm}$ ist, so entspricht der Drehung der Schraube um einen Teilstrich ein Heben oder Senken der Mikrometerschraube um $0{,}001^{mm}$.. Die soeben abgelesene Stellung

der Scheibe gibt somit an, dafs, wenn die Libelle genau horizontal steht, und zwischen der Schneide J' und dem Teller J nichts zwischen geschoben ist, dafs dann die Scheibe sich $2{,}325^{mm}$ unter dem Nullpunkte der Teilung T befindet.

Nun wird die Mikrometerschraube und damit der Teller J gesenkt, soweit, dafs man die Glasplatte auf denselben legen kann. Ist das geschehen, so wird die Mikrometerschraube wieder gehoben, bis die Schneide J' von der Glasplatte berührt wird, und dann die Mikrometerschraube vorsichtig weiter gedreht, bis die Libelle wieder genau horizontal steht. Diese Beobachtung beweist dann, dafs die Schneide J' wieder genau dieselbe Höhe hat wie vorhin, die nach oben gewandte Fläche der Glasplatte ist also genau in der Lage, in der vorhin der Teller J war, der Teller J und damit die Scheibe Z ist also genau um die Dicke der Glasplatte niedriger wie vorhin. Wir erhalten also die Dicke der Glasplatte, wenn wir von der jetzt beobachteten Stellung der Scheibe die vorher bestimmte Stellung abziehen. Befinde sich die Scheibe jetzt zwischen dem Teilstriche 3 und 4, aber näher bei 4, und sei der Teilstrich 438 der Scheibe an der Schneide der Platte T. Da die Scheibe näher bei 4 als bei 3 ist, so folgt, dafs sie mehr als $3{,}5^{mm}$ tiefer ist als der Nullpunkt der Teilung, und zwar, da der Teilstrich 438 der Scheibe an der Schneide der Platte T ist, um $0{,}438^{mm}$. Die jetzige Stellung der Scheibe ist also 3,938. Hiervon den vorhin bestimmten Wert 2,325 abgezogen gibt $1{,}613^{mm}$ als Dicke der Glasplatte. Zur Erreichung gröfserer Genauigkeit wird man die Messung einige Male wiederholen. Da man die Libelle nicht absolut genau einzustellen imstande ist, so wird man bei den verschiedenen Messungen einige Teilstriche Differenz finden; man nimmt dann das Mittel aus den gefundenen Zahlen.

Zur Messung von Drähten wendet man an Stelle des Tellers auf dem unteren Stift die Schneide an; man schiebt dann ein kleines Stückchen des zu untersuchenden Drahtes zwischen die Schneiden, indem man im übrigen bei der Messung ganz in der angegebenen Weise verfährt[1]).

Das Kathetometer.

Bei physikalischen Untersuchungen findet man sich oft in die Notwendigkeit versetzt, kleinere oder gröfsere Höhenunterschiede zu messen, besonders von Flüssigkeitssäulen, ohne dafs man an dieselben direkt einen Mafsstab anlegen kann.

Zu diesem Zwecke haben zuerst die französischen Physiker Dulong und Petit einen besondern Apparat konstruiert und bei ihren Versuchen über die Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme zu Messungen benutzt. Später wurde dieser Apparat von Pouillet vergröfsert und Kathetometer genannt.

Das in Fig. 9 und 10 abgebildete Kathetometer ist nach der ihm von Staudinger gegebenen Form konstruiert, nur die Anbringung des Fernrohrs Fig. 10 weicht von der von Staudinger gewählten Anordnung etwas ab. Das der Beschreibung zu Grunde liegende Exemplar ist vom Mechaniker Schubart in Gent verfertigt.

Die wesentlichen Bestandteile des Apparates sind ein vertikaler Mafsstab, an dem ein horizontales Fernrohr auf und ab geschoben werden kann.

---

[1]) Sphärometer der beschriebenen Form sind in vortrefflicher Ausführung der *Werkstatt von Hermann & Pfister* in Bern zu beziehen.

Man stellt zu den Messungen das Fernrohr auf die Kuppen der beiden Flüssigkeitssäulen ein, und die beiden Stellungen des Fernrohres am Mafsstab geben die Höhendifferenz der beiden Flüssigkeitssäulen.

So vorzüglich der Apparat ist, wenn er richtig geordnet ist, so unrichtige Resultate kann er andernfalls liefern, deshalb wird es gut sein, ihn etwas genauer zu beschreiben.

Fig. 9.

Auf einem massiven eisernen, mit drei Stellschrauben *SS* versehenen Fufs *F* (Fig. 9) steht eine vertikale stählerne Axe; sie ist bei *L* sichtbar, wo die Messinghülle in der Zeichnung fortgenommen ist. Um diese kann sich ein hohler Messingcylinder *HH'* frei drehen. Um die Drehung leicht zu machen, ist derselbe oben bei *H* von einer stählernen Schraube durchsetzt, welche oben auf der stählernen Axe aufsteht; durch gelindes Anziehen der Schraube kann man bewirken, dafs die Reibung an dem unteren Ende der Hülse, wo sie auf einen den Fufs umgebenden Reif sich stützt, sehr gering ist, indem die Hülse dann fast ganz von der Schraube getragen wird. An der Hülse ist nun einerseits der Mafsstab *AB* der Axe genau parallel, an der andern Seite ein den Mafsstab als Gegengewicht balancierender massiver Messingcylinder *GG'* befestigt. Der Mafsstab besteht aus einem Prisma von Gufsstahl, dessen Seiten in einer Breite von 8^{mm} möglichst glatt gehobelt, dann aber stark ausgehöhlt sind. Der Mafsstab ist wie das Gegengewicht oben und unten an der Hülse befestigt. Die Basis des Prismas, die vordere Seite ist ebenfalls glatt abgehobelt. In der Mitte derselben ist ein Silberstreifen eingesetzt, von $1^{m},1$ Länge und 8^{mm} Breite. Derselbe ist 1^{m} lang in Millimeter geteilt.

Auf den glattgehobelten und geschliffenen Seitenflächen des Prismas gleitet ein Schlitten *de*, von welchem Fig. 10 eine vergröfserte Abbildung gibt, auf und ab, welcher das Fernrohr mit Zubehör trägt. Der Schlitten besteht aus zwei Teilen, welche in der Zeichnung mit *d* und *e* bezeichnet sind. Derselbe gleitet mit sanfter Reibung, die durch etwas Öl noch vermindert wird, an dem Prisma ganz regelmäfsig und ohne Schwankung auf und ab.

Fig. 10.

Der obere Teil des Schlittens *d* ruht mit einem kleinen Stahlfortsatz auf dem obern Ende der im untern Teile des Schlittens in einer Mutter gehenden Mikrometerschraube *m* und wird durch eine elastische Feder von Stahl stets fest an dasselbe angedrückt.

Durch eine Klemmschraube *q*, welche ein der Seite des Prismas angepafstes Messingstück gegen das Prisma drückt, kann man den Schlitten festhalten. Mittels der Mikrometerschraube *m* kann dann der obere Teil des Schlittens noch etwas gehoben oder gesenkt werden, um eine möglichst feine Einstellung des Fernrohrs auf das Beobachtungsobjekt zu erzielen.

Im Schlitten ist ein abgeschrägter Ausschnitt über dem Buchstaben *d*, dessen eine Seite mit einem Nonius versehen ist, der gerade an der Teilung des Silberstreifens anliegt. Die Stellung des Schlittens an der Skala liest man durch eine Lupe *l* (Fig. 9) ab; der Nonius gibt direkt $0{,}02^{mm}$.

Das Fernrohr *CD* ruht in den genau cylindrisch ausgedrehten Gabeln *r* und *r'* und wird dort mit gelindem Druck durch zwei zur Seite zu schlagende Schieber festgelegt. Dort, wo das Fernrohr auf den Gabeln aufliegt, hat dasselbe zwei genau cylindrisch abgedrehte Verdickungen. Auf diesen Verdickungen ruhen die unten genau ebenso cylindrisch ausgedrehten Füfse der Libelle *N*, welche durch dieselben Schieber, die das Fernrohr festlegen, durch einen schwachen seitlichen Druck festgehalten werden.

Die beiden das Fernrohr tragenden Gabeln sind durch eine schmale Messingplatte mit einander verbunden, welche von der in dem Schlitten befestigten und dort gerade vor der Teilung befindlichen Axe *a* getragen wird und um diese Axe in einer der Ebene der Teilung parallelen Ebene drehbar ist. Diese Drehung, durch welche das Ende *C* des Fernrohres etwas gehoben oder gesenkt werden kann, wird durch die kleine Schraubenmutter *s* bewirkt. Zu dem Zwecke ist bei *b* nahe dem einen Ende der das Fernrohr tragenden Platte *bc* an diese eine Mikrometerschraube *bs* angesetzt, welche durch eine Durchbohrung des an dem Schlitten unveränderlich fest verbundenen Armes *A* hindurchgeführt ist. Schraubt man die Mutter *s* in

dem einen Sinne, so wird dadurch die Mikrometerschraube und damit das Ende C des Fernrohrs herabgezogen; schraubt man die Mutter in dem andern Sinne, so läfst sie die Mikrometerschraube eine Strecke frei, und eine Feder f hebt dann die Schraube und damit das Ende C des Fernrohrs, bis die Mutter s wieder an der untern Fläche des Armes A anliegt. Der Zweck dieser Vorrichtung wird sofort hervortreten.

Nach der Beschreibung der Einrichtung unseres Mefsapparates haben wir noch einiges zu bemerken über die Art, wie er zu regulieren ist.

Das Fernrohr ist ein optischer Apparat, den wir später zu beschreiben haben. Hier müssen wir nur erwähnen, dafs es in seinem Innern zwei unter einem rechten Winkel gekreuzte Spinnfäden besitzt, ein sogenanntes Fadenkreuz, welches man stets zugleich mit dem Objekt, auf welches das Fernrohr eingestellt ist, genau sieht. Man kann leicht bewirken, dafs der Kreuzungspunkt der Fäden den zu fixierenden Punkt deckt. Es gibt nun in jedem Fernrohr eine festbestimmte Linie, die optische Axe, welche durch den Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes und durch den Mittelpunkt des Objektives geht. Wenn der Mittelpunkt des Fadenkreuzes den zu fixierenden Punkt deckt, so kann man sicher sein, dafs der fixierte Punkt in der Verlängerung der optischen Axe liegt.

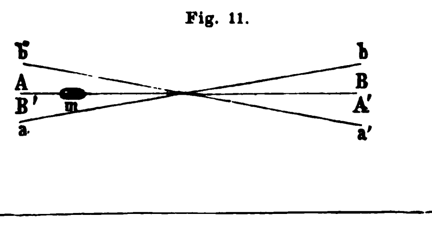
Die Gabel, in welcher das Fernrohr liegt, sowie das Fernrohr selbst, sind genau cylindrisch gearbeitet. Dreht man daher das Fernrohr in seinen Lagern um sich selbst, so kann seine geometrische Axe nicht geändert werden, es darf aber auch seine optische Axe dadurch nicht geändert werden, d. h. sie mufs genau mit der geometrischen Axe zusammenfallen. Sieht man bei der Drehung des Fernrohrs nach und nach verschiedene Punkte in den Mittelpunkt des Fadenkreuzes fallen, so ist das nicht der Fall; dann mufs man die optische Axe korrigieren, d. h. das Fadenkreuz so lange regulieren, bis bei einer Drehung des Fernrohrs um sich selbst stets derselbe Punkt von seinem Kreuzungspunkte bedeckt wird. Will man dann die Lage der optischen Axe korrigieren, so hat man nur die der geometrischen zu regulieren, da nach dieser Korrektion beide zusammenfallen.

Nachdem also die Fernrohraxe korrigiert ist, hat man vor Gebrauch des Kathetometers

1) dafür zu sorgen, dafs die Libelle der Axe des Fernrohrs parallel ist;
2) die Axe des Fernrohrs genau senkrecht zu dem Mafsstab zu stellen;
3) die Rotationsaxe des Kathetometers und damit den Mafsstab AB vertikal zu stellen.

Um die erste Bedingung zu prüfen, ist die Libelle auf die cylindrisch abgedrehten Verdickungen des Fernrohrs mit den ebenso genau ausgedrehten Füfsen einfach aufgesetzt, so dafs sie abgenommen und wieder in umgekehrter Lage hingestellt werden kann, so dafs das vorher nach D zeigende Ende jetzt nach C zeigt, und umgekehrt. Sei nun XY die Fernrohraxe und stelle AB (Fig. 11) die Libelle vor, deren Luftblase bei m stehe.

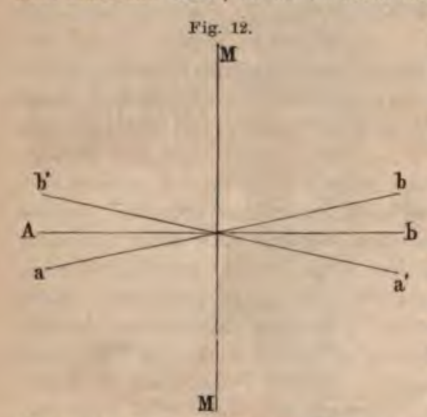
Fig. 11.



Wird nun die Libelle in der angegebenen Weise umgesetzt, und ist sie der Fernrohraxe in der That parallel, so kehrt sich dieselbe blos um, in ihrer zweiten Lage die erste deckend; sie mufs wieder in $A' B'$ liegen. Die Luftblase mufs dann wieder genau so liegen wie früher, sie darf gegen den Beobachter ihre Lage nicht geändert haben. Hatte dagegen die Libelle die Lage ab, so hat sie nach der Umstellung die Lage $a' b'$, und die Luftblase würde ihre Lage geändert haben. Durch Drehung einer Schraube, welche das eine Ende der Libelle in ihren Lagern hebt und senkt, wird sie in dem letztern Falle korrigiert, bis eine Umstellung die Lage der Luftblase nicht mehr ändert.

Um die zweite Bedingung zu prüfen, hat man dem Instrument nur eine Drehung um 180° zu erteilen. Ist das Fernrohr AB (Fig. 12) senkrecht zum Mafsstab MM, so ist es nach der Drehung sich selbst parallel, es mufs also die Lufblase in Bezug auf den Beobachter dieselbe Lage beibehalten haben. Steht das Fernrohr nicht senkrecht, sondern etwa parallel ab, so hat es nach der Drehung die Lage $a' b'$, und die Luftblase der Libelle mufs ihre Stellung geändert haben. Ist das der Fall, so wird durch Drehung der Schraubenmutter s das eine Ende des Fernrohrs soviel gehoben oder gesenkt, bis die Drehung des Instrumentes um 180° die Stellung der Libellenblase nicht mehr ändert.

Fig. 12.



Diese Korrektion genügt es nicht ein für allemal vorzunehmen; denn auch bei den bestgearbeiteten Apparaten kann der Schlitten nicht immer vollkommen in der gleichen Weise an das Prisma angeprefst werden, und deshalb ist das Fernrohr nicht an allen Stellen sich genau parallel. Hat man deshalb in gleich zu beschreibender Weise den Mafsstab vertikal gestellt, mufs man, wenn die Lage der Luftblase bei irgend einer Stellung des Schlittens anzeigt, dafs das Fernrohr nicht mehr genau horizontal steht, durch Drehung der Mutter s das Fernrohr in die horizontale Lage zurückführen.

Um die dritte Regulierung, das Vertikalstellen der Rotationsaxe des Instrumentes vorzunehmen, stellt man das Fernrohr der Verbindungslinie zweier Stellschrauben des Fufses parallel, und dreht eine oder beide Stellschrauben so lange, bis die Blase der Libelle in der Mitte steht; darauf dreht man den Apparat um 90° und bringt durch Drehung der dritten Schraube die Blase ebenfalls in die Mitte. Hat man auf diese Weise die Fernrohraxe in zwei auf einander senkrechten Richtungen horizontal gestellt, so ist sie es in allen, und die zur Fernrohraxe senkrechte Rotationsaxe und somit auch der Mafsstab des Apparates stehen vertikal.

Der Theodolith.

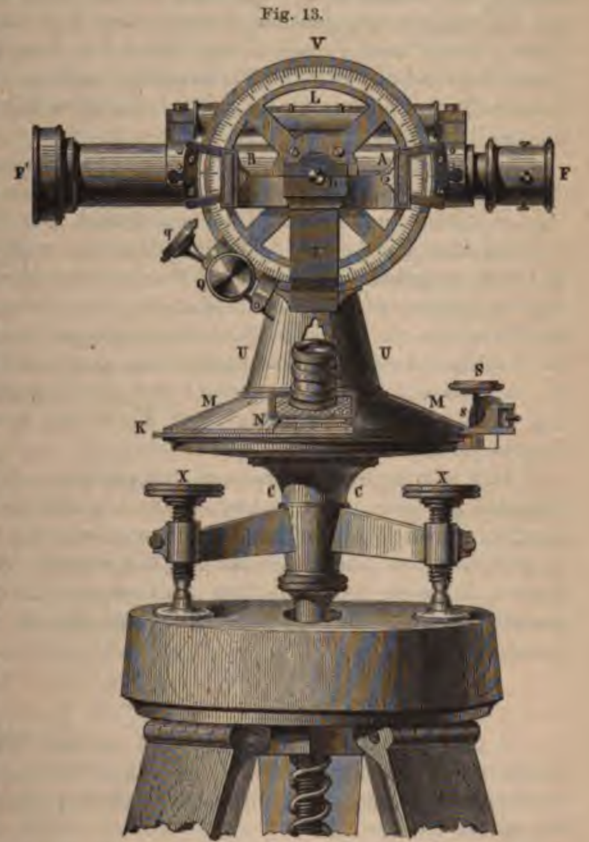
Aufser der Abmessung von Längen haben wir, besonders in dem *hen Teile der* Physik, häufig genaue Winkelmessungen auszuführen.

Dieselben werden mittels des Theodolithen angestellt. Der Theodolith ist ein in geringerer oder gröſserer Vollkommenheit schon sehr lange bekanntes Winkelmeſsinstrument, dessen erster Verfertiger ebenso unbekannt ist als die eigentliche Bedeutung des Namens. Man hat zwar seinen Namen aus dem Griechischen herleiten wollen, doch ist die Ableitung ebenso unbestimmt als gezwungen.

Der Theodolith ist ein Winkelmeſsinstrument, welches aus zwei geteilten Kreisen, einem horizontalen und einem vertikalen, mit Fernrohr besteht.

Nachfolgender Zeichnung (Fig. 13) und Beschreibung liegt ein Exemplar aus der Werkstätte mathematischer Apparate von Breithaupt in Kassel zu Grunde.

Fig. 13.



Auf einem massiven, mit Stellschrauben *X* versehenen Dreifuſs *CC* befindet sich ein Kreis von Messing *K*, der mittels Speichen in dem Mittelstücke des Dreifuſses befestigt ist. Auf dem Kreise ist ein silberner, mit einer genauen Kreisteilung versehener Streifen eingelegt. Mit diesem Kreise in gleicher Ebene und genau centriert liegt ein kleiner Kreis, dessen äuſserer Umfang genau den innern Rand des Kreises *K* berührt. Derselbe ist um eine durch seinen Mittelpunkt gehende, im Mittelpunkt des Dreifuſses genau eingeschliffene Axe, mit welcher er durch Speichen verbunden ist, drehbar. Der Kreis heiſst der Alhidadenkreis. An den beiden Enden eines Durchmessers besitzt der Alhidadenkreis Nonien *N*, welche je nach der Teilung des Kreises halbe Minuten oder noch kleinere Bruchteile von einem Grade geben. An demselben Kreise sind über den Nonien kleine Mikroskope befestigt zur genaueren Ablesung. Der Alhidadenkreis kann mittels der Klemmschraube *S* festgestellt werden, an der zur feineren Einstellung des Kreises die Mikrometerschraube *s* angebracht ist.

An einer Säule *UU*, welche auf dem Alhidadenkreis festgeschraubt ist,

befindet sich das Fernrohr FF'. Die optische Axe des Fernrohrs wird von der mit der Axe des Alhidadenkreises zusammenfallenden Drehungsaxe der Säule U geschnitten. Das Fernrohr selbst ist an einer auf seiner optischen Axe senkrechten Axe D befestigt, welche in zwei Zapfenlagern drehbar eingelegt ist. Die Axe D ist genau dem Horizontalkreis parallel. Auf dem Fernrohr befindet sich eine Libelle L. An dem Fernrohr in unveränderlich fester Verbindung und auf der Drehungsaxe D desselben senkrecht ist der Vertikalkreis V angebracht. Zu beiden Seiten des Kreises, an den Enden eines Durchmessers, befinden sich feste, nicht drehbare Nonien A und B. Den Nullpunkten der Nonien entsprechend sind auf der Teilung des Vertikalkreises zwei Nullpunkte, von denen aus die Teilung nach beiden Seiten von 0—90^0 fortzählt. Die optische Axe des Fernrohrs mufs mit dem durch die Nullpunkte angegebenen Durchmesser des Vertikalkreises zusammenfallen. Dreht man Fernrohr samt Kreis, so liest man an den Nonien die Gröfse der Drehung ab. Der Vertikalkreis kann durch die Klemmschraube Q festgestellt und mittels der an dieser befestigten Mikrometerschraube q feiner eingestellt werden.

Der ganze Apparat steht auf einem massiven Stativ, an welchem er mittels einer Schraube und einer Spiralfeder befestigt ist.

Will man nun mittels des Theodolithen z. B. die Winkeldistanz zweier in einer Horizontalebene befindlicher Punkte nehmen, so hat man das Instrument zunächst in ähnlicher Weise wie das Kathetometer zu regulieren, und zu prüfen, ob die Libelle parallel dem Fernrohr ist, ob die Drehaxe des Fernrohrs zur optischen Axe senkrecht und mit dieser in einer zur Axe des Alhidadenkreises senkrechten Ebene liegt, und dann, ob die Drehungsaxe des Alhidadenkreises senkrecht zum Horizontalkreis ist. Dann hat man den Horizontalkreis horizontal und damit die Rotationsaxe des Vertikalkreises vertikal zu stellen[1]).

Hat man so das Instrument vorbereitet, so stellt man das Fernrohr zunächst auf den einen Punkt ein und merkt den Stand der Nonien am Horizontalkreise. Darauf verfährt man ebenso mit dem andern Punkte, und die Differenz der Nonienangaben gibt die gesuchte Winkeldistanz. Die beiden Nonien N geben jedesmal zwei Ablesungen, also auch zwei sich kontrolierende Werte, die zugleich zum Eliminieren etwaiger Teilungsfehler dienen.

Aufser Längen und Winkel sind es nun vorzüglich noch Gewichte, welche wir in der Physik zu messen haben. Dieses geschieht mit der Wage, deren Beschreibung und Gebrauch wir aber erst an einer andern Stelle vorführen können.

---

[1]) Eine vorzügliche Zusammenstellung aller Korrektionen am Theodolithen gibt *Bauernfeind*, „Elemente der Vermessungskunde“ Bd. I.

Einige Sätze aus der Differential- und Integralrechnung.

Differentiation.

Wir haben bei Besprechung der in der Physik anzuwendenden Methode die Bedeutung der Mathematik hervorgehoben, indem dieselbe nicht nur dazu dient, die physikalischem Gesetze in kurzer Form auszusprechen, sondern auch dazu, aus diesen Gesetzen weitere Folgerungen abzuleiten. Ganz besonders dient zu diesen Entwicklungen die Differential- und Integralrechnung, so dafs man bei einer vollständigen Darlegung auch der experimentellen Physik dieses Hülfsmittel nicht ganz entbehren kann. Da wir nicht bei allen Lesern dieses Buches die Vertrautheit mit diesen Rechnungsoperationen voraussetzen dürfen, wollen wir an dieser Stelle die Grundbegriffe dieser Methoden kurz darlegen, soweit wir sie später unumgänglich nötig haben. Unsere späteren Entwicklungen gewinnen dadurch an Kürze und Übersichtlichkeit, da wir dann nicht genötigt sind in jedem einzelnen Falle die erforderlichen Ableitungen zu machen, sondern auf diese Stelle verweisen können.

Die physikalischen Gesetze geben uns eine Gleichung zwischen den eine Erscheinung bedingenden veränderlichen Gröfsen, so dafs also, wenn der Wert der einen, die wir in der Regel willkürlich ändern können, gegeben ist, die andere nach dieser Gleichung berechnet werden kann. Als Beispiel führten wir das Reflexionsgesetz an, der Zurückwerfungswinkel ist stets dem Einfallswinkel gleich; nennen wir erstern y, letztern x, so ist das Gesetz dargestellt durch die Gleichung

$$y = x.$$

Die Gleichung gibt somit für jeden Wert, den wir x willkürlich beilegen, den zugehörigen Wert von y. Andere Gesetze werden durch andere Beziehungen gegeben, wir werden Beziehungen finden wie $y = ax^2$, $x \cdot y = a$, $y = \sin ax$ u. a. m., wenn immer y die Gröfse bedeutet, welche bestimmt werden soll, und die Gröfse, von der sie abhängt, gleich x gesetzt wird, und aufserdem a irgend eine konstante Gröfse bedeutet. Allgemein deutet man bekanntlich irgend eine Beziehung zwischen zwei solchen veränderlichen Gröfsen durch das Zeichen

$$y = f(x)$$

an und nennt y eine Funktion von x.

In vielen Fällen ist es uns nun von der gröfsten Bedeutung, die Änderung angeben zu können, welche y erfährt, wenn sich x um eine verschwindend kleine Gröfse ändert, das heifst um eine Gröfse, die kleiner ist als jeder angebbare Wert. Man nennt diese Änderungen die Differentialien von y und x und bezeichnet sie mit dy und dx, den Quotienten aus diesen beiden Differentialien, oder $\frac{dy}{dx}$ nennt man den Differentialquotienten von y nach x.

Die Berechnung dieser Gröfsen ergibt sich unmittelbar aus dem Begriff der Funktion, dafs sie jeden Wert von y darstellt, wenn der zugehörige Wert von x gegeben ist. Ist y der Wert für irgend einen Wert von x, so

können wir den dem Werte $x + dx$ zugehörigen Wert mit $y + dy$ zeichnen, und erhalten dann

$$y + dy = f(x + dx)$$
$$dy = f(x + dx) - f(y); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Es sind nur die durch das Funktionszeichen $f(x)$ angedeuteten R nungen auszuführen. Nehmen wir z. B. die Funktion $y = ax^2$, so die Rechnung folgende:

$$y + dy = a(x + dx)^2 = ax^2 + 2axdx + dx^2$$
$$dy = 2axdx + dx^2.$$

Da nun der Voraussetzung nach schon dx einen verschwindend kl Wert hat, so ist $dx \cdot dx$ selbst gegen dx verschwindend klein, so daſs es gleich Null setzen dürfen, und damit wird

$$dy = 2axdx; \quad \frac{dy}{dx} = 2ax.$$

Dieses Beispiel läſst zugleich erkennen, daſs wenn auch dy einen schwindend kleinen Wert hat, doch der Differentialquotient, also der tient aus den beiden verschwindend kleinen Gröſsen dy und dx einen bestimmten Wert hat, und zwar um so genauer, je näher wir uns d Null denken. Denn die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + dx$$

gilt für jeden selbst endlichen Wert von dx; lassen wir aber dx im näher und näher gleich Null werden, so nähert sich der Quotient i mehr dem Werte $2ax$; lassen wir also dx kleiner werden als jede a bare Gröſse, so unterscheidet sich auch der Quotient $\frac{dy}{dx}$ von $2ax$ weniger als jede angebbare Gröſse, das heiſst er nimmt diesen Wert

Ehe wir nun dazu übergehen, die wichtigsten der uns später bege den Differentialien abzuleiten, wollen wir zunächst einige allgemeine angeben, welche uns dabei dienen werden.

I. Ist die Funktion von x, der y gleich ist, eine Summe meh Glieder, so ist dy gleich der Summe der Differentialien der einzelnen Gl und der Differentialquotient der Summe gleich der Summe der Differe quotienten der einzelnen Glieder. Es folgt das unmittelbar aus den griffe der Summe, nach welchem die Veränderung einer Summe glei der Summe der Veränderungen der einzelnen Summanden.

Hieraus folgt sofort, daſs wenn in dieser Summe ein Glied vorko welches konstant ist, also sich nicht ändert, wenn x sich ändert, Glied in dem Differential nicht vorkommt, oder wie man sich kurz drückt, das Differential einer konstanten Gröſse ist gleich Null.

Ist z. B.

$$y = ax^2 + b,$$

so ist

$$y + dy = a(x + dx)^2 + b$$
$$dy = a(x + dx)^2 + b - ax^2 - b = 2axdx.$$

II. Ist y gleich dem Produkte zweier Funktionen von x, so erhalten wir allgemein das Differential in folgender Weise. Seien die beiden Funktionen mit u und v bezeichnet, also $y = u \cdot v$. Wenn sich dann x um dx ändert, wird u in $u + du$ und v in $v + dv$ verwandelt, es wird also

$$y + dy = (u + du)(v + dv) = uv + udv + vdu + dudv.$$

Da nun auch hier das letzte Glied wieder verschwindend klein ist, so wird

$$dy = udv + vdu; \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Es ist somit jede Funktion mit dem Differential resp. dem Differentialquotienten der andern Funktion zu multiplicieren und diese Produkte sind zu addieren.

III. Aus dem soeben abgeleiteten Satze erhalten wir auch unmittelbar das Differential oder den Differentialquotienten eines Quotienten zweier Funktionen. Ist

$$y = \frac{u}{v},$$

so können wir auch setzen

$$y \cdot v = u$$

$$ydv + vdy = du,$$

somit wird

$$dy = \frac{du - ydv}{v}$$

und ersetzen wir auf der rechten Seite wieder y durch seinen Wert

$$dy = \frac{du - \frac{u}{v}dv}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Das Differential, resp. der Differentialquotient eines Quotienten ist gleich dem Produkte aus dem Nenner und dem Differential resp. Differentialquotienten des Zählers, minus dem Produkte aus Zähler und dem Differential resp. Differentialquotienten des Nenners, die Differenz dividiert durch das Quadrat des Nenners.

Wir werden diese Sätze, wenn wir später darauf hinweisen, stets mit E I, E II, E III bezeichnen.

Differentiale der wichtigsten Funktionen.

Wir leiten jetzt die Differentiale der Funktionen, welche uns vorzugsweise bei unseren physikalischen Untersuchungen vorkommen werden, kurz ab.

Um das Differential einer Potenz

$$y = x^n$$

zu erhalten, haben wir nur $(x + dx)^n$ nach dem binomischen Satze zu entwickeln

$$(x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \cdots\cdot$$

Unter Beachtung, dafs alle höheren Potenzen von dx gegen die erste zu vernachlässigen sind, wird

$$1 \cdots\cdots\cdots\cdots \quad dy = nx^{n-1}dx; \quad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Da der binomische Satz für jeden beliebigen Wert von n, positiv oder negativ, ganz oder gebrochen gilt, so gilt dieser Differentialausdruck ebenfalls für jeden Wert von n.

Das Differential des Ausdruckes

$$y = \log x$$

erhalten wir durch Entwicklung von $\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$ in eine Reihe, denn es ist

$$dy = \log(x + dx) - \log x = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right).$$

Ist der Logarithmus ein natürlicher, der auf die Grundzahl $e = 2{,}71828\ldots$ bezogen ist, so ist

$$\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{dx^3}{x^3} - \cdots + \cdots$$

Ist der Logarithmus in einem andern System genommen, so mufs die Reihe auf der rechten Seite mit dem in diesem System genommenen $\log e$ multipliciert werden. Es folgt dann ganz allgemein

$$2 \cdots\cdots\cdots \quad dy = d\log x = \frac{dx}{x}\cdot\log e; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\log e.$$

Aus dem Differential des Logarithmus erhalten wir sofort das Differential der Exponentialfunktion

$$y = a^x.$$

Es ist

$$\log y = x \cdot \log a$$

$$\log(y + dy) = (x + dx)\log a$$

$$\frac{dy}{y}\cdot\log e = dx \log a,$$

somit

$$3 \cdots\cdots \quad dy = y \cdot dx\,\frac{\log a}{\log e} = a^x dx\,\frac{\log a}{\log e}; \quad \frac{dy}{dx} = a^x\,\frac{\log a}{\log e}.$$

Wird $a = e$ gleich der Basis des natürlichen Logarithmensystems gesetzt, so wird

$$3a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad dy = e^x dx \quad \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Der Differentialquotient der Exponentialfunktion mit der Basis e ist somit der Funktion selbst gleich.

Für das Differential der trigonometrischen Funktion

$$y = \sin x$$

erhalten wir zunächst

$$dy = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx - \sin x$$
$$= \sin x(\cos dx - 1) + \cos x \sin dx.$$

Für ein verschwindendes dx ist nun $\cos dx = 1$ und $\sin dx$ gleich dem Bogen dx selbst zu setzen, damit wird

$$4 \cdots\cdots \quad dy = d \sin x = \cos x \cdot dx; \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Ganz in derselben Weise wird

$$5 \cdots\cdots \quad dy = d \cos x = -\sin x \cdot dx; \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

Die Differentiale von $y = \operatorname{tang} x$ erhalten wir durch Anwendung des Satzes E III. Wir schreiben

$$y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$dy = \frac{\cos x \; d \sin x - \sin x \; d \cos x}{\cos^2 x}$$

$$6 \cdot\cdot \quad dy = d \operatorname{tang} x = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ganz in derselben Weise erhält man

$$7 \cdots\cdots \quad dy = d \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Aus den Differentialen der trigonometrischen Funktionen ergeben sich auch sofort jene der cyklometrischen Funktionen. Ist nämlich

$$y = \sin x,$$

so ist

$$x = \operatorname{arc} (\sin = y).$$

Die Zunahme des Bogens x, wenn der Sinus um dy wächst, ergibt sich nun aus (4)

$$dy = \cos x \, dx$$

$$dx = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dy}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Setzen wir also, um das Zeichen x für die gegebene willkürlich veränderliche Gröfse beizubehalten

$$y = \operatorname{arc} (\sin = x),$$

so wird

$$8 \cdots \quad dy = d \operatorname{arc} (\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ebenso wird

$$9 \cdot\cdot \quad dy = d \operatorname{arc} (\cos = x) = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$10 \cdot \quad dy = d \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = x) = \frac{dx}{1 + x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$11 \cdot \quad dy = d \operatorname{arc} (\cot = x) = -\frac{dx}{1 + x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Bei einem Hinweis auf die hier entwickelten Ausdrücke werden wir dieselben stets mit E 1, E 2 .... bezeichnen.

Differentiation zusammengesetzter Funktionen.

Es wird uns mehrfach der Fall vorkommen, dafs die Funktionen, zu denen wir bei den physikalischen Untersuchungen gelangen, zusammengesetzte sind, dafs also innerhalb des Funktionszeichens log, sin, etc. selbst noch wieder eine Funktion steht. Sei uns also z. B. der Ausdruck gegeben $y = \log u$, und sei nun u wieder eine Funktion von x, etwa gleich $\sin x$. Wir erhalten dann zunächst unter Beachtung, dafs jedenfalls y um dy wächst, wenn u um du zunimmt, nach E 2

$$dy = \log e \frac{du}{u}.$$

Die Zunahme von $u = \sin x$ oder du, wenn x um dx wächst, ist dann nach E 4

$$du = \cos x \, dx;$$

setzen wir diesen Wert von du in die Gleichung für dy ein, so wird

$$dy = \log e \frac{\cos x}{\sin x} dx; \quad \frac{dy}{dx} = \log e \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Da nun

$$\log e \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{dy}{du}; \quad \cos x = \frac{du}{dx},$$

so ist der für $\frac{dy}{dx}$ erhaltene Ausdruck gleich

$$\text{IV} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Wir leiten daraus die allgemeine Regel ab, die wir bei späterer Benutzung stets mit E IV bezeichnen, dafs wir bei solchen zusammengesetzten Funktionen zunächst den Differentialquotienten so zu bilden haben, als wenn die Funktion u eine einfache veränderliche Gröfse wäre, und dann diesen Quotienten mit dem Differentialquotienten der Funktion u nach x multiplicieren müssen. Da nun das Differential eines Ausdrucks gleich ist dem Differentialquotienten multipliciert mit dem Differential der gegebenen veränderlichen Gröfse, so wird

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx.$$

Unter Anwendung dieser Regel erhalten wir z. B. sofort

$$\frac{d a^{\sqrt{x}}}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Denn setzen wir zunächst

$$y = a^{\sqrt{x}} = a^u,$$

so ist nach E 3

$$\frac{dy}{du} = \frac{\log a}{\log e} a^u.$$

Da nun $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, so ist nach E 1

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^{\sqrt{x}}}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Differentiation von Funktionen mit mehreren Veränderlichen.

Bisher haben wir vorausgesetzt, dafs wir nur zwei veränderliche Gröfsen haben, eine x, der wir willkürlich jeden Wert beilegen können, und die zweite y, welche als Funktion von x bestimmt wird. Wenn auch vorwiegend, so kommen uns später doch nicht lediglich solche einfachere Gleichungen zur Behandlung; in manchen Fällen hängt die zu bestimmende Gröfse von zwei oder drei Gröfsen ab, die wir willkürlich ändern können. So z. B. werden wir später finden, dafs der Raum, den eine gegebene Quantität eines Gases ausfüllt, abhängig ist von dem Drucke, unter welchen wir dasselbe bringen, und von der Temperatur, welche wir demselben erteilen. Wir können Druck und Temperatur beliebig wählen; erst wenn beide gegeben sind, ist das Volumen des Gases bestimmt. Sei nun wieder die zu bestimmende Gröfse gleich y gesetzt, und dieselbe durch die beiden willkürlich zu ändernden Gröfsen x und z bestimmt. Der allgemeine Ausdruck dieser Abhängigkeit ist dann

$$y = f(x, z).$$

Nach dem Begriffe des Differentials ist dann

$$dy = f(x + dx, z + dz) - f(x, z).$$

Die so eintretende Änderung von y können wir auch als die Summe der beiden Änderungen auffassen, wenn sich erstens nur x um dx ändert, während z konstant bleibt, und sich zweitens z um dz ändert, wenn x konstant bleibt, also setzen

$$dy = \{f(x + dx, z) - f(x, z)\} + \{f(x, z + dz) - f(x, z)\}$$

Die in der ersten Klammer eingeschlossenen Glieder sind das Differential von y, wenn es nur eine Funktion von x wäre, die in der zweiten dasjenige, wenn es nur eine Funktion von z wäre. Da wir nun das Differential einer Funktion auch als das Produkt des Differentialquotienten in das Differential der veränderlichen Gröfse schreiben können, so schreibt man

$$f(x + dx, z) - f(x, z) = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx; \quad f(x, z + dz) - f(x, z) = \frac{\partial y}{\partial z} dz,$$

worin man das Zeichen ∂ anstatt d wählt, um anzudeuten, dafs bei Bildung dieses Differentialquotienten nur die Gröfse als veränderlich betrachtet wird, deren Differential im Nenner steht. Man nennt die so gebildeten Differentialquotienten die partiellen Differentialquotienten jedesmal nach der Gröfe, die bei Bildung derselben als veränderlich genommen wird. Für das

Differential dy, das sogenannte totale Differential der Funktion erhalten wir dann

$$\text{V} \quad dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz.$$

Die Regel zur Berechnung dieses Differentials ist somit folgende: Wir berechnen zunächst die Differentiale der Funktion, wie wenn jedesmal nur eine der veränderlichen Gröfsen veränderlich wäre, und addieren dann diese einzelnen Differentiale zusammen.

Ganz dieselbe Regel liefert uns, wie man durch die gleichen Überlesungen erkennt, das Differential einer Funktion von drei Veränderlichen. Sei

$$r = f(x, y, z),$$

so ist

$$\text{VI} \quad dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz.$$

Um nach dieser Regel ein Beispiel durchzuführen, sei

$$y = \sqrt{x^2 + z^2} = (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach E IV setzen wir zunächst $x^2 + z^2 = u$, dann wird zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Da nun bei dieser Differentiation in u nur x veränderlich, z als konstant zu betrachten ist, so ist $\partial u = 2x\partial x$, somit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{2} (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x.$$

Ganz ebenso wird

$$\frac{\partial y}{\partial z} = (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} z$$

und darnach

$$dy = \frac{x dx + z dz}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Es wird hiernach nicht nötig sein noch ein specielles Beispiel für eine Funktion aus drei Veränderlichen zu berechnen, da die einzelnen Rechnungen genau dieselben sind, wie bei den Funktionen mit zwei Veränderlichen.

Zweiter Differentialquotient.

Schliefslich haben wir noch zu erwähnen, dafs in vielen Fällen aufser dem bisher besprochenen Differential und Differentialquotienten, welche man als erste bezeichnet, noch die zweiten Differentiale und Differentialquotienten von Funktionen bei unseren Untersuchungen vorkommen werden. Das zweite Differential ist in folgender Weise definiert. Das erste Differential einer Funktion von einer Veränderlichen erhielten wir durch die Gleichung

$$y + dy = f(x + dx).$$

Setzen wir jetzt $y + dy = y_1$ und lassen jetzt x noch einmal um dieselbe Gröfse dx wachsen, so wird

$$y_1 + dy_1 = f(x + 2dx).$$

Die beiden Zunahmen dy_1 und dy sind nun im allgemeinen verschieden, und ihre Differenz

$$dy_1 - dy = d^2y$$

nennt man das zweite Differential der Funktion; dasselbe ergibt sich durch Ausführung der hier angedeuteten Rechnungen

$$d^2y = \{f(x + 2dx) - f(x + dx)\} - \{f(x + dx) - f(x)\}.$$

Als zweiten Differentialquotienten bezeichnet man dann den Quotienten aus dem zweiten Differential und dem Quadrate von dx.

Wir bemerken hier gleich, dafs die Werte dy_1 und dy nur um eine Gröfse verschieden sein können, welche gegen die Veränderungen dy_1 und dy selbst verschwindend klein sein mufs, oder die zweiten Differentiale sind gegen die ersten verschwindend klein. Daraus folgt dann, dafs der zweite Differentialquotient, der Quotient aus dem zweiten Differential und dem gegen dx selbst verschwindend kleinen dx^2 wieder einen endlichen Wert hat.

Anstatt das zweite Differential und den zweiten Differentialquotienten aus der Funktion selbst abzuleiten, können wir auch von dem ersten Differential oder Differentialquotienten ausgehen; das zweite Differential ist das erste des ersten Differentials und der zweite Differentialquotient einer Funktion ist der erste des ersten Differentialquotienten. Setzen wir den ersten Differentialquotienten der Funktion gleich $f'(x)\,dx$, so dafs

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad dy = f'(x)\,dx,$$

so ist

$$d^2y = f'(x + dx)\,dx - f'(x)\,dx = df'(x)$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df'(x)}{dx^2}.$$

Es ergibt sich das aus folgender Überlegung. Die Gleichung $dy = f'(x)\,dx$ gibt uns für jeden beliebigen Wert, den wir für x einsetzen, die Zunahme des Wertes y, wenn wir in der gegebenen Funktion anstatt x den Wert $x + dx$ einsetzen. Setzen wir deshalb in die Gleichung, welche uns dy liefert, den Wert $x + dx$ ein, so erhalten wir die Zunahme, welche der Wert von y erhält, wenn wir in der ursprünglichen Funktion von $x + dx$ aus nochmals um dieselbe Gröfse dx fortschreiten, also den Wert, den wir vorhin mit dy_1 bezeichneten. Die Differenz dieses Wertes gegenüber dy ist es aber, die wir vorhin als das zweite Differential definierten.

Ein einfaches Beispiel läfst uns die Richtigkeit dieser Überlegung unmittelbar erkennen. Es sei $y = \sin x$, so ist nach E 4

$$dy = \cos x\,dx,$$

ferner ist

$$dy_1 = \sin(x + 2dx) - \sin(x + dx) = \sin\big((x + dx) + dx\big) - \sin(x + dx).$$

Letzteres ist aber

$$dy_1 = \cos(x + dx)\, dx.$$

Somit wird

$$d^2y = dy_1 - dy = \cos(x + dx)\, dx - \cos x dx.$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts Anderes als das Differential von $\cos x dx$, dem ersten Differential von $\sin x$. Es wird demnach

$$d^2y = -\sin x dx^2; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x.$$

Wir erhalten daher als Regel VII: zur Berechnung eines zweiten Differentials oder Differentialquotienten haben wir nur die ersten Differentiale oder Differentialquotienten einer Funktion gerade so zu behandeln, wie die Funktion selbst zur Bildung der ersten Differentiale.

Diese Regel liefert uns auch das zweite Differential einer Funktion von zwei Veränderlichen. Für das erste Differential einer solchen erhielten wir

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz = M dx + N dz,$$

wenn wir die partiellen Differentialquotienten mit M und N bezeichnen. Bei der Berechnung des zweiten Differentials ist nur darauf zu achten, daſs im allgemeinen sowohl M als N Funktionen von x und z sind. Dann erhalten wir in Ausführung der Regel VII nach E V und unter Beachtung des Satzes E I

$$d^2y = \left(\frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial z} dz\right) dx + \left(\frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial z} dz\right) dz$$

$$d^2y = \frac{\partial M}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial M}{\partial z} dz\, dx + \frac{\partial N}{\partial x} dx\, dz + \frac{\partial N}{\partial z} dz^2.$$

In diesem Ausdrucke ist stets

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

denn M ist der erste partielle Differentialquotient nach x, N derjenige nach z. Bilden wir nun von M den partiellen Differentialquotienten nach z, so heiſst das, wir lassen jetzt das bei der ersten Differentiation als konstant betrachtete z sich ändern; es ist also der Differentialquotient von M nach z die Funktion, die entsteht, wenn wir erst x und dann in der so entstandenen Funktion sich z ändern lassen. Bei der Bildung des Differentialquotienten von N nach z haben wir genau dasselbe nur in umgekehrter Reihenfolge gethan. Die Reihenfolge, in welcher wir die willkürlich veränderlichen Gröſsen sich ändern lassen, kann aber auf das schlieſsliche Resultat keinen Einfluſs haben. Ein Beispiel läſst die Richtigkeit dieser Folgerung sofort erkennen; setzen wir

$$y = x^n \cdot \sin z,$$

so ist nach E V

$$dy = nx^{n-1} \sin z\, dx + x^n \cos z\, dz,$$

somit

$$M = nx^{n-1} \sin z, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = nx^{n-1} \cos z$$

$$N = x^n \cos z, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = nx^{n-1} \cos z = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

In dem zur Erläuterung der Regel V gerechneten Beispiel war

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}\, dx + \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\, dz.$$

Auch hier wird

$$\frac{\partial \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}}{\partial z} = \frac{\partial \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}}{\partial x} = -\frac{x \cdot z}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hieraus ergibt sich dann, dafs wenn uns ein Ausdruck von der Form

$$dy = Mdx + Ndz$$

gegeben ist, in welchem M und N irgend welche Funktionen von x und z sind, derselbe nur dann das erste Differential irgend einer Funktion

$$y = f(x, z)$$

ist, wenn die Differentialquotienten $\frac{\partial M}{\partial z}$ und $\frac{\partial N}{\partial x}$ einander gleich sind. Ist das nicht der Fall, so ist der Ausdruck nicht das vollständige Differential einer Funktion, das heifst, es gibt keine Funktion von x und z, durch deren Differentiation jener Ausdruck entstanden ist.

Integration.

Bei den physikalischen Untersuchungen kommt uns sehr häufig der Fall vor, dafs die Beobachtungen uns nicht sofort die Beziehung zwischen den eine Erscheinung bedingenden Gröfsen liefern, dafs wir vielmehr nur die Differentiale oder Differentialquotienten der gesuchten Beziehungen erhalten. Wir finden so Ausdrücke von der Form

$$dy = ax\,dx; \quad dy = a \cdot \sin x\,dx,$$

und manche andere. Ganz besonders oft kommt das vor, wenn wir aus einem durch die Erfahrung uns gegebenen Gesetze durch Deduktion die Gesetze anderer Erscheinungen ableiten wollen. In den meisten Fällen können wir für die aus dem bekannten Gesetze weiter abzuleitenden Beziehungen aus diesem Gesetze nur die Differentiale oder Differentialquotienten angeben, und es handelt sich dann für uns darum, aus diesen Differentialausdrücken die Gleichung zwischen den veränderlichen Gröfsen aufzusuchen. Man bezeichnet dieses Verfahren als Integration, und nennt den Ausdruck, welcher durch Differentiation auf den gegebenen Differentialausdruck führt, das Integral des letztern. Man bezeichnet das Integral eines gegebenen Differentialausdrucks durch ein vorgesetztes Summenzeichen $\int$, so dafs also, wenn der Ausdruck etwa

$$dy = axdx$$

gegeben ist,

$$y = \int axdx$$

gesetzt wird; es wird also angedeutet, dafs y das Integral des unter dem betreffenden Summenzeichen stehenden Differentialausdruckes ist.

Dem Integralausdruck können wir eine doppelte Bedeutung beilegen, deren eine uns das Integral als eine Summe erkennen läfst, wodurch zugleich die Bezeichnung des Integrals durch ein Summenzeichen gerechtfertigt ist.

Die erste Bedeutung ist die eben erwähnte, das Integral eines Differentialausdrucks ist jene Funktion, welche durch Differentiation den gegebenen Differentialausdruck liefert. Wir wissen nun z. B., dafs das Differential $dy = ax$ durch Differentiation des Ausdruckes $y = \frac{1}{2}ax^2$ entsteht, somit erhalten wir

$$\frac{1}{2}ax^2 = \int ax\,dx.$$

Indes ist dabei zu beachten, dafs nach E I bei der Differentiation einer Summe, von der ein oder mehrere Glieder konstante, nicht mit x sich ändernde Gröfsen sind, diese Gröfsen verschwinden; wir können daher nicht wissen, ob die Funktion, durch deren Differentiation unser gegebenes Differential entstanden ist, oder entstanden gedacht werden kann, nicht einen konstanten Summand enthielt. Gehen wir nun vom Differential zum Integral über, so müssen wir aus diesem Grunde immer zu der Funktion eine Konstante addieren, deren Wert allerdings, so lange uns nichts Anderes als das Differential gegeben ist, durchaus unbestimmt ist, ja jeder beliebiger sein kann. Wir müssen also als das Integral der Funktion $dy = axdx$ schreiben

$$\int axdx = \frac{1}{2}ax^2 + C,$$

worin C also eine jede beliebige konstante, das heifst mit x sich nicht ändernde Gröfse sein kann.

Den so vervollständigten Integralausdruck des Differentials nennt man dessen unbestimmtes Integral.

Um dann den Wert unserer Funktion für jedes gegebene x in der That angeben zu können, mufs man den Wert derselben für irgend einen Wert von x auf andere Weise bestimmen können. Wissen wir z. B., dafs für den Wert $x = 0$ die Funktion den Wert b annimmt, so folgt $C = b$, und unsere Funktion wird

$$y = \frac{1}{2}ax^2 + b.$$

Durch die so erfolgte Festsetzung des Wertes der Konstanten wird unsere Funktion eine bestimmte, das heifst sie gibt uns jetzt für jeden Wert, den wir der veränderlichen Gröfse x beilegen, einen ganz bestimmten Wert von y.

Das an diesem Beispiel Gezeigte gilt selbstverständlich allgemein; ist

$$d\varphi(x) = f(x)dx,$$

so ist

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C.$$

Die zweite Bedeutung des Integrals ist die einer Summe von Differentialen. Wie wir sahen ist das Differential einer Funktion der Unterschied der beiden Werte derselben, wenn die veränderliche Gröfse von einem Werte x um dx zunimmt. Den Wert, welchen die Funktion für irgend einen Wert x_n annimmt, können wir dann als die Summe bezeichnen des Wertes, welchen die Funktion für irgend einen kleinern Wert von x, etwa x_0 besitzt, und aller der Differentiale, welche wir erhalten, wenn x jedesmal durch Hinzufügen um dx allmählich von x_0 bis x_n zunimmt. Denn setzen wir der Einfachheit wegen $x_1 = x_0 + dx$, $x_2 = x_0 + 2dx \cdots x_n = x_0 + ndx$ und die den Werten $x_0, x_1 \ldots x_n$ entsprechenden Werte der Funktion $y_0, y_1 \cdots y_n$, so ist, wenn wir $y_0 = \frac{1}{2}ax_0^2 + C$ setzen,

$$y_1 = y_0 + dy = y_0 + ax_0 dx$$
$$y_2 = y_1 + dy_1 = y_1 + ax_1 dx = y_0 + ax_0 dx + ax_1 dx$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_{n-1} + dy_{n-1} = y_{n-1} + ax_{n-1} dx = y_0 + ax_0 dx + ax_1 dx \cdots ax_{n-1} dx,$$

oder es ist

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x_n} ax\,dx,$$

worin also das Integralzeichen ein eigentliches Summenzeichen ist, das heifst es mufs die Summe aller der Differentialausdrücke gebildet werden, wenn wir in dem Differentialausdruck nach und nach für x alle Werte zwischen $x = x_0$ und $x = x_n$ einsetzen, wie wir deren oben einige hingeschrieben haben. Diese so von einem bestimmten untern Werte x_0, der untern Grenze des Integrals, bis zu einem bestimmten obern Werte, der obern Grenze gebildete Summe, nennt man das bestimmte Integral des Differentials zwischen den Grenzen x_0 und x_n.

Wie die obige Entwicklung zeigt, ist dieses bestimmte Integral nichts Anderes als die Differenz der Werte, welche die Funktion, deren Differential unter dem Integralzeichen steht, annimmt, wenn wir in derselben einmal der Veränderlichen den durch die obere Grenze bestimmten Wert, das andere Mal den durch die untere Grenze bestimmten Wert beilegen. Denn aus der letzten Gleichung folgt

$$\int_{x_0}^{x_n} ax\,dx = y_n - y_0 = \tfrac{1}{2}ax_n^2 - \tfrac{1}{2}ax_0^2.$$

Dadurch, dafs das bestimmte Integral die Differenz zweier Werte der Funktion ist, fällt die in dem unbestimmten Integral vorhandene Konstante heraus, da sie im Minuend und Subtrahend dieselbe ist.

Auch das hier Entwickelte gilt ganz allgemein, was wohl keines weiteren Beweises bedarf; ist

$$f(x)dx = d\varphi(x),$$

so ist stets

$$\text{VIII} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \varphi(x_n) - \varphi(x_0).$$

Wir können darnach den Wert des bestimmten Integrals immer angeben, wenn wir das unbestimmte Integral kennen.

Das Integral eines gegebenen Differentialausdruckes können wir nicht durch eine bestimmte Methode der Rechnung erhalten, wie wir den Differentialausdruck aus der Funktion ableiten. Wirklich integrieren, das heifst eine geschlossene Integralfunktion für dieselben angeben, können wir nur solche Differentialausdrücke, welche vollständige Differentiale einer Funktion sind. Die Integralrechnung *lehrt nun die Methoden*, durch welche wir er-

kennen können, ob ein gegebener Ausdruck ein vollständiger Differentialausdruck ist, oder durch welche wir ihn in einen solchen verwandeln können. Wir gehen auf diese Methoden nicht ein, sondern werden, wo es etwa nötig ist, in den speciellen Fällen die erforderlichen Rechnungen machen. Nur bemerken wir hier, daſs wenn wir die vorhin entwickelten Differentialausdrücke vorfinden, wir stets sofort deren Integrale angeben können, da uns die Funktionen bekannt sind, durch deren Differentiation sie entstanden sind. So ist

nach E 1 $x^n dx = d \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, also $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

nach E 2 $\frac{dx}{x} \log e = d \log x$, also $\int \frac{dx}{x} \log e = \log x + C$.

Sind die Logarithmen, mit denen wir rechnen, natürliche, so ist

$$\frac{dx}{x} = d \log x, \quad \text{also} \int \frac{dx}{x} = \log x + C;$$

nach E 3 $\frac{\log a}{\log e} a^x dx = da^x$, also $\int \frac{\log a}{\log e} a^x dx = a^x + C$

und so weiter; es wird nicht nötig sein, die einzelnen Integralausdrücke hinzuschreiben.

Erster Teil.

Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper.



Erster Abschnitt.

Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper als solcher.

Erstes Kapitel.

Von der fortschreitenden Bewegung der Körper.

§ 1.

Bewegung. Die erste Thatsache, welche uns bei der Betrachtung der Aufsenwelt auffällt, ist die, dafs einige Körper ihren Ort im Raume, soweit wir es beurteilen können, stets behaupten, andere ihn verändern. Von den ersteren sagen wir, sie seien in Ruhe, von den letzteren, sie seien in Bewegung. Bei den Bewegungen erkennen wir dann sehr bald einen Unterschied, indem einige Körper in einer bestimmten Zeit einen gröſseren Weg zurücklegen als andere. Den ersteren legen wir dann eine gröfsere, den letzteren eine kleinere Geschwindigkeit bei. Als Geschwindigkeit einer Bewegung bezeichnen wir somit die Beziehung zwischen dem durchlaufenen Wege und der Zeit, in welcher er durchlaufen ist.

Einen weiteren Unterschied in der Bewegung nehmen wir wahr, wenn wir die in gleichen auf einander folgenden Zeiten zurückgelegten Wege mit einander vergleichen. Die einen legen in gleichen Zeiten immer die gleiche Anzahl Meter zurück. Bilden wir dort das Verhältnis zwischen dem in irgend einer Anzahl t Sekunden zurückgelegten Wege s und dieser Zahl von Sekunden, $\frac{s}{t}$, so ist der Wert desselben immer der gleiche. Solche Körper besitzen demnach, da die Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege und der Zeit, in welcher derselbe zurückgelegt ist, immer dieselbe ist, eine konstante Geschwindigkeit. Man nennt die Bewegung eine gleichförmige. Für diese Bewegung erhalten wir auch sofort ein Mafs der Geschwindigkeit eben in dem konstanten Verhältnis zwischen Weg und Zeit

$$c = \frac{s}{t}.$$

Man sieht weiter, dafs dieser Quotient die Strecke ist, welche der Körper in der Zeit einer Sekunde zurücklegt, so dafs wir die Geschwindigkeit des Körpers als die in der Zeit einer Sekunde zurückgelegte Wegestrecke bezeichnen können. Der in irgend einer Zeit zurückgelegte Weg s ist dann

$$s = c \cdot t.$$

Andere Körper bewegen sich ungleichförmig, das heifst, beobachten wir den jedesmal in t Sekunden aber zu verschiedenen Zeiten zurückgelegten Weg s, so finden wir, dafs der Quotient

$$\frac{s}{t}$$

zu den verschiedenen Zeiten der Bewegung einen verschiedenen Wert hat; bei einigen Bewegungen wächst dieser Quotient, bei andern nimmt derselbe ab. Erstere Bewegungen nennt man beschleunigte, letztere verzögerte. Man kann deshalb bei solchen Bewegungen von einer bestimmten Geschwindigkeit nur für einen bestimmten Augenblick sprechen. Als diese Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke bezeichnet man dann jene, mit welcher der Körper sich nach der vorherigen Definition weiter bewegen würde, wenn seine Bewegung von diesem Augenblicke ab eine gleichförmige würde. Können wir also bei der Untersuchung einer nicht gleichförmigen Bewegung bewirken, dafs von einem bestimmten Augenblick ab die Änderung der Geschwindigkeit aufhört, so haben wir nur in der dann gleichförmigen Bewegung die in einer Sekunde zurückgelegte Strecke zu messen, um die Geschwindigkeit für den Augenblick zu erhalten, in welchem die Bewegung gleichförmig wurde.

Auch für die ungleichförmige Bewegung läfst sich für die Geschwindigkeit gemäfs der vorhin gegebenen Definition, dafs dieselbe der Quotient aus Weg und Zeit sei, ein mathematischer Ausdruck ableiten, wenn wir wissen, wie der Weg mit der Zeit wächst, wenn wir also den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit kennen. Nehmen wir an, der Körper habe zur Zeit t den Weg s zurückgelegt, und in der Zeit von t_1 Sekunden, die gröfser sein möge als die erste, den Weg s_1. In der Zeit $t_1 - t$ hat er dann den Weg $s_1 - s$ zurückgelegt, und der Quotient

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$$

gibt uns die Strecke, welche der Körper in der Sekunde zurückgelegt haben müfste, um mit gleichförmiger Bewegung in derselben Zeit $t_1 - t$ denselben Weg zurückzulegen, den er in Wirklichkeit zurückgelegt hat. Man nennt diese Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit $t_1 - t$. Diese mittlere Geschwindigkeit hat der Körper einmal in der Zeit $t_1 - t$ besessen, vor dem Augenblicke aber, wo er dieselbe besafs, war die Geschwindigkeit, wenn wir die Bewegung als eine beschleunigte voraussetzen, kleiner, nach derselben war sie gröfser. Von allen den in der Zeit $t_1 - t$ vorkommenden Geschwindigkeiten unterscheidet sich nun diese mittlere Geschwindigkeit um so weniger, je kleiner die Zeit und der Weg ist, aus welcher wir dieselbe ableiten. Bilden wir deshalb für die denkbar kleinste Zeit $t_1 - t = dt$ und den in dieser verschwindend kleinen Zeit zurückgelegten Weg ds den Quotienten

$$v = \frac{ds}{dt},$$

so ist die berechnete Geschwindigkeit v, welche die mittlere für die Zeit dt ist, von derjenigen, die zur Zeit t vorhanden ist, nicht mehr verschieden, wenn wir die Zeit dt eben kleiner als jede angebbare Gröfse annehmen; mit

anderen Worten, wenn wir jenen Quotienten als den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit betrachten.

Wir können demnach bei der ungleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit als den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit definieren. Ja diese Definition gilt ganz allgemein auch für die gleichförmige Bewegung, denn nach E 1 ist für die Funktion

$$s = ct,$$

welche die gleichförmige Bewegung definiert,

$$\frac{ds}{dt} = c = \frac{s}{t}.$$

Bei der ungleichförmigen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke; das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zu der Zeit, in welcher diese Änderung eintritt, nennt man die Beschleunigung der Bewegung. Der einfachste Fall der Geschwindigkeitsänderung ist dann der, dafs die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten sich immer um dieselbe Gröfse ändert, dafs sie also für die Zeiteinheit immer um dieselbe Gröfe zu- oder abnimmt. Wächst die Geschwindigkeit auf diese Weise in der Zeit t von v auf v_1, so ist der Quotient

$$h = \frac{v_1 - v}{t}$$

konstant und gibt uns die Geschwindigkeitszunahme für die Sekunde; in diesem Falle ist also die Beschleunigung gleich der in jeder Sekunde stattfindenden Geschwindigkeitszunahme. Eine solche Bewegung nennt man eine gleichmäfsig geänderte; eine gleichmäfsig beschleunigte, wenn die Geschwindigkeit in dieser Weise zunimmt, eine gleichmäfsig verzögerte, wenn sie abnimmt.

Aus dem Satze, dafs die Geschwindigkeit der Differentialquotient des Weges nach der Zeit sei, können wir auch sofort ableiten, welches bei der gleichmäfsig beschleunigten Bewegung die Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege und der Zeit ist. Nehmen wir an, der Körper bewege sich von der Ruhe aus sofort mit gleichmäfsig beschleunigter Bewegung, und seine Beschleunigung sei gleich h; dann ist die Geschwindigkeit v zur Zeit t

$$v = ht.$$

Da nun

$$v = \frac{ds}{dt},$$

so ist

$$ds = ht\,dt.$$

Der in der Zeit t zurückgelegte Weg ist die Summe aller Wege ds, die wir erhalten, wenn die Zeit von $t = 0$ an, jedesmal um dt, allmählich bis $t = t$ wächst, oder es ist s das bestimmte Integral

$$s = \int_0^t ht\,dt.$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Differentialausdruck ist uns nach E 1 bekannt, er ist das Differential von $\frac{1}{2}ht^2$, somit ist

$$s = \frac{1}{2}ht^2 - \frac{1}{2}ho^2 = \frac{1}{2}ht^2,$$

oder der mit gleichmäfsig beschleunigter Bewegung in der Zeit t zurückgelegte Weg ist gleich der halben Beschleunigung multipliciert mit dem Quadrate der Zeit.

Ist die Änderung der Geschwindigkeit nicht immer in gleichen Zeiten dieselbe, so ist die Bewegung eine ungleichmäfsig geänderte; bei einer solchen kann man von einer bestimmten Beschleunigung nur für einen bestimmten Augenblick sprechen, gerade wie man bei der ungleichförmigen Bewegung allgemein von einer bestimmten Geschwindigkeit nur für einen bestimmten Augenblick sprechen kann. Wir gelangen aber hier zu einer Definition der Beschleunigung durch die ganz gleiche Überlegung, wie sie uns vorher zur Definition der Geschwindigkeit führte. Ist dv die Geschwindigkeitszunahme in der Zeit dt, so ist $\frac{dv}{dt}$ die mittlere Beschleunigung in der Zeit dt. Diese mittlere Beschleunigung unterscheidet sich um so weniger von der wirklich innerhalb der Zeit dt in den verschiedenen Augenblicken derselben stattfindenden, je kleiner die Zeit dt ist, sie wird der wirklich in dem betrachteten Moment stattfindenden gleich, wenn wir dt als eine verschwindend kleine Zeit betrachten. Es folgt somit, dafs die Beschleunigung bei einer ungleichförmigen Bewegung der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit ist; da die Geschwindigkeit der erste Differentialquotient des Weges nach der Zeit ist, folgt gleichzeitig, dafs wir die Beschleunigung auch als den zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit definieren können. Die so definierte Beschleunigung ist dann die Geschwindigkeitszunahme, welche in einer Sekunde stattfinden würde, wenn die Geschwindigkeit in jedem der die Sekunde zusammensetzenden kleinen Zeitelemente dt um die gleiche Gröfse dv zunähme.

§ 2.

Kräfte. Die Erfahrung zeigt uns, dafs die Materie beweglich ist, sie zeigt uns aber zugleich, dafs kein in Ruhe befindlicher Körper seinen Ruhezustand ohne eine äufsere Veranlassung, ohne einen äufsern Antrieb verläfst. Ist ein Körper aber einmal in Bewegung, so zeigt uns die Erfahrung weiter, dafs derselbe die ihm einmal erteilte Bewegung beibehält, bis sie wieder durch eine äufsere Veranlassung, etwa einen dem frühern entgegengesetzten Antrieb abgeändert oder aufgehalten wird. Auf den ersten Blick scheint der letztere Satz der Wirklichkeit nicht zu entsprechen, denn wir sehen auf der Erde jede Bewegung allmählich zur Ruhe kommen. Betrachten wir indes die Bewegungen genauer, so finden wir bei jeder an der Erde stattfindenden Bewegung eine Reihe von äufseren Umständen, welche die Bewegung stören, wie der Widerstand der Luft, in welcher sich alles bewegen mufs, die Reibung auf der Unterlage u. s. f.; je mehr wir diese Hindernisse der Bewegung beseitigen, um so weniger wird die Bewegung gestört, um so länger hält sie an. Werfen wir einen Körper über eine ebene horizontale Grundlage hin, so hört seine Bewegung um so eher auf je rauher die Grundlage ist, indem der Körper gegen die verschiedene

Unebenheiten anstöfst. Nehmen wir eine möglichst glatte Fläche und rollen über diese eine Kugel fort, so dauert die Bewegung sehr viel länger, so dafs wir schliefsen dürfen, dafs, wenn wir alle Widerstände fortnähmen, die Bewegung ohne Aufhören dauern würde. Eine solche ohne Ende fortdauernde Bewegung materieller Massen sehen wir sogar in den Gestirnen, deren Bewegung seit 2000 Jahren, seitdem man ihre Bahnen beobachtet hat, sich nicht geändert hat. Es ergibt sich somit aus der Erfahrung, dafs die Materie den ihr einmal gegebenen Bewegungszustand aus sich selbst niemals ändert; diese Eigenschaft nennt man die Trägheit der Materie.

Die äufseren Ursachen, welche den Bewegungszustand der Materie ändern, nennen wir Kräfte.

Um alles zu kennen, wodurch eine Kraft bestimmt wird, müssen wir ihren Angriffspunkt, ihre Richtung und ihre Gröfse kennen.

Die Richtung einer Kraft erkennen wir aus der Richtung, nach welcher sie eine Materie in Bewegung setzt, die Richtung der Kraft fällt zusammen mit der Richtung, nach welcher sie die Materie, auf welche sie wirkt, hintreibt.

Die Gröfse einer Kraft können wir strenge genommen nur durch die Gröfse ihrer Wirkung, also durch die von ihr erzeugte Bewegung messen. Um aber dieses Mafs anwenden zu können, müssen wir zunächst wissen, von welchen Umständen überhaupt die Bewegung eines Körpers abhängt. Zu dieser Untersuchung selbst ist es aber durchaus wünschenswert, schon ein Mafs für die Kraft zu haben. Wir gelangen dazu durch folgende Überlegung. Zwei Kräfte müssen wir als gleich ansehen, wenn sie, an demselben Punkte angreifend, nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirkend, sich aufheben, das heifst keine Bewegung hervorbringen oder eine vorhandene Bewegung ungeändert lassen. Da man nun stets einer Kraft das Gleichgewicht halten kann, indem man an demselben Punkte in einer ihr entgegengesetzten Richtung ein Gewicht wirken läfst, so ist dieses Gewicht der Kraft gleich und ihr Mafs. Man kann demnach die Gröfse einer Kraft in Gewichten auswerten.

Welcher Art nun auch die Kräfte sind, aus welcher Quelle sie auch herrühren, man kann sie in zwei Klassen teilen; die einen wirken stets nach derselben Richtung und erfordern stets die gleiche Anzahl von Kilogrammen, um im Gleichgewicht gehalten zu werden, es sind die konstanten Kräfte. Die anderen können sich mit der Zeit nach Gröfse und Richtung ändern, d. h. es bedarf, um sie im Gleichgewicht zu halten, zu verschiedener Zeit verschieden grofser Gewichte, welche man nach verschiedenen Richtungen wirken läfst. Man nennt diese Kräfte veränderliche.

Es ist nun unsere Aufgabe zu untersuchen, wie die in § 1 betrachteten Bewegungen durch solche Kräfte erzeugt werden, wie also infolge der Wirkung einer Kraft sich die Körper bewegen. Wir verfahren zu dem Ende folgendermafsen: wir beobachten einige einfache Fälle der Bewegung und entwickeln deren experimentelle Gesetze; dann suchen wir aus diesen Gesetzen jene durch Abstraktion zu erhalten, welche uns allgemein angeben, wie Kräfte wirken, aus welchen also die experimentell gefundenen Gesetze sich durch Deduktion ableiten lassen. Dadurch erhalten wir die Theorie der Kräfte, und diese allgemeinen Sätze bieten uns die Grundlage der mathematischen Deduktionen, welche die theoretische Mechanik bilden.

§ 3.

Dasein und Richtung der Schwere. Das sich uns am häufigsten zeigende Beispiel einer fortschreitenden Bewegung ist das Niederfallen eines nicht unterstützten Körpers zur Erde; dies eignet sich daher am besten dazu, die Gesetze der Bewegung zu untersuchen. Alle Körper fallen, wenn sie nicht unterstützt sind, zur Erde nieder. Heben wir sie auf, so fühlen wir, dafs sie das Bestreben haben zu fallen, indem es einer gewissen Anstrengung bedarf, sie am Fallen zu hindern. Wir nennen deshalb die Körper schwer und jene Kraft, welche sie zur Erde niedertreibt, die Schwere. Verschiedene Körper haben ein verschiedenes Bestreben zu fallen, sie üben auf ihre Unterlage einen verschiedenen Druck aus. Wir legen ihnen daher ein verschiedenes Gewicht bei, indem wir den Druck auf die Unterlage als Gewicht bezeichnen. Welche Einheit wir der Messung der Gewichte zu Grunde legen, haben wir in der Einleitung besprochen.

Die Richtung, in welcher die Schwere wirkt, läfst sich leicht durch einen einfachen Versuch bestimmen. Man befestigt einen schweren Körper, etwa eine Metallkugel, an einen Faden, der mit seinem andern Ende an irgend einem festen Punkte befestigt ist, und läfst die Kugel frei herabhängen. Eine Zeitlang schwingt die Kugel hin und her, dann hängt sie ruhig. Da sie nicht fällt, so folgt, dafs eine der Schwere gleiche und gerade entgegengesetzte Kraft die Kugel hält; es ist dies die Festigkeit des gespannten Fadens. Die Richtung des Fadens gibt uns somit die Richtung der Schwere; man überzeugt sich ferner dadurch, dafs man den Faden durchschneidet; denn die Kugel fällt dann in der Richtung des gespannten Fadens zu Boden.

Die Richtung der Schwere ist also an jedem Orte durch einen solchen mit einem Gewichte versehenen Faden, dem Lote oder Senkel gegeben; man nennt diese Richtung die lotrechte oder vertikale.

Hält man ein solches Lot über einer ruhenden Flüssigkeitsfläche, so findet man, dafs es mit allen in der Ebene der Flüssigkeitsfläche durch seinen Fufspunkt gezogenen Linien einen rechten Winkel bildet, dafs es also auf der Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht steht. Man kann also die Richtung des Lots ebenso durch die Lage der Flüssigkeitsebene bestimmen; die Ebene der Flüssigkeit nennt man die horizontale.

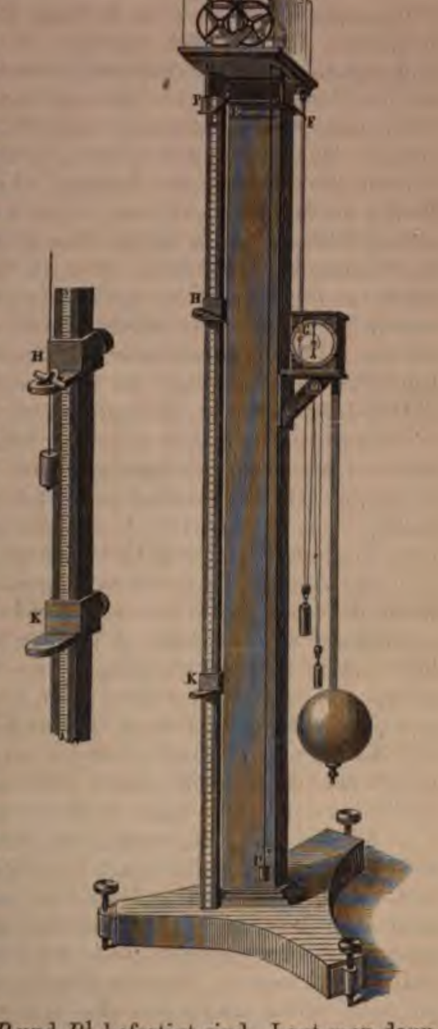
§ 4.

Atwoods Fallmaschine. Um die Gesetze der Bewegung mit Hülfe der Schwerkraft zu untersuchen, genügt es nicht, einfach einen fallenden Körper zu beobachten. Denn einmal ist, wie sich jeder leicht überzeugt, die Fallgeschwindigkeit bald so grofs, dafs sie einer exakten Beobachtung sich entzieht, und andererseits bietet der freie Fall der Körper nur einen speciellen Fall von Bewegung, nämlich die Bewegung eines Körpers, der durch sein eigenes Gewicht bewegt wird. Man hat deshalb Apparate konstruiert, welche beiden Übelständen abhelfen, welche die Bewegung verlangsamen und in vieler Beziehung abändern lassen; einer der bequemsten Apparate dieser Art ist die Atwoodsche Fallmaschine, mit deren Hülfe daher die Gesetze der Bewegung untersucht werden sollen.

Das Princip dieser Maschine ist folgendes. Wenn man an einem voll-

en biegsamen Faden zwei ganz gleich schwere Körper befestigt und den Faden über eine leicht bewegliche Rolle führt, so halten sich iden Gewichte genau das Gleichgewicht, es tritt keine Bewegung ein, er der beiden Körper durch ein einigen gleiches Gewicht der re entgegen gezogen wird. Um System von Körpern, die bei- ewichte, den Faden und die in Bewegung zu setzen, bedarf er äufsern Kraft, die wir er- , indem wir auf den einen Kör- Übergewicht legen. Die Gröfse Übergewichtes, sowie die des zu bewegenden Körpers ie Dauer der Wirkung des ewichtes, können wir dann be- ändern. Die Einrichtung des atesist zu dem Zwecke folgende. f einer massiven hölzernen mit lschrauben versehenen Platte 4) befindet sich ein Holzpfeiler ngefähr 3 Meter Höhe. Auf feiler ist eine Platte horizontal igt, und auf dieser ist ein mög- leicht gearbeitetes, aus 4 Spei- nd einem Radkranze bestehen- d möglichst beweglich aufge- Um seine Beweglichkeit zu n, ist die Axe des Rades in feste Lager, sondern auf onsräder gelegt. Dieselben be- aus zwei Systemen von Rä- , *D*, welche, wie die Zeich- eigt, sich kreuzen, und welche d *A* mit in Bewegung setzt. ibung des Rades ist dadurch ermindert; wie man dieselbe nschädlich macht, werden wir zeigen.

Fig. 14.



r Umfang des Rades hat eine , und in dieser ist über das n Seidenfaden gelegt, an dessen zwei genau gleiche Gewichte P und P^1 befestigt sind. Legt man dann ein Übergewicht p, so sinkt P nach unten, P^1 steigt empor und das System erhält eine gemeinschaftliche Bewegung. Die zu bewegenden hte sind in diesem Falle $p + P + P^1$ und das Gewicht des Fadens und olle. Sind die Speichen der Rolle hinreichend fein gearbeitet, so darf nnehmen, dafs das ganze Gewicht derselben im Radkranze vereinigt Dann erhält aber dieses Gewicht, da die Rolle mitgedreht wird, und

die einzelnen Punkte derselben ebenso schnell bewegt werden als der Faden oder die Gewichte P, ganz dieselbe Bewegung wie die übrigen Teile des Systems. Bezeichnen wir das Gewicht der Rolle und des Fadens mit Π, so ist dann das Gewicht der zu bewegenden Körper $p + P + P^1 + \Pi$. Die Kraft, welche diese Gewichte in Bewegung setzt, ist das Übergewicht p. Es mufs indes, um diese Kraft genau zu erhalten, von diesem Gewichte ein kleiner Teil π abgezogen werden, um die Reibung der Axe des Rades A zu überwinden. Wenn diese Reibung auch sehr klein ist, so ist sie doch nicht gleich Null, wie man wahrnimmt, wenn man das System ohne Übergewicht durch einen Anstofs in Bewegung setzt. Da auf das System dann keine äufsere Kraft wirkt, müfste es, vermöge der Trägheit, in gleichförmiger Bewegung verharren. Man findet aber stets eine, wenn auch kleine Abnahme der Geschwindigkeit infolge der Reibung. Um die Bewegung vollständig gleichförmig zu machen, mufs man dann auf das niedersinkende Gewicht ein kleines Übergewicht π legen, dessen Schwere gerade dazu hinreicht, um die Reibung zu überwinden. Um die Gröfse dieses Gewichtes π mufs man daher bei Berechnung der das System bewegenden Kraft das Übergewicht p vermindern. Bequemer verfährt man indes so, dafs man ein für allemal auf das niedersinkende Gewicht das zur Überwindung der Reibung erforderliche Gewicht π hinlegt; das in Bewegung zu setzende Gewicht ist dann $p + P + P^1 + \Pi + \pi$, die bewegende Kraft einfach gleich dem Übergewichte p.

Das Gewicht P fällt vor einem hölzernen in Centimeter geteilten Mafsstabe. Längs desselben kann man einen kleinen Messingteller K verschieben und durch Klemmschrauben in irgend einer Höhe befestigen; auf denselben schlägt dann das Gewicht P auf und gibt durch das infolge des Schlages entstehende Geräusch das Ende seines Laufes an.

Der Apparat ist ferner so eingerichtet, dafs man an einer beliebigen Stelle das Übergewicht p fortnehmen kann, ohne die Bewegung des Systems zu stören. Zu dem Ende ist an dem hölzernen Mafsstabe aufser dem vorhin erwähnten Teller ein Ring H befestigt, durch den das Gewicht P ungehindert hindurchgehen kann, der aber das Übergewicht p, welches die in der Nebenfigur bezeichnete Gestalt hat, zurückhält. Dieser Ring ist längs des Mafsstabes verschiebbar und kann ebenfalls an beliebiger Stelle desselben befestigt werden. Durch Einschalten des Ringes kann also das Übergewicht an einer beliebigen Stelle fortgenommen werden.

An der Maschine ist überdies noch ein Apparat angebracht, der die Zeit mifst. Dieser ist im Princip nichts anders als ein Lot; bei der Lehre vom Pendel werden wir nachweisen, dafs ein aus seiner Gleichgewichtslage gebrachtes Lot um dieselbe Schwingungen macht. Zu diesen Schwingungen braucht es immer dieselbe Zeit; wir können es daher benutzen, um gleiche Zeitteile zu messen. Hat das Pendel eine bestimmte Länge, so braucht es zu einer Schwingung genau eine Sekunde. Ein solches Sekundenpendel ist an dem Apparate angebracht. Mit dem Pendel ist ein Zeiger in Verbindung, der die einzelnen Sekunden anzeigt, und ein Schlagwerk, welches jede Sekunde durch einen hörbaren Schlag markiert.

Um die Bewegung genau mit dem Schlage einer Sekunde beginnen zu können, steht das Gewicht P vor der Bewegung auf einem kleinen Teller, der durch eine kleine Stütze gehalten wird, welche durch den Winkelhebel EFG mit dem Pendel in Verbindung gebracht ist. Jedesmal wenn der

Zeiger an einer bestimmten Stelle steht, wird diese Stütze gelöst, und das System beginnt seine Bewegung.

Wie man sieht, läfst sich an diesem Apparate ein beliebiges Gewicht durch eine beliebige konstante Kraft, deren Wirkungsdauer sich ebenfalls ändern läfst, in Bewegung setzen; der Apparat ist daher vorzugsweise geeignet, die durch konstante Kräfte erzeugten Bewegungen in allen Einzelnheiten zu untersuchen.

§ 5.

Bewegung unter Wirkung einer konstanten Kraft. Setzen wir unser System an der Atwoodschen Fallmaschine, nachdem es in der im vorigen Paragraphen beschriebenen Weise vorgerichtet ist, durch ein Übergewicht p in Bewegung und bringen an irgend einer Stelle z. B. 10 Centimeter unter dem Ausgangspunkte der Gewichte den Ring H an. Geht P durch den Ring hindurch, so bleibt das Übergewicht zurück, und wir finden dann, dafs von da ab das System sich mit gleichförmiger Bewegung weiter bewegt. Bei einem bestimmten Übergewicht, dessen Gröfse von der der übrigen Gewichte abhängt, wird der Raum von 10^{cm} gerade in 1 Sekunde durchfallen; suchen wir dann durch passende Stellung des Tellers K, welcher Weg in 2, 3, 4 Sekunden durchlaufen wird, so finden wir

Zeit	1″	2″	3″	4″	5″
Durchlaufener Weg	10^{cm}	30^{cm}	50^{cm}	70^{cm}	90^{cm}
Weg in den auf die erste folgenden Sekunden zurückgelegt	20^{cm}	40^{cm}	60^{cm}	80^{cm}.	

Nach der ersten Sekunde, also nach Fortnahme des Übergewichtes, ist somit die Bewegung in der That eine gleichförmige, in jeder Sekunde werden 20^{cm} durchlaufen; wir erhalten darin einen experimentellen Beweis dafür, dafs ein Körper, der sich ohne Hindernisse bewegt, in der That die ihm einmal erteilte Bewegung beibehält.

Lassen wir dasselbe Übergewicht anstatt einer 2, 3, 4 Sekunden wirken (der Versuch zeigt, dafs wir dazu den Ring H bei 40^{cm}, 90^{cm}, 160^{cm} befestigen müssen), so finden wir stets, dafs in der auf die Abnahme des Übergewichtes folgenden Zeit die Bewegung eine gleichförmige ist, dafs also jedesmal der in dieser Zeit zurückgelegte Weg sich darstellen läfst durch

$$s = c \cdot t,$$

wenn t die Anzahl der Sekunden nach Fortnahme des Übergewichtes und c der in jedem Falle in der ersten Sekunde nach jener Fortnahme zurückgelegte Weg ist. Dieser Weg oder die während der Wirkung des Übergewichtes erlangte Geschwindigkeit ist aber verschieden; sie ist um so gröfser, je länger das Gewicht gewirkt hat. Bestimmen wir die Geschwindigkeiten in den einzelnen Fällen, so finden wir:

nach	1″	2″	3″	4″
die Geschwindigkeiten	20 cm	40 cm	60 cm	80 cm.

Dividieren wir die in den einzelnen Fällen erlangten Geschwindigkeiten durch die Anzahl Sekunden, in welchen dieselben durch die Wirkung des Übergewichts erzeugt sind, so wird

$$\frac{20}{1} = \frac{40}{2} = \frac{60}{3} = \frac{80}{4} = 20 \cdot$$

Die Quotienten haben somit alle denselben Wert. Wir sehen somit in diesen Fällen, und schliefsen daraus für alle Fälle, dafs die durch Wirkung eines konstanten Uebergewichtes, also auch allgemein durch die Wirkung eines konstanten Druckes in verschiedenen Zeiten erreichten Geschwindigkeiten einfach den Zeiten proportional sind, oder dafs

$$v = c_1 t,$$

die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit v gleich ist dem Produkte aus der in der ersten Sekunde erlangten Geschwindigkeit und der Zeit t. Da somit die in gleichen Zeiten stattfindenden Geschwindigkeitszunahmen gleich sind, so erzeugt eine konstante stetig wirkende Kraft eine gleichmäfsig beschleunigte Bewegung.

Im § 1 haben wir bereits abgeleitet, dafs bei der gleichmäfsig beschleunigten Bewegung die während derselben zurückgelegten Wege gleich sind der halben Beschleunigung multipliziert mit dem Quadrate der Zeit, während welcher die Bewegung gedauert hat, dafs also

$$s = \tfrac{1}{2} c_1 t^2.$$

Zu dem gleichen Resultate können wir auch durch eine einfache Überlegung gelangen. Da nämlich die Zunahme der Geschwindigkeit in gleichen Zeiten immer dieselbe ist, so legt der mit gleichmäfsig beschleunigter Bewegung bewegte Körper in einer gegebenen Zeit denselben Weg zurück, als wenn er sich während der ganzen Zeit in gleichförmiger Bewegung mit derjenigen Geschwindigkeit bewegt hätte, die er genau in der Mitte der Zeit gehabt hat. Denn mit dieser Geschwindigkeit hätte er in der ersten Hälfte der Zeit gerade soviel mehr zurückgelegt, wie er in Wirklichkeit zurückgelegt hat, als er in der zweiten Hälfte weniger zurücklegen würde. Diese mittlere Geschwindigkeit ist nun $\frac{1}{2} c_1 t$, somit der zurückgelegte Weg gleich $\frac{1}{2} c_1 t \cdot t = \frac{1}{2} c_1 t^2$, wie es die Rechnung ergab.

Wir können leicht die Richtigkeit unserer Rechnung durch den Versuch bestätigen, indem wir an der Fallmaschine den Ring H fortnehmen, und jene Stellen aufsuchen, an denen wir den Teller K befestigen müssen, damit das Gewicht P nach 1, 2, 3 . . . Sekunden aufschlägt. Wir finden diese Stellen

nach	1″	2″	3″	4″
bei	10	40	90	160.

Diese letztern Zahlen sind aber

$$10 \cdot 1,\ 10 \cdot 2^2,\ 10 \cdot 3^2,\ 10 \cdot 4^2$$

oder allgemein

$$s = 10 t^2.$$

Da wir bei demselben Versuche die Beschleunigung gleich 20 fanden, ist $10 = \frac{1}{2} c_1$.

Die durch eine jede konstante Kraft hervorgebrachte gleichmäfsig beschleunigte Bewegung ist vollständig bestimmt, wenn die Beschleunigung bekannt ist, denn mit dieser erhalten wir für jede Zeit die Geschwindigkeit und den in dieser Zeit zurückgelegten Weg. Dafs die Beschleunigung von der Gröfse der bewegenden Kraft und von der Gröfse des bewegten Gewichtes abhängig sein mufs, ergibt sich unmittelbar aus der Überlegung,

ade die Kraft ist, welche den Bewegungszustand des Beweglichen welcher Weise aber die Beschleunigung von diesen beiden Gröfsen arüber kann uns nur der Versuch belehren.

a wir zunächst das Gesamtgewicht an unserer Fallmaschine ganz , und verändern nur das Übergewicht. Zu dem Zwecke sind an des Fadens Scheiben angebracht, auf welche man eine Anzahl ganz gleiche Ringe legt. Legen wir zunächst auf beide Seiten n ›, so dafs etwa diese np gleich dem vorhin angenommenen Ge-ind, so tritt keine Bewegung ein; legen wir dann auf die eine Übergewicht p und das Friktionsgewicht π, so tritt die vorhin beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung $c_1 = 20^{cm}$ ein. en wir von der hinteren Seite einen Ring vom Gewichte p fort ihn auf die vordere Seite; wir haben dann bei ganz ungeändertem ichte des ganzen Systems auf der einen Seite das Übergewicht $3p$, liegen die Gewichte $(n+1)p+p=(n+2)p$, auf der hinteren gen $(n-1)p$. Verfahren wir ein zweites Mal so, dann erhalten ergewicht $5p$, ein drittes Mal $7p$ u.s.f., so dafs bei stets gleichem ichte sich die Übergewichte verhalten wie 1 : 3 : 5 : 7 u. s. f. amen wir die Beschleunigungen in diesen Fällen, so finden wir, ben mit der Gröfse des Übergewichtes in demselben Verhält-imen, denn wir erhalten sie

bei dem Übergewichte p gleich c_1
" " " $3p$ " $3c_1$
" " " $5p$ " $5c_1$
" " " $7p$ " $7c_1$.

:hnen wir daher die durch ein der Gewichtseinheit gleiches Über-serem System erteilte Beschleunigung mit d, so können wir die id ein Übergewicht p erzeugte Beschleunigung c wiedergeben durch

$$c = dp,$$

›eschleunigung ist allgemein der Gröfse des Übergewichts oder der bewegenden Kraft proportional.

n wir bei gegebenem Übergewicht das Gesamtgewicht unseres $+ P' + \Pi + \pi + p$, was wir dadurch können, dafs wir eine ie Anzahl von Ringen auf die am Ende des Fadens angebrachten egen, so finden wir, dafs mit der Gröfse dieses Gewichtes die gung abnimmt. Legen wir bei dem Übergewichte p soviel Ringe as Gesamtgewicht verdoppelt, verdreifacht wird, so wird die Be-ng die Hälfte oder ein Drittel u. s. f. Wir finden allgemein, dafs item Übergewichte die Beschleunigung in demselben Mafse kleiner lie Gröfse des Gesamtgewichtes zunimmt.

n wir aber gleichzeitig das Gesamtgewicht des Systems und das at in demselben Sinne, verdoppeln, verdreifachen wir beide, so immer dieselbe Beschleunigung, wie wir sie bei einfachem Ge-ite und einfachem Übergewichte fanden. Daraus folgt, dafs die gung nicht allein von der Gröfse der bewegenden Kraft oder öfse des zu bewegenden Gewichtes, sondern von dem Verhältnisse einander abhängt, oder dafs die Beschleunigung der Gröfse dieses ses direkt proportional ist. Nennen wir daher die Beschleunigung,

welche die der Gewichtseinheit gleiche bewegende Kraft einem die Gewichts einheit wiegenden Körper erteilt, g, so wird die Beschleunigung c, welch die Kraft p dem Gewichte Q erteilt,

$$c = g\,\frac{p}{Q},$$

oder allgemein die einem Körper erteilte Beschleunigung ist der Gröfse de Kraft direkt, dem Gewichte des Körpers umgekehrt proportional.

Es ist gut, zu beachten, dafs in dieser Gleichung das Gewicht Q in eine anderen Weise auftritt als das Übergewicht p. Wir sahen schon früher, daf die Materie träge ist, dafs es immer einer Kraft bedarf, um den Bewegungs zustand eines Körpers zu ändern, dafs also in der Trägheit der Materie ei Widerstand gegen eine Änderung der Geschwindigkeit vorhanden ist. Wi sehen nun hier, dafs es bei verschiedenen Körpern zur gleichen Änderun ihres Bewegungszustandes einer verschiedenen Kraft bedarf, und dafs dies Kraft in demselben Verhältnisse zunehmen mufs wie der Druck, den de bewegte Körper auf seine Unterlage ausübt, oder dafs der Widerstand de Körpers gegen die Bewegungsänderung seinem Gewichte proportional ist das Gewicht ist also das Mafs dieses Widerstandes, und in dem Sinne trit es in dem Nenner obiger Gleichung auf.

Aus dem Ausdrucke für die Beschleunigung irgend eines Körpers vo Gewichte Q durch irgend eine Kraft p können wir nun auch sofort die Ge schwindigkeit v erhalten, welche die Kraft diesem Körper in der Zeit erteilt, sowie den Weg s, den der Körper unter Wirkung dieser Kraf zurücklegt. Wir erhalten

$$v = g\,\frac{p}{Q}\,t$$

$$s = \tfrac{1}{2}\,g\,\frac{p}{Q}\,t^2.$$

In diesen Ausdrücken ist alles enthalten, was auf die Bewegung eine Körpers infolge einer konstanten Kraft von Einflufs ist, Gröfse der Kraf und bewegten Gewichte und Länge der Zeit, während welcher die Kraft wirk Die vierte darin vorkommende Gröfse ist eine Zahl, die wir aus unsern Ver suchen bestimmen können. Genaue später zu besprechende Versuche habe gezeigt, dafs diese Gröfse aus Gründen, die dann ebenfalls hervortrete werden, an den verschiedenen Orten der Erde einen etwas verschiedene Wert hat. In Göttingen ist sie nach den Bestimmungen von Gauss[1]) 9,8116 für Paris nach den Bestimmungen von Biot und Arago[2]) 9,80896, wenn di Zeit t in Sekunden und die Geschwindigkeit in Metern gemessen wird.

Die Bedeutung dieser in der Physik immer mit g bezeichneten Zah ist leicht zu erhalten; setzen wir nämlich $p = Q$, so wird

$$v = gt; \quad s = \tfrac{1}{2}\,gt^2.$$

Ist aber $p = Q$, so heifst das, das Übergewicht ist gleich dem Gesamt gewichte, oder wir lassen den Körper frei fallen. Die Gröfse g ist demnac die Beschleunigung oder der in jeder Sekunde eintretende Geschwindigkeit

[1]) Gauss, Intensitas vis magneticae terrestris in mensuram absolutam r vocata. Göttingen 1833. Poggend. Ann. Bd. XXVIII.

[2]) Biot et Arago, Recueil d'observations géodésiques, astronomiques physiques etc. Paris 1821.

zuwachs beim freien Fall, und die beiden letzten Ausdrücke liefern uns die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach t Sekunden und den in t Sekunden durchfallenen Raum.

§ 6.

Masse. Die in dem vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen für die gleichmäfsig beschleunigte Bewegung pflegt man in der Mechanik gewöhnlich in einer etwas veränderten Form zu schreiben, man setzt die Gröfse g in den Nenner und schreibt den Quotienten

$$\frac{Q}{g} = m,$$

somit die Gleichungen

$$c = \frac{p}{m}, \quad v = \frac{p}{m}t, \quad s = \frac{1}{2}\frac{p}{m}t^2.$$

Die so definierte Gröfse m nennt man die Masse des bewegten Körpers, so dafs also mechanisch gesprochen die Masse eines Körpers nichts ist als ein Zahlencoefficient, und zwar nicht nur der Quotient aus dem Gewichte des Körpers und der Beschleunigung desselben beim freien Fall, sondern auch nach der Gleichung

$$m = \frac{p}{c}$$

der immer für einen gegebenen Körper gleiche Quotient aus der bewegenden Kraft und der Beschleunigung, welche diese dem Körper erteilt.

Der Zweck der Einführung dieses Begriffes ist die Herstellung eines einheitlichen Mafssystems für die drei zusammengehörigen Gröfsen: Beschleunigung, Kraft und Masse. Die Bezeichnung des Beweglichen, insofern es träge ist oder Beharrungsvermögen besitzt, als Masse geht von der im täglichen Leben gewohnten Bedeutung des Wortes Masse aus. Das Mafs für die Gröfse der Masse des Beweglichen erhalten wir durch die Beschleunigung, welche bewegende Kräfte demselben erteilen; die Masse des Beweglichen ist in dem Mafse gröfser, wie die Beschleunigung kleiner ist, welche gleiche gegebene Kräfte ihm erteilen. Da wir sahen, dafs die Beschleunigung dem Gewichte des Beweglichen umgekehrt proportional ist, könnten wir die Masse sehr gut durch die Gewichte messen. Indes um ein zusammengehöriges Mafssystem zu erhalten, setzt man diejenige Masse gleich eins, welche durch die Einheit der Kraft die Einheit der Beschleunigung erhält. Da die Mechanik das Kilogramm als die Krafteinheit, das Meter als die Längeneinheit festgesetzt hat, so setzt sie jene Masse gleich eins, welche durch diese Kraft die Beschleunigung eines Meter erhält. Da nun die Masse eines Kilogramms durch den Druck eines Kilogramms die Beschleunigung g Meter erhält, so erhalten g Kilogramme diejenige eines Meters, die Mechanik setzt deshalb die Masse von g Kilogrammen gleich eins oder die Masse des Gewichtes Q Kilogramme gleich dem Quotienten aus dem Gewichte und der Zahl g.

Man könnte ebenso gut zur Herstellung eines einheitlichen Mafssystems anders verfahren, indem man von den drei zusammenhängenden Gröfsen: Kraft, Masse, Beschleunigung zwei andere festsetzt, und nach diesen die dritte bestimmt. Wir könnten ebenso gut die Mafse der Beschleunigung und der Masse festsetzen und aus diesen die Einheit der Kraft ableiten, also direkt das Gewicht des Beweglichen als Mafs der Masse wählen und

nun jene Kraft zur Einheit machen, welche dieser Masse die Beschleunigung von einem Meter erteilt. Dann wäre nicht das Kilogramm die Einheit der Kraft, sondern der g^{te} Teil desselben, das Kilogramm würde also gleich g Krafteinheiten sein.

Gauss hat in der That zur Messung der magnetischen Kräfte diesen Weg eingeschlagen, er hat das Mafs der Beschleunigung und der Masse festgesetzt und aus diesen die Krafteinheit abgeleitet[1]). Zur Messung der magnetischen Kräfte setzt er die Masse eines Milligramms als Masseneinheit, die Beschleunigung eines Millimeters als Beschleunigungseinheit und damit jene Kraft gleich eins, welche der Masse des Milligramms die Beschleunigung ein Millimeter erteilt. Da nun der Druck eines Milligramms der Masse desselben die Beschleunigung 1000 g Millimeter erteilt, wenn wir die Zahl g als in Metern gegeben festhalten, so hat der Druck von 1 Milligramm im Gaussschen Mafssystem 1000 g Einheiten, somit die Krafteinheit der Mechanik, das Kilogramm, 1000. 1000. 1000 $g = 10^9\, g$ Einheiten des Gaussschen Mafssystems.

Wir werden zunächst das in der Mechanik gebräuchliche Mafssystem festhalten.

§ 7.

Fundamentalgesetz der Kraftwirkung. Das im § 5 experimentell abgeleitete Gesetz, dafs eine konstante Kraft eine gleichmäfsig beschleunigte Bewegung hervorbringt, deren Beschleunigung der Gröfse der Kraft direkt proportional ist, liefert uns sofort ein Beispiel dafür, dafs, wie in der Einleitung hervorgehoben wurde, ein solches Gesetz nicht nur der Ausdruck derjenigen Thatsachen ist, welche es in einem allgemeinen Satze zusammenfafst, sondern dafs es gleichzeitig alle diejenigen Erscheinungen in sich schliefst, welche aus demselben folgen. Das Gesetz der gleichmäfsig beschleunigten Bewegung können wir als die experimentelle Grundlage der ganzen Mechanik bezeichnen, indem aus demselben sich das Fundamentalgesetz der Wirkung einer Kraft ergibt, das Gesetz nämlich, dafs die Wirkung einer Kraft nur durch sie selbst und von nichts Anderm bedingt ist.

Das Gesetz der gleichförmig beschleunigten Bewegung zeigt uns nämlich zunächst, dafs die Geschwindigkeitszunahme in gleichen Zeiten immer denselben Wert hat, die Geschwindigkeit ist am Ende der ersten Sekunde c_1, der zweiten $2c_1$, der dritten $3c_1$, sie wächst in jeder Sekunde um c_1, einerlei, welche Geschwindigkeit der Körper bei dem Beginne der Sekunde besafs. Wir schliefsen daraus, dafs die Wirkung einer Kraft auf einen beweglichen Körper immer dieselbe ist, einerlei, ob der Körper schon eine Bewegung besitzt oder nicht.

Ganz dasselbe zeigt die Betrachtung der unter Wirkung einer Kraft zurückgelegten Wege. Dieselben sind in den aufeinanderfolgenden Sekunden

$$\frac{c_1}{2} \quad 3\frac{c_1}{2} \quad 5\frac{c_1}{2}\ .$$

Wäre der Körper am Schlusse der ersten Sekunde der Wirkung der Kraft entzogen, so wäre er in gleichförmiger Bewegung mit der Geschwin-

[1]) Gauss, Intensitas vis magneticae terrestris in mensuram absolutam revocata. Göttingen 1833. Poggend. Ann. Bd. XXVIII.

digkeit c_1 weitergegangen, er hätte also in der zweiten Sekunde den Weg c_1 zurückgelegt. Infolge der dauernden Kraftwirkung hat er den Weg $3 \frac{c_1}{2}$ zurückgelegt. Die Differenz $3 \frac{c_1}{2} - c_1 = \frac{c_1}{2}$ ist also Folge der Wirkung der Kraft. Dieser Weg ist gleich dem in der ersten Sekunde zurückgelegten. Ebenso ist es in den folgenden Sekunden, oder es ergibt sich allgemein, dafs der durch die Wirkung einer Kraft in jeder Sekunde zurückgelegte Weg ganz unabhängig ist von der Geschwindigkeit, welche der Körper bereits besitzt.

Der soeben gezogene Schlufs, dafs die Wirkung einer Kraft ganz unabhängig ist von der Bewegung, die ein Körper schon besitzt, gilt zunächst nur in dem Falle, dafs die Kraft in der Richtung der Bewegung wirkt, welche der Körper schon besitzt. Indes läfst sich der Schlufs mit Hülfe bekannter Erfahrungen leicht verallgemeinern. Befinden wir uns in einem mit gleichförmiger Bewegung begabten Raume, etwa in dem Innern eines Schiffes, so nehmen wir die Bewegung nicht direkt wahr. Lassen wir dann auf irgend einen im Innern des Raumes befindlichen Körper eine Kraft wirken, so bewegt sich derselbe innerhalb des Raumes ganz so, wie wenn das Schiff in Ruhe wäre. Die Wirkung der Kraft auf den Körper ist also unabhängig von dessen mit dem Schiffe gemeinsamer Bewegung. Ja es bedarf zum Beweise dieses Satzes nicht einmal besonderer Beobachtungen, unsere Versuche zur Ableitung des Gesetzes der gleichförmigen Bewegung liefern schon den Beweis, da uns die Astronomie lehrt, dafs unsere Erde, mit allem was auf ihr ist, eine sehr komplizierte Bewegung im Raume hat, die wir an der Erde nicht wahrnehmen, weil unsere ganze Umgebung mit uns die gleiche Bewegung hat. Wir können deshalb ganz allgemein den Satz aufstellen:

„Wenn alle Punkte eines Systems eine gemeinschaftliche Bewegung haben, und einer von ihnen wird der Wirkung einer Kraft unterworfen, so ist die Bewegung, welche der Punkt infolge dieser Kraft in Beziehung auf das System annimmt, genau so, als habe die gemeinschaftliche Bewegung des Systemes nicht existiert.“

Das Gesetz der gleichmäfsig beschleunigten Bewegung sagt weiter, dafs die Beschleunigungen, welche verschiedene Kräfte an einem Systeme bewirken, der Gröfse der Kräfte proportional sind. Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf ein System, so ist die Beschleunigung gleich der Summe der Beschleunigungen, welche jede Kraft für sich, wenn sie allein wirksam wäre, hervorbringen würde. Es folgt somit, dafs die Wirkung einer Kraft unabhängig davon ist, ob gleichzeitig mit ihr eine andere zur Wirksamkeit kommt, oder dafs die Wirkung einer Summe von Kräften gleich ist der Summe der Wirkungen der einzelnen Kräfte.

Das Gesetz der gleichmäfsig beschleunigten Bewegungen beweist diesen Satz zunächst wiederum nur für gleichgerichtete Kräfte, man kann ihn durch, den vorhin angeführten, ähnliche Erfahrungen leicht verallgemeinern; indes ist das nicht einmal erforderlich, da wir diesen Satz schon allgemein aus dem Vorigen folgern können. Denn die Wirkung einer jeden von einer Summe gleichzeitig wirkender Kräfte ist Bewegung. Da wir nun ganz allgemein fanden, dafs die Wirkung einer Kraft durchaus unabhängig von einer bereits vorhandenen oder anderweitig erteilten Bewegung ist, so folgt

auch, dafs die Wirkung einer Kraft unabhängig von derjenigen einer andern ist.

Dieser Satz, dafs die Wirkung einer Kraft von nichts beeinflufst wird, ist der Fundamentalsatz der Mechanik, denn er setzt uns in den Stand, sofort die von einer Kraft bewirkte Bewegung zu bestimmen, wenn wir die Dauer ihrer Wirkung und die Masse des bewegten Systemes kennen. Wir haben mit demselben die experimentelle Grundlage der Mechanik gewonnen, aus welcher diese Wissenschaft deduktiv abgeleitet wird.

§ 8.

Das. Kräfteparallelogramm. Wir gehen zunächst dazu über, die unter Wirkung mehrerer nach verschiedenen Richtungen thätiger Kräfte stattfindende Bewegung etwas genauer zu betrachten und daraus einige Folgerungen zu ziehen.

Es ist an sich klar, dafs ein Körper, der sich infolge zweier nach verschiedener Richtung wirkender Kräfte bewegt, sich weder in der Richtung der einen noch in derjenigen der andern bewegen kann. Nach dem eben entwickelten Fundamentalsatze ist es aber leicht, die Richtung, nach welcher sich der Körper bewegt, zu bestimmen. Die Kräfte wirken jede, wie wenn die andere nicht da wäre; der Ort, welchen das Bewegliche nach der ersten Sekunde erreicht hat, wird daher gerade so erreicht werden, wenn wir die beiden Kräfte nach einander jede eine Sekunde wirken lassen. Legen wir daher durch den Punkt, welchen der Körper unter Wirkung der einen Kraft erreicht hat, eine gerade Linie und tragen auf dieser parallel der Richtung, in welcher die zweite Kraft für sich den Körper bewegt haben würde, die Länge auf, welche er unter Wirkung dieser Kraft in einer Sekunde zurückgelegt haben würde, so wird der Endpunkt dieser Länge wirklich der Punkt sein, in welchem sich der Körper nach gemeinschaftlichem Wirken der beiden Kräfte befindet, und die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ausgangspunkte wird der Richtung und Länge nach der Weg sein, den der Körper wirklich zurückgelegt hat.

Man sieht, dieser Weg fällt der Gröfse und Richtung nach mit der Diagonale eines Parallelogramms zusammen, welches wir aus den Längen konstruieren können, welche der Körper infolge jeder Kraft für sich in der gleichen Zeit zurücklegt, indem wir diese Längen im Ausgangspunkt in den entsprechenden Richtungen zusammenlegen und das durch diese Längen und den Winkel, den sie mit einander bilden, bestimmte Parallelogramm vervollständigen.

Diesen Weg hat der Körper allerdings durch die Wirkung zweier Kräfte zurückgelegt, welche nach verschiedenen Richtungen wirkten. Aber ganz denselben Weg hätten wir auch in derselben Zeit den Körper durch eine einzige in der Richtung der resultierenden Bewegung wirksame Kraft zurücklegen lassen können. Da dann diese Kraft die gleiche Wirkung hat wie die beiden zusammenwirkenden, so kann man die beiden vorhandenen Kräfte auch vollständig durch diese Kraft ersetzen. In dem Sinne nennt man auch die Kraft, welche der Richtung und Grösfe nach dieselbe Bewegung zur Folge hat als die beiden einzelnen Kräfte durch ihr Zusammenwirken, die aus diesen resultierende Kraft.

Diese Kraft, welche also die beiden wirklich vorhandenen der Gröfse und Richtung nach ersetzt, läfst sich durch eine ganz ähnliche Konstruktion ihrer Gröfse nach erhalten. Wenden wir nämlich anstatt der in gegebenen Zeiten durchlaufenen Wege zu unserer Konstruktion die durch die einzelnen Kräfte bewirkten Beschleunigungen an, so sind die Kräfte den Beschleunigungen proportional und können durch dieselben dargestellt werden. Wir gelangen daher unmittelbar zu dem Satze, dafs die aus zwei gegebenen in verschiedener Richtung wirkenden Kräften resultierende Kraft der Gröfse und Richtung nach durch die Diagonale des von jenen Kräften und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmten Parallelogramms gegeben wird.

Dieser für die theoretische Mechanik äufserst wichtige Satz, der nur eine Konsequenz des in dem vorigen Paragraphen Gesagten ist, wird der Satz vom Parallelogramm der Kräfte genannt.

Man sieht, wie man dadurch imstande ist, die Wirkung beliebig vieler nach verschiedenen Richtungen thätiger, an einem Punkte angreifender Kräfte auf jene einer einzigen zurückzuführen, welche alle jene vollständig ersetzt, indem man die Kräfte nur paarweise zusammensetzt.

Um die Gröfse der aus zwei Kräften P und P_1, welche den Winkel α mit einander bilden, resultierenden Kraft zu erhalten, haben wir nur den bekannten Satz aus der ebenen Geometrie über die Gröfse der Diagonale eines Parallelogramms anzuwenden; die Resultante R ist danach gegeben durch

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + 2PP_1 \cos \alpha.$$

Umgekehrt erhellt aber auch, dafs eine jede Bewegung als die Resultierende aus zwei Seitenbewegungen aufgefafst, somit auch die jene Bewegung bestimmende Kraft als die Resultierende zweier gedachter Seitenkräfte aufgefafst werden kann. Da nun jede Linie als Diagonale unendlich vieler Parallelogramme aufgefafst werden kann, so kann man jede Kraft auf unendlich viele verschiedene Arten in Seitenkräfte zerlegen; jede dieser Seitenkräfte kann dann wieder als Resultierende anderer Seitenkräfte betrachtet werden, so dafs also jede Kraft in unendlich viele Seitenkräfte zerlegt werden kann.

Diese letzten Sätze sind in der Mechanik von hoher Bedeutung, da sie uns in den Stand setzen, die Wirkung, welche eine Kraft nach einer von ihrer eigenen verschiedenen Richtung ausüben kann, zu berechnen. Kann z. B. ein Körper sich nur nach einer bestimmten Richtung bewegen, und wirkt auf diesen eine konstante Kraft, deren Richtung mit der Bewegungsrichtung des Körpers den Winkel α bildet, so erhalten wir die Gröfse der die Bewegung des Körpers bewirkenden Seitenkraft, wenn wir die gegebene Kraft so zerlegen, dafs die eine der Seitenkräfte in die Richtung der Bewegung fällt, die andere zu ihr senkrecht ist. Letztere trägt zur Bewegung gar nichts bei, die erstere Komponente ist es somit, welche die Bewegung bedingt. Nennen wir die ursprüngliche Kraft P, die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente R, so ist

$$R = P \cos \alpha,$$

wie sich unmittelbar daraus ergibt, dafs P die Diagonale eines Rechtecks ist, dessen eine Seite R mit P den Winkel α bildet.

Haben wir eine ganze Reihe von Kräften P, P_1, P_2, . . . di
Bewegungsrichtung die Winkel α, α_1, α_2 . . . bilden, so ist die
diesen resultierende, die Bewegung bestimmende Kraft

$$R = P \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \cdots = \Sigma P \cos$$

wenn das Zeichen Σ die Summen aller einzelnen Produkte $P \cos \alpha$

Experimentelle Belege für die Richtigkeit dieser Sätze werden
viele finden; wir erwähnen hier eines der am häufigsten vorkomme
spiele, die Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene. Wir setz
dafs der Körper ohne jegliche Reibung die schiefe Ebene herabroll

Nehmen wir an, die schiefe Ebene bilde mit dem Hori
Winkel α und der aufgelegte Körper habe das Gewicht p. Die
der Schwere ist die der Vertikalen. Wir sehen dann die Schwe
eine Resultierende zweier Kräfte an, deren eine auf der schief
senkrecht steht, während die andere mit ihr parallel ist. Mit der
der Schwere bildet die erstere den Winkel α, die zweite de
$90^0 - \alpha$; nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist d
daher gleich $p \cos \alpha$ und die zweite $p \sin \alpha$. Die erstere dies
wird einen Druck gegen die schiefe Ebene bewirken und zu einer
nichts beitragen; die zweite jedoch, welche parallel der schiefen
wird dem Körper eine Bewegung die schiefe Ebene herab zu erteil
Ihr Wert ist $p \sin \alpha$, also mit dem Neigungswinkel veränderlich.
Körper in Ruhe bleiben, so mufs also eine Kraft $p \sin \alpha$ paralle
schiefe Ebene hinaufgerichtet angebracht werden. Der Versuch be
Denn befestigt man an dem Körper einen Faden und führt ihn der schie
parallel über eine Rolle, so mufs man an der andern Seite des Fadens
$p \sin \alpha$ anhängen, um den Körper auf der schiefen Ebene festzuh

Läfst man den Körper rollen, so ist die ihn bewegende K
dem Vorigen $p \sin \alpha$. Diese erteilt ihm die Beschleunigung

$$G = g \frac{p \sin \alpha}{p} = g \sin \alpha.$$

Die Gleichungen seiner Bewegung sind demnach

$$v = g \sin \alpha \, t \qquad s = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \, t^2.$$

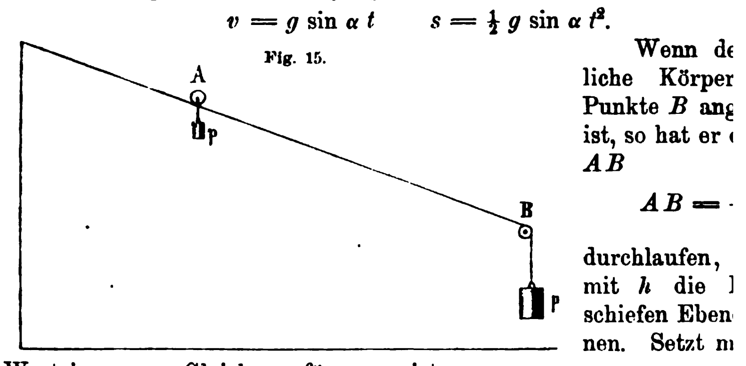


Fig. 15.

Wenn de
liche Körper
Punkte B ang
ist, so hat er
AB

$$AB = \cdot$$

durchlaufen,
mit h die
schiefen Eben
nen. Setzt m

Wert in unsere Gleichung für s, so ist

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \, t^2$$

$$\frac{\sqrt{2gh}}{g \sin \alpha} = t$$

für die Dauer des Falls und

$$\sqrt{2gh} = v$$

für die Geschwindigkeit, mit der A in B ankommt. Bei gleicher Höhe h des Ausgangspunktes A über B ist somit die Dauer des Falles dem Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene umgekehrt proportional; die Geschwindigkeit v dagegen ist von dieser Neigung unabhängig, sie ist einfach gleich jener, welche der Körper erhält, wenn er die Höhe h frei durchfallen hat. Denn die Geschwindigkeit beim freien Fall ist nach der Zeit t

$$v = gt.$$

Um die Höhe h zu durchfallen ist die Zeit t nach der Gleichung

$$h = \tfrac{1}{2} gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

somit die Geschwindigkeit v

$$v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}.$$

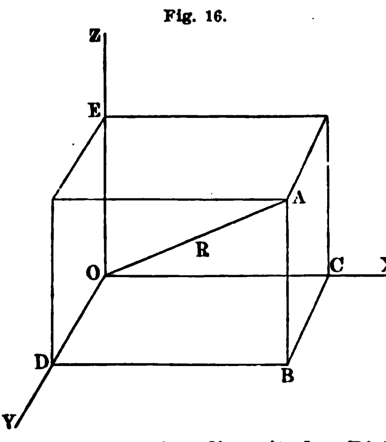
Schon Galilei hat diese Sätze für die Bewegung auf der schiefen Ebene experimentell aufgefunden, und an derselben die Gesetze der gleichmäfsig beschleunigten Bewegung erkannt.

Von der schiefen Ebene macht man in der Praxis vielfache Anwendung, um Lasten eine gewisse Höhe hinaufzuschaffen. Jede Schraube ist eine um einen Cylinder gewickelte schiefe Ebene, ebenso beruht die Wirksamkeit des Keiles auf den Gesetzen der schiefen Ebene.

§ 9.

Bedingungen des Gleichgewichtes eines Punktes, auf den beliebig viele beliebig gerichtete Kräfte wirken. Die in dem letzten Paragraphen entwickelten Sätze bieten uns das Mittel zu bestimmen, wann ein fester Körper, der von beliebig vielen beliebig gerichteten Kräften afficiert wird, eine fortschreitende Bewegung annehmen kann, wann nicht. Greifen die Kräfte an demselben Punkte des Körpers an, so fallen die Gleichgewichtsbedingungen mit denen eines materiellen Punktes zusammen; ja sehen wir von den später zu betrachtenden drehenden Bewegungen ab, so ist die Bedingung, dafs die Kräfte alle an denselben Punkt angreifen müssen, nicht einmal erforderlich, es fallen dann allgemein die Bedingungen des Gleichgewichtes eines festen Körpers mit denen eines materiellen Punktes zusammen. Setzen wir zunächst voraus, dafs der Punkt sich vollkommen frei bewegen kann, so ist die für das Gleichgewicht notwendige Bedingung, dafs wenn wir die Summe der Komponenten der Kräfte nach irgend einer beliebigen Richtung bilden, diese Summe immer gleich Null ist, wie wir diese Richtung auch wählen. Das ist aber der Fall, wenn die Summe der nach drei durch den Punkt gelegten zu einander senkrechten Richtungen gebildeten Komponenten für jede dieser Richtungen einzeln gleich Null ist.

Denn sind (Fig. 16) OX, OY, OZ die drei zu einander senkrechte den Punkt O gelegten Richtungen, und sind die nach diesen Richtu bildeten Komponenten gleich Null, so folgt zunächst, da nach OY kei wirkt, dafs der Punkt O sich r der durch OX und OZ gelegte bewegen kann. Jede Kraft P welche den Punkt aus diese zieht, würde mit OY einen W bilden, der kleiner ist als 9 nun die parallel OY gebildete nente dieser Kraft $P \cdot \cos\beta$ sei so wäre dieselbe und damit die OY gerichtete Komponente de überhaupt nicht gleich Null. dafs die Summe aller para gerichteten Komponenten gle ist, folgt ferner, dafs der Pu aus der Linie OX in der Ebe entfernt wird; denn auch da eine Kraft nötig, die mit der Richtung OZ einen Winkel γ bil kleiner ist als 90°. Die Komponente dieser Kraft parallel OZ $P \cdot \cos\gamma$, somit wieder von Null verschieden sein. Da nun auch die OX gerichtete Komponente gleich Null ist, so folgt schliefslich, Punkt O auch in dieser Linie nicht bewegt werden kann, somit Punkt überhaupt in Ruhe ist.



Wirken demnach auf den Punkt O beliebige Kräfte P, deren Ri durch die Winkel α, β, γ gegeben sind, welche sie mit den festen Ri OX, OY, OZ bilden, so können wir die Bedingung des Gleichgewic der schon im vorigen Paragraphen gewählten Bezeichnungsweise s

$$\Sigma P \cos\alpha = 0 \qquad \Sigma P \cos\beta = 0 \qquad \Sigma P \cos\gamma = 0.$$

Sind diese Komponenten nicht gleich 0, so haben sie eine Resul welche wir mit R bezeichnen wollen, die mit den drei Richtungen OX, die Winkel a, b, c bilden möge. Die Gröfse dieser Resultierenden Richtung ist dann vollständig dadurch bestimmt, dafs ihre par drei Richtungen genommenen Komponenten den Komponenten d handenen Kräfte einfach gleich sein müssen, oder dafs

$$\Sigma P \cos\alpha = R \cos a \qquad \Sigma P \cos\beta = R \cos b \qquad \Sigma P \cos\gamma = R$$

sein mufs. Daraus folgt dann weiter

$$R^2 (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) = (\Sigma P \cos\alpha)^2 + (\Sigma P \cos\beta)^2 + (\Sigma P c$$

In der Stereometrie wird nun bewiesen, dafs wenn a, b, c die sind, welche eine Richtung OA (Fig. 16) mit den drei zu einand rechten Richtungen OX, OY, OZ bildet, die Quadratsumme

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

ist; daraus ergibt sich dann, wenn wir zugleich

$$\Sigma P \cos\alpha = X \qquad \Sigma P \cos\beta = Y \qquad \Sigma P \cos\gamma = Z$$

setzen,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

als Ausdruck für die Gröfse der Resultierenden. Stellen wir also, wie im vorigen Paragraphen, die Komponenten der Kräfte auf den drei Richtungen und ebenso die Resultierende durch Linien dar, so ergibt sich, dafs die Resultierende als die Diagonale eines Parallelepipeds angesehen werden kann, dessen drei Seiten die parallel den drei festen Richtungen genommenen Komponenten aller Kräfte sind.

Ist OA (Fig. 16) diese Resultante, und sind OC, OD, OE die Komponenten, so erhalten wir, da OCA, ODA, OEA rechtwinklige Dreiecke sind, für die die Richtung der Resultierenden bestimmenden Winkel

$$\cos a = \frac{OC}{OA} = \frac{X}{R}; \quad \cos b = \frac{OD}{OA} = \frac{Y}{R}; \quad \cos c = \frac{OE}{OA} = \frac{Z}{R}.$$

Kennen wir somit die drei Komponenten X, Y, Z aller Kräfte, so ist dadurch Gröfse und Richtung der resultierenden Kraft, somit auch, wenn das Gewicht des in O befindlichen Körpers bekannt ist, die ganze Bewegung desselben bestimmt.

Kann der Punkt O sich nicht frei nach allen Richtungen bewegen, ist er etwa genötigt auf einer festen Oberfläche zu bleiben, so ist die im Vorigen abgeleitete Bedingung des Gleichgewichts nicht notwendig; es genügt dann, dafs die an ihm angreifenden Kräfte den Körper in der Oberfläche nach keiner Richtung hin bewegen können; und dazu ist es nur notwendig, dafs die Resultierende aller Kräfte auf der Oberfläche senkrecht ist. Welche Bedingungen dazu erforderlich sind, das mathematisch zu formulieren ist Aufgabe der theoretischen Mechanik, auf deren Lehrbücher wir deshalb verweisen.

§ 10.

Allgemeine Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Wurfbewegung. Ebenso wie wir durch die in den §§ 7 und 8 abgeleiteten allgemeinen Gesetze imstande waren, die Bedingungen des Gleichgewichts zu erhalten, sind wir nun auch imstande ganz allgemein zu entwickeln, welches die Bewegung eines Körpers unter Wirkung einer konstanten Kraft ist.

Lassen wir auf einen Körper vom Gewichte Q die Kraft P einwirken, so wird die Beschleunigung des Körpers in der Richtung, nach welcher die Kraft wirkt,

$$G = g\,\frac{P}{Q}.$$

Die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit ist

$$v = g\,\frac{P}{Q}\,t.$$

Besafs der Körper beim Beginne der Wirkung der Kraft bereits die Geschwindigkeit a, so setzt nach § 7 die neuerlangte Geschwindigkeit sich einfach mit dieser zusammen; ist die Geschwindigkeit a mit der neuen gleich gerichtet, so addieren sich die beiden, ist sie entgegengesetzt gerichtet, so subtrahieren sie sich. Wir können die Geschwindigkeit in diesen beiden Fällen somit nach der Zeit t allgemein setzen

$$v = a \pm g\,\frac{P}{Q}\,t.$$

Vermöge der Geschwindigkeit a durchläuft der Körper in der Zeit t den Raum at, vermöge der ihm von der Kraft P erteilten Geschwindigkeit den Raum $\frac{1}{2} g \frac{P}{Q} t^2$. Hat der Körper im Beginne der Zeit t bereits den Raum C durchlaufen, so wird der am Ende der Zeit t durchlaufene Raum

$$s = C + at \pm \frac{1}{2} g \frac{P}{Q} t^2.$$

Setzen wir hierin C und a gleich Null, so erhalten wir den mit der Fallmaschine experimentell entwickelten Ausdruck, und setzen wir $P = Q$ und nehmen an, die Kraft P sei die Schwere, unsern Ausdruck für den freien Fall der Körper.

Die Bewegung geworfener Körper ist ein specieller Fall dieser allgemeinen Sätze. Untersuchen wir zunächst den Fall, daſs ein Körper mit der Geschwindigkeit a senkrecht in die Höhe geworfen wird.

Für die Geschwindigkeit nach t Sekunden erhalten wir, da in diesem Falle $P = Q$ ist,

$$v = a - g\,t,$$

dieselbe wird mit wachsender Zeit immer kleiner, sie wird gleich Null, der Körper hört auf zu steigen, wenn

$$a = gt; \quad t = \frac{a}{g}$$

ist. Die Höhe, bis zu welcher der Körper dann aufgestiegen ist, erhalten wir durch Einsetzen dieses Ausdruckes für t in die für s erhaltene Gleichung:

$$s = a \frac{a}{g} - \frac{1}{2} g \frac{a^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{g}.$$

In dieser Höhe angekommen, hört er auf zu steigen und bleibt einen Augenblick in Ruhe, aber sofort wirkt die Schwere auf ihn ein und zieht ihn wieder herab. Seine rückgängige Bewegung ist durch die Ausdrücke

$$v = gt; \quad s = \frac{1}{2} gt^2$$

bestimmt. Auf dem Boden angelangt hat er den Weg $\frac{1}{2} \frac{a^2}{g}$ durchlaufen: setzen wir diesen Wert in die Gleichung für s, so wird

$$\frac{1}{2} \frac{a^2}{g} = \frac{1}{2} gt^2; \quad t = \frac{a}{g},$$

und die Geschwindigkeit, die er dann besitzt, ist

$$v = g \frac{a}{g} = a.$$

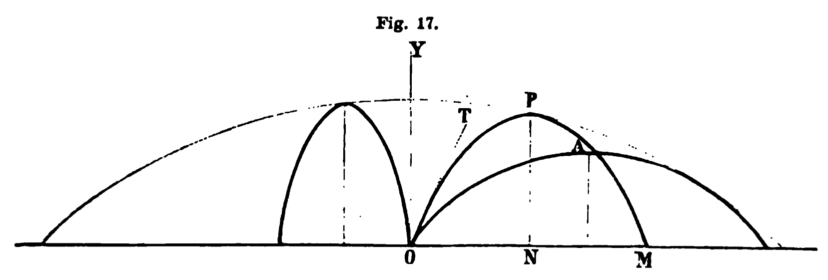
Der Körper braucht also, um die Höhe, bis zu der er gestiegen ist, zu durchfallen, genau dieselbe Zeit, die er zum Ersteigen der Höhe gebrauchte, und die Geschwindigkeit, mit der er an seinem Ausgangspunkt ankommt, ist genau von gleicher Gröſse, aber entgegengesetzter Richtung als die, mit der er zu steigen begann.

Letztere Bemerkung können wir unmittelbar dahin verallgemeinern, daſs ein Körper, der von einem Ausgangspunkte mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausgeht und unter Wirkung von Kräften auf seinem Wege

zur Ruhe kommt, stets in den Ausgangspunkt mit der ursprünglichen Geschwindigkeit zurückkommen mufs, wenn er auf demselben Wege unter Wirkung derselben Kräfte zurückkehrt. Dabei ist es sogar gleichgiltig, ob die Kräfte konstant oder veränderlich sind.

Untersuchen wir jetzt den Fall, dafs die Richtung der dem Körper ursprünglich gegebenen Bewegung nicht mit derjenigen zusammenfällt, welche die auf ihn wirkenden Kräfte ihm erteilen. Es wird genügen diesen Fall an einem speciellen Beispiel, an der Bewegung eines in irgend einer Richtung geworfenen Körpers zu erörtern. Nehmen wir an, dafs vom Punkte O (Fig. 17) aus ein Körper mit der Geschwindigkeit a in der

Fig. 17.



Richtung OT geworfen werde. Gemäfs unseres in § 7 entwickelten Grundsatzes wirken zwei Kräfte ganz unabhängig auf ihn ein; die erstere hat ihm in der Richtung OT die Geschwindigkeit a erteilt, die zweite, die Wirkung der Schwere erteilt ihm in jeder Sekunde nach der Richtung der Vertikalen die Beschleunigung g. Die wirklich stattfindende Bewegung resultiert aus beiden.

Die Geschwindigkeit a können wir nach § 8 in zwei Komponenten zerlegen, in eine vertikale und eine horizontale. Bezeichnen wir den Winkel TON mit α, so ist erstere $a \sin \alpha$, letztere $a \cos \alpha$. Die Schwere wirkt in der Richtung der vertikalen und zwar in entgegengesetztem Sinne mit $a \sin \alpha$. Nennen wir die horizontale Geschwindigkeit v', die vertikale v'', so erhalten wir demnach für die Geschwindigkeit zur Zeit t

$$v' = a \cos \alpha \qquad v'' = a \sin \alpha - gt.$$

Man findet nach dem Frühern daraus für die in vertikaler und horizontaler Richtung zurückgelegten Wege

$$\text{für den horizontalen } x = a \cos \alpha \cdot t$$
$$\text{für den vertikalen } \quad y = a \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2,$$

wo y positiv in der Richtung nach oben genommen ist.

Aus diesen Ausdrücken findet man in jedem Augenblicke den Ort des Körpers, wenn man in horizontaler Richtung von O aus die für die Zeit t berechnete Gröfse x aufträgt und am Endpunkte dieser Linie das für die gleiche Zeit berechnete y vertikal anlegt. Der durch den Endpunkt des y bestimmte Punkt ist dann der Ort des Körpers. Die Linie, welche wir durch alle so bestimmten Orte des Körpers hin legen, ist die Bahn des geworfenen Körpers. Entwickeln wir aus den zu gleicher Zeit bestehenden

x und y die Gröfse t, so ist

$$t = \frac{x}{a \cos \alpha}$$

$$t = \frac{a \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2yg}}{g}.$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke gleich, so gibt uns die Gleichung die Beziehung, welche immer zwischen den gleichzeitigen Werten von x und y bestehen mufs, oder lösen wir die Gleichung nach y auf, so erhalten wir in der Gleichung zu jedem x das zugehörige y. Lassen wir demnach x alle Werte von Null an durchlaufen, so geben uns die Endpunkte aller dazugehörigen y die Bahn des Körpers.

Wir haben

$$\frac{gx}{a \cos \alpha} = a \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2gy}$$

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - x^2 \frac{g}{2a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Bezeichnen wir mit h die Höhe, bis zu welcher der senkrecht mit der Geschwindigkeit a emporgeworfene Körper aufgestiegen wäre, so haben wir wie vorhin

$$a^2 = 2gh,$$

und setzen wir das in unsern Ausdruck für y

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha}.$$

Die analytische Geometrie sagt uns nun, dafs eine Linie, für deren Punkte diese Beziehung zwischen x und y, den Koordinaten besteht, eine Parabel sei, die symmetrisch um eine vertikale Axe NP liegt, so dafs also die Bahn des Körpers aus einem aufsteigenden Stücke OP und einem absteigenden Stücke PM besteht, die symmetrisch zur Axe der Parabel sind.

Setzen wir $y = 0$, so erhalten wir zwei Werte für x, nämlich

$$x' = 0; \quad x'' = 2h \sin 2\alpha.$$

In dem Abstande $x'' = OM$ schneidet also die Bahn des Körpers zum zweiten Male die Horizontale, der Abstand gibt also den Weg, den der Körper in horizontaler Richtung zurückgelegt hat, wenn er wieder zu Boden fällt; es ist die Wurfweite.

Man sieht, dieselbe wächst anfänglich mit α, erreicht ihren gröfsten Wert für $\alpha = 45^0$ und nimmt dann wieder ab. Aufserdem ist sie proportional der Gröfse h, also dem Quadrate der dem Körper erteilten Anfangsgeschwindigkeit a.

Setzen wir $\alpha = 45 \pm m$, so ist die Wurfweite

$$2h \sin (90^0 \pm 2m) = 2h \cos 2m.$$

Für gleiche Neigungen über und unter 45^0 ist also die Wurfweite dieselbe.

Die höchste Höhe, welche der Körper erreichen kann, entspricht dem Punkte N der Mitte der Wurfweite. Setzen wir daher $x = h \sin 2\alpha$, so erhalten wir für y

$$y = h \sin^2 \alpha.$$

Diese Höhe wächst mit α und wird am gröfsten, wenn $\alpha = 90^0$, wenn der Körper senkrecht in die Höhe geworfen ist. Sie ist überdies mit h dem Quadrate der erteilten Anfangsgeschwindigkeit proportional.

Die Geschwindigkeit ist in Punkten der Bahn, welche in gleicher Höhe liegen, gleich. Denn in der That, bezeichnen wir wieder die auf einander senkrechten Komponenten der Geschwindigkeit mit v', v'', so folgt die wirkliche Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn V aus

$$V^2 = v'^2 + v''^2 = a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha - 2agt \sin \alpha + g^2 t^2$$

$$= a^2 - 2g\left(at \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2\right) = a^2 - 2gy,$$

woraus unmittelbar folgt, dafs V für gleiche y, also für Punkte gleicher Höhe der Bahn gleich ist; die Geschwindigkeiten sind symmetrisch zur mittelsten Höhe der Bahn PN. Bei P ist die Geschwindigkeit

$$V^2 = a^2 - 2gy = a^2 - 2gh \sin^2 \alpha = a^2 - a^2 \sin^2 \alpha$$

$$V = a \cdot \cos \alpha.$$

Die vertikale Bewegung ist dort Null und nur noch die horizontale Komponente der Anfangsgeschwindigkeit vorhanden.

Die Zeit, welche der geworfene Körper braucht, um seinen höchsten Punkt zu erreichen, ist darnach gleich jener, in welcher er niederfällt.

Man kann es sich nun zur Aufgabe machen, jenen Wert von α zu bestimmen, unter welchem man den Körper zur Erreichung eines bestimmten Punktes bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit werfen mufs. Nennt man die Koordinaten dieses Punktes x', y', so haben wir zur Bestimmung unseres Winkels α nur unsere Gleichung für y, in welcher wir setzen

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tang^2 \alpha,$$

also

$$y' - x' \tang \alpha + \frac{x'^2}{4h}(1 + \tang^2 \alpha) = 0$$

nach α aufzulösen. Wir erhalten daraus

$$\tang \alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - x'^2 - 4hy'}}{x'}.$$

Es gibt aufser im Falle, wo die Gröfse unter dem Wurzelzeichen Null ist, zwei Werte für α, entsprechend dem positiven und negativen Zeichen der Wurzelgröfse. Es gibt somit aufser in dem erwähnten Falle zwei Parabeln, in denen sich der Körper zur Erreichung seines Zieles bewegen kann.

Ist die Gröfse unter dem Wurzelzeichen positiv, so ist die Lösung der Aufgabe möglich, d. h. alle Punkte, die durch x' und y' so bestimmt sind, dafs

$$4h^2 - x'^2 - 4hy' > 0,$$

können bei der durch h bestimmten Anfangsgeschwindigkeit getroffen werden, denn wir erhalten für alle zwei Werte für α.

Ist der Ausdruck negativ, so wird $\tang \alpha$ imaginär, d. h. die Punkte, deren x' und y' so bestimmt sind, dafs sie den Ausdruck

$$4h^2 - x'^2 - 4hy' < 0$$

machen, sind nicht erreichbar.

Die nicht erreichbaren sind von den erreichbaren Punkten getrennt durch eine Linie, deren x und y durch die Gleichung

$$4h^2 - x^2 - 4hy = 0,$$

also

$$x^2 = 4h(h - y)$$

mit einander verknüpft sind. Nach den Lehren der analytischen Geometrie ist das eine Parabel, deren Axe mit der in O errichteten Oy zusammenfällt, deren Konkavität gegen die Horizontale gerichtet ist, deren Scheitel die Höhe h und deren Parameter die Länge $4h$ hat. Mit h, also mit der Anfangsgeschwindigkeit a, ändert sich die Grenze der erreichbaren Punkte.

Wenn man alle diese Folgerungen experimentell prüft, so findet man sie mit Abweichungen, welche in dem Widerstand der Luft und einigen andern später zu betrachtenden störenden Umständen ihren Grund haben, bestätigt.

§ 11.

Verschiedene Arten die Kraft zu messen; Princip von der Erhaltung der Kraft oder Arbeit. Als Mafs für die Kraft haben wir bisher das Gewicht betrachtet, welches an einem Punkte der Kraft entgegenwirkend angebracht werden mufs, um derselben das Gleichgewicht zu halten. Wir sind indes jetzt auch imstande die Kräfte nach den Wirkungen zu messen, welche sie auf verschiedene Massen hervorbringt. Kennen wir nämlich die Beschleunigung G, welche eine Kraft der Masse M, diese jetzt als Quotient aus dem Gewichte des bewegten Körpers und der Zahl g bezeichnet, erteilt, so erhalten wir gemäfs § 6

$$P = GM$$

oder die Kraft, welche auf die Masse M wirkend derselben die Beschleunigung G erteilt, ist gleich dem Produkte aus dieser Masse M und dieser Beschleunigung G.

Aus unserer Gleichung für die Geschwindigkeit der Bewegung eines Körpers von der Masse M unter Wirkung der konstanten Kraft P

$$v = \frac{P}{M} t$$

erhalten wir unmittelbar

$$Mv = Pt \cdots \text{I.}$$

Das Produkt aus der bewegten Masse und der von ihr erreichten Geschwindigkeit ist gleich dem Produkte aus der wirkenden Kraft und der Zeit, während welcher sie gewirkt hat.

Wirkt ein anderes Mal die Kraft P_1 auf die Masse M_1, und erteilt sie ihr in derselben Zeit t die Geschwindigkeit v_1, so ist

$$M_1 v_1 = P_1 t$$

und

$$Mv : M_1 v_1 = Pt : P_1 t = P : P_1.$$

Man nennt das Produkt Mv die Bewegungsgröfse der Masse M; obige Proportion sagt daher, dafs die zwei Massen bewegenden Kräfte sich verhalten wie die Bewegungsgröfsen dieser Massen, jedoch unter der Voraus-

lafs die Kräfte gleiche Zeit gewirkt haben. Das Produkt Pt Antrieb der Kraft in der Zeit t.
haben ferner die Gleichungen

$$v = \frac{P}{M} t; \quad s = \frac{1}{2} \frac{P}{M} t^2$$

er ersten dieser beiden Gleichungen

$$v^2 = \frac{P^2}{M^2} t^2.$$

r Gleichung und der zweiten der eben hingeschriebenen folgt

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{P}{M} s$$

$$\frac{1}{2} Mv^2 = Ps \cdot \cdot \cdot \text{II.}$$

Produkt aus der halben Masse und dem Quadrate der Geschwin-relche sie besitzt, ist gleich dem Produkte aus der bewegenden der Weglänge, auf welcher sie der Masse M diese Geschwindig-t hat. Wirken zwei Kräfte P und P_1 eine gleiche Weglänge s auf zwei Massen M und M_1 und erteilen ihnen die Geschwindig-md v_1, so besteht demnach die Gleichung

$$\frac{1}{2} Mv^2 : \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = P : P_1$$

$$Mv^2 : M_1 v_1^2 = P : P_1.$$

Produkte $\frac{1}{2} Mv^2$ oder auch Mv^2 nennt man die lebendige Kraft M. Nennt man letzteres die lebendige Kraft, so nennt man die Hälfte des letztern, wohl die lebendige Potenz. Wir werden erstere Gröfse, welche sich unmittelbar aus den Bewegungs-en ergibt, als lebendige Kraft bezeichnen. Wir können dann obige dahin interpretieren, dafs die bewegenden Kräfte, welche auf ien den gleichen Weg hindurch gewirkt haben, sich verhalten wie ligen Kräfte, welche sie den Massen erteilt haben.

Produkt Ps, aus der Kraft und dem Wege, durch welchen gewirkt hat, nennt man die Arbeit der Kraft; diese Benennung f der Anschauung, dafs eine Kraft auf dem ganzen Wege, auf sie gewirkt hat, einen ihr an Gröfse genau gleichen Widerstand nden hat, eine Anschauung, die sich unmittelbar aus der Eigen-Trägheit oder dem von Newton zuerst ausgesprochenen Princip heit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt.

es Princip sagt aus, dafs wenn ein Körper auf einen andern eine einen Zug oder einen Druck ausübt, dafs er dann von dem ine ebenso grofse Gegenwirkung, also einen ebenso starken Gegen-Gegendruck erfährt. Dasselbe gibt sich überall in der Natur zu ziehen wir einen Körper mit einer gewissen Kraft zu uns hin, wir von demselben ebenso stark angezogen, denn ziehen wir mit t an einem an einer Wand befestigten Seil, so fallen wir zurück, eifst. Üben wir auf einen Körper einen Druck aus, so erfahren Gegendruck von derselben Stärke; wird z. B. ein Gas komprimiert,

so übt die Spannung des Gases in jedem Momente auf den Stempel einen genau ebenso grofsen Gegendruck aus, den wir in später zu besprechender Weise mit einem Manometer messen können. Der Magnet zieht das Eisen an, genau ebenso stark zieht aber, wie wir uns mit einer Wage überzeugen können, das Eisen den Magnet an.

Wie in diesen Fällen, so in allen, so auch wenn eine Kraft einen Körper in Bewegung setzt; während der ganzen Bewegung hat dieselbe einen ihr an Gröfse genau gleichen Gegenzug zu überwinden, um den augenblicklichen Bewegungszustand des Körpers zu ändern. Dafs dieser Gegenzug auch dann in der That vorhanden ist, können wir direkt durch den Versuch nachweisen. Man hänge das Übergewicht p bei der Fallmaschine an das Gewicht P mit Hülfe einer Feder, so lange P auf dem obern Teller steht. Die Feder kommt dann in einen gewissen Zustand der Spannung, der beweist, dafs die Feder nach entgegengesetzten Richtungen von gleich grofsen Kräften gezogen wird. Denn die Feder biegt sich so lange, bis die nach beiden Seiten ziehenden Kräfte genau gleich sind. Läfst man dann das System sich bewegen, so bleibt die Feder ganz genau in derselben Weise gespannt, wie grofs auch die zu bewegende Masse und wie grofs auch die Geschwindigkeit ist.

Die Kraft P übt also während des ganzen Weges, durch welchen sie die Last M bewegt, den Druck P aus, wir nennen deshalb das Produkt Ps ebenso die Arbeit der Kraft, wie wir die beim Heben einer Last geleistete Arbeit durch das Produkt der gehobenen Last in die gehobene Strecke messen. Dafs dort aber die Arbeit durch dieses Produkt gemessen werden mufs, ergibt die einfache Überlegung, dafs es dieselbe Arbeit ist, wenn wir 1 Kilogr. auf die Höhe von 2 M. heben, wie wenn wir 2 Kilogr. auf die Höhe von 1 M. heben. Denn in beiden Fällen müssen wir zweimal 1 Kilogr. auf die Höhe von 1 M. heben.

Die Gleichung

$$Ps = \tfrac{1}{2} mv^2$$

ist zugleich der Ausdruck eines wichtigen physikalischen Princips, welches besonders in der neueren Zeit immer vollständiger erkannt ist, und dem wir an vielen Stellen begegnen werden, des Princips von der Erhaltung der Kraft. Dieses Princip sagt aus, dafs in der Natur keine Kraft gewonnen und keine verloren werden kann. Wenn demnach eine Kraft irgend eine Arbeit leistet, so ist dieselbe nicht verloren, nicht verbraucht, sondern nur in eine andere Form umgesetzt, in der man sie vollständig wiederfindet. In einem speciellen Falle zeigt das obige Gleichung, sie zeigt, dafs die Arbeit der Kraft P sich vollständig als lebendige Kraft in der bewegten Masse wiederfindet. Wir können auch in der That dieselbe Arbeit aus dem Körper wiedergewinnen, wenn wir ihm seine Bewegung nehmen. Wie wir später sehen werden, geschieht das z. B. dann, wenn wir eine vollkommen elastische Kugel auf eine andere ihr gleiche stofsen lassen, welche sich in Ruhe befindet. Die ursprünglich bewegte Kugel kommt zur Ruhe, die gestofsene bewegt sich aber mit genau derselben Geschwindigkeit weiter. Gerade der Umstand, dafs eine Masse M, welche die Geschwindigkeit v besitzt, eine Arbeit leisten kann, welche $\tfrac{1}{2}Mv^2$ gleich ist, wenn man sie zur Ruhe bringt, berechtigt dazu, dieses Produkt als lebendige Kraft dieser Masse zu bezeichnen.

Wie in diesem Falle, so können wir leicht das Princip, dafs keine raft verloren werden kann, auch in andern Fällen nachweisen. Heben wir n Gewicht P durch die Höhe s, so haben wir die Arbeit Ps nur in dieses ewicht übertragen, das niedersinkende Gewicht kann genau dieselbe Arbeit ieder leisten.

In manchen Fällen glaubte die ältere Physik einen wirklichen Verlust in Kraft annehmen zu müssen, so z. B. bei der Reibung; wir werden später n Nachweis liefern, dafs auch hier kein Verlust, nur eine Umsetzung der raft in andere Formen, vorzüglich in Wärme, stattgefunden hat.

§ 12.

Bewegung infolge inkonstanter Kräfte und Mafs derselben.

nsere experimentell abgeleiteten Sätze über die Bewegungen, welche durch nstante Kräfte hervorgebracht werden, und die allgemeinen Sätze über e Wirkung von Kräften, welche wir daraus ableiteten, gestatten uns nun hliefslich auch im allgemeinen zu bestimmen, welcher Art die Bewegungen in müssen, welche inkonstante Kräfte einem festen Körper oder einem iteriellen Punkte erteilen. Wirken die Kräfte immer in derselben Richng, aber mit verschiedener Stärke, so mufs die Bewegung eine geradlinig tschreitende, aber ungleichmäfsig beschleunigte sein, das heifst, die Geiwindigkeitszunahme mufs zu verschiedenen Zeiten in demselben Verltnisse sich ändern, wie die Gröfse der Kraft sich ändert. Kennen wir das setz, nach welchem die Kraft sich ändert, so können wir daraus auch s Gesetz bestimmen, nach welchem die Geschwindigkeit sich ändert. nken wir uns nämlich die Zeit, während welcher die veränderliche Kraft rkt, in hinreichend kleine Zeitteilchen zerlegt, so können wir, ohne unnau zu sein, annehmen, dafs innerhalb jedes dieser Zeitteilchen die Kraft nstant ist, und dafs sich dieselbe erst vom einen zu dem andern Zeitilchen ändert. Innerhalb eines solchen Zeitteilchens gelten dann die esetze konstanter Kräfte. Ist demnach F die auf die Masse M wirkende raft zur Zeit t, so erhalten wir für die Beschleunigung in diesem Zeitomente, welche wir nach § 1 in dem Quotienten $\frac{dv}{dt}$ ausgedrückt haben,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M}.$$

Ist hierin F als eine Funktion der Zeit t gegeben, so lehrt die Integralchnung aus diesem Ausdrucke auch die Geschwindigkeit zur Zeit t und is dieser den zurückgelegten Weg finden. Von der Form der Funktion F t es dann, wie man sieht, abhängig, welcher Art die Bewegung sein wird, id je nach dieser Form ist auch die specielle Lösung der Aufgabe, aus r Beschleunigung Geschwindigkeit und Weg zu finden, eine verschiedene. nzelne Fälle werden wir später behandeln.

Kennen wir das Gesetz, nach welchem eine inkonstante Bewegung erlgt, so können wir daraus dann auch umgekehrt das Gesetz ableiten, nach elchem die veränderlichen Kräfte wirken. Kennen wir nämlich den unter irkung der Kraft zurückgelegten Weg s in seiner Abhängigkeit von t, so nnen wir daraus zunächst für jeden Zeitpunkt t die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt}$$

und aus dieser die Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ erhalten. Für die letztere haben wir aber die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M},$$

somit auch hier die bewegende Kraft in dem Momente, für welchen jener Quotient gebildet ist,

$$F = M\frac{dv}{dt},$$

oder wir erhalten in dem Produkte der bewegten Masse und der jedesmaligen Beschleunigung das Maſs für die Gröſse der veränderlichen Kraft in jedem Momente der Bewegung.

Auch diesen Satz werden wir häufig anwenden, um in speciellen Fällen das Gesetz, nach welchem eine Kraft wirkt, aus der bekannten Bewegung abzuleiten.

Wirken die Kräfte auf eine bewegte Masse nicht immer in derselben Richtung ein, so wird die Bewegung der Masse nicht eine geradlinig fortschreitende, sondern die Bahn des Bewegten wird eine von dem Gesetze der Kraftwirkung abhängige krumme Linie. Eine Untersuchung dieses Falles würde uns zu weit in die theoretische Mechanik einführen. Es ist unsere Aufgabe, die experimentellen Grundlagen der Bewegungslehre aufzusuchen und aus ihnen die Gesetze abzuleiten, nach denen die Kräfte wirken; das haben wir im Bisherigen für die fortschreitende Bewegung gethan, indem wir gleichzeitig einige der wichtigsten Sätze der theoretischen Mechanik aus denselben folgerten, soweit wir dieselben zum Verständnis des Folgenden notwendig hatten. Wegen des Weitern müssen wir auf die Lehrbücher der Mechanik verweisen. Wir gehen jetzt über zur Betrachtung anderer Bewegungen, die wir in der Natur vorfinden.

Zweites Kapitel.

Von den drehenden Bewegungen.

§ 13.

Entstehung der drehenden Bewegung. Wir haben bereits mehrfach erwähnt, daſs ein Lot, wenn es aus seiner vertikalen Richtung gebracht wird, nicht einfach in diese zurückfällt, sondern eine Bewegung um die senkrechte Lage ausführt. Ganz dasselbe sehen wir, wenn wir einen festen Stab an seinem einen Ende an einer horizontalen Axe befestigen, so daſs ihm eine Bewegung in der vertikalen Ebene gestattet bleibt. Sich selbst überlassen sinkt er herab und macht Schwingungen um die senkrecht nach unten gerichtete Lage. Solche Bewegungen, bei denen jeder Punkt Kreise um einen festen Mittelpunkt beschreibt mit einem Radius, der gleich ist seinem Abstande von der Drehungsaxe, nennen wir drehende Bewegungen.

Bei den drehenden Bewegungen können wir, ebenso wie bei den fortschreitenden, von einer Geschwindigkeit und Beschleunigung sprechen, di

wir hier jedoch nicht auf die absolut zurückgelegten Räume, sondern auf die Bogen beziehen, welche die einzelnen Punkte eines in drehender Bewegung begriffenen Körpers beschreiben. Demnach legen wir zweien in drehender Bewegung begriffenen Körpern gleiche Winkelgeschwindigkeit bei, wenn ihre einzelnen Punkte in gleichen Zeiten gleiche, verschiedene, wenn sie in gleichen Zeiten verschiedene Bogen zurücklegen.

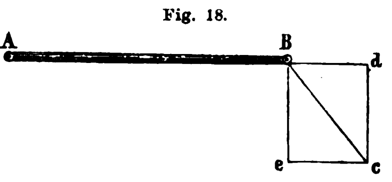
Es ist klar, dafs dabei die Wege, welche verschiedene Punkte mit gleicher Winkelgeschwindigkeit zurücklegen, absolut genommen sehr verschieden sein können, indem die absolute Länge der Bögen proportional ist dem Abstande der Punkte von der Drehungsaxe.

Ist die Winkelgeschwindigkeit eine ungleichförmige, so gilt alles, was wir im § 1 über die fortschreitende Bewegung gesagt haben, auch hier, wenn wir nur statt der Längen die beschriebenen Bögen in Winkelmafs einführen.

Die drehende Bewegung wird ebenso von Kräften veranlafst als die fortschreitende, dafs es aber nur Kräfte sind, die in einer ganz bestimmten Richtung wirken, läfst sich sofort erkennen.

Wir setzen voraus, dafs unserem Stabe nur eine Bewegung in der Drehungsebene gestattet ist; es ist klar, dafs dann alle Kräfte, welche senkrecht zu dieser Ebene, also parallel zur Drehungsaxe wirken, unwirksam sind, und dafs von Kräften, die unter einer andern Neigung gegen diese Ebene wirken, nur der Teil thätig sein kann, dessen Richtung in die Drehungsebene fällt, wenn wir die ganze Kraft nach § 8 in eine zu der Drehungsebene senkrechte und in eine andere zerlegt haben, deren Richtung in die Drehungsebene fällt.

Fig. 18.



Aber auch der Teil kann nicht immer vollständig zur Erzeugung der Bewegung dienen. Wirkt z. B. auf den bei A um eine horizontale Drehungsaxe beweglichen Stab AB bei B eine Kraft nach der Richtung Bc, so können wir diese nach § 8 ebenfalls in zwei Teile zerlegen, die zu einander senkrecht, eine in der Richtung Bd, die andere in der Richtung Be wirksam sind. Die erstere dieser Kräfte Bd übt nur einen Zug in der Richtung senkrecht zur Axe; ihr wird durch die Befestigung des Punktes A und den Zusammenhang der Teile des Stabes AB das Gleichgewicht gehalten. Nur die andere Kraft Be kann eine drehende Bewegung des Stabes um die Axe bei A veranlassen.

Wir sehen also, von allen Kräften, welche auf einen Körper wirken, der um eine feste Axe drehbar ist, können nur diejenigen eine drehende Bewegung erzeugen, welche in einer zur Drehungsaxe senkrechten Ebene senkrecht auf die Verbindungslinie des Angriffspunktes mit der Drehungsaxe wirken.

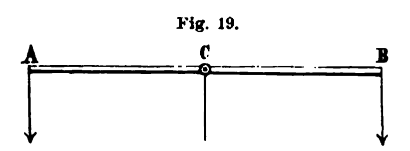
Die Schwere ist nun bei dem in A aufgehängten Stabe eine solche Kraft. Hat der Stab die horizontale Lage, so treibt das Gewicht jedes Teiles des Stabes ihn herunter, und deshalb sinkt er nieder. Die schwingenden Bewegungen um die senkrechte Lage sind dann die Folge davon, dafs die Schwere, sobald der Stab die horizontale Lage verlassen hat, nur mehr zum Teil wirkt, indem dann nur eine, je mehr sich der Stab der senk-

rechten Lage nähert, immer kleiner werdende Komponente ihn antreibt, auf der andern Seite aber die aufsteigende Bewegung des Stabes durch die Schwere gehemmt wird. Ehe wir jedoch diese Bewegung genauer untersuchen, müssen wir uns zu der Frage wenden, ob es gleichgiltig für die entstehende Bewegung sei, in welchem Abstande von der Drehungsaxe eine Kraft auf unseren Stab wirkt.

§ 14.

Die statischen Momente. Wenn wir einen Stab an einer festen vertikalen Drehungsaxe C aufhängen, so kann ihm nach dem Vorigen die Schwere, welche dann der Drehungsaxe parallel wirkt, keine Bewegung mitteilen. Wenn wir dann an dem Stabe ein und dieselbe Kraft einmal in A, dann in C und später in B anbringen, so ist die Wirkung derselben immer eine andere. In A angebracht bringt dieselbe eine Drehung hervor, bei C nicht und bei B wieder eine Drehung, welche aber der erstern entgegengesetzt ist. Die Kraft hat also je nach ihrem Angriffspunkte ganz verschiedene Wirkungen. Wie diese mit dem Angriffspunkte sich ändern, haben wir jetzt näher zu untersuchen.

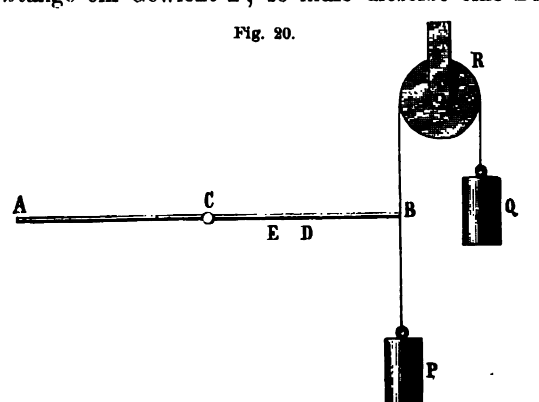
Fig. 19.



Zu dem Ende wenden wir einen gleichmäſsig gearbeiteten Stab an, der an allen Stellen gleich dick ist, so daſs gleiche Längen desselben Stabes gleich schwer sind. Führen wir durch die Mitte seiner Länge eine Axe, die wir horizontal befestigen, so finden wir, daſs er in Ruhe bleibt, daſs er keine Drehung unter dem Einflusse der Schwere annimmt. Der Grund dieser Erscheinung ist nach der eben gemachten Bemerkung klar; denn die Schwere will den beiden Hälften des Stabes entgegengesetzte Drehungen erteilen; da die beiden Hälften des Stabes sich aber nicht eine ohne die andere drehen können, so heben sich die Drehungen auf.

Befestigen wir nun an dem Ende B (Fig. 20) unserer so aufgehangenen Stange ein Gewicht P, so muſs dieselbe eine Drehung annehmen, da jetzt eine Kraft auf unseren Körper einwirkt, welche senkrecht ist zur Verbindungslinie des Angriffspunktes und der Drehungsaxe in der senkrecht zur Drehungsaxe gelegten Vertikalebene.

Fig. 20.



Bringen wir aber nun an eben dem Punkte B eine nach oben gerichtete Kraft von genau gleicher Gröſse an, etwa indem wir an B einen Faden befestigen, diesen über eine feste Rolle R führen und an der andern Seite des Fadens das Gewicht $Q = P$ anbringen, so tritt keine Drehung des Stabes ein. Dies ist nach dem Frühern auch nicht zu erwarten, das

ewicht P wird durch ein ihm genau gleiches, aber nach entgegengesetzter ichtung wirkendes äquilibriert.

Verschieben wir nun aber das Gewicht P von B nach D hin, so sehen ir sofort, dafs unser Stab sich dreht und zwar in einem dem frühern ent-gengesetzten Sinne; er folgt dem Zuge, den das Gewicht Q auf ihn aus-t, obwohl das genau gleiche Gewicht P den Stab nach unten zu drehen icht. Es folgt daraus, dafs eine Kraft einen Körper um so leichter zu ehen vermag, je weiter ihr Angriffspunkt von der Drehungsaxe entfernt t. Wenn wir das Gewicht P nun vergröfsern, so sehen wir bald, dafs ir imstande sind, die Drehung wieder aufhören zu machen. Ist nämlich $D = \frac{1}{2}\, CB$, so hört die Drehung auf, sobald das Gewicht P verdoppelt t, sobald wir also statt P das Gewicht $2P$ an D angehängt haben. Eine ne Verschiebung des Gewichtes ruft sofort wieder Bewegung hervor, ent-eder nach unten, wenn wir das Gewicht dem Ende B nähern, oder nach en, wenn wir das Gewicht der Drehungsaxe nähern. Welches aber auch r Abstand a von C sei, in welchem wir das Gewicht aufhängen, immer den wir, dafs eine entsprechende Änderung der Gewichte das Gleich-wicht wieder herstellt und zwar, wenn wir das Gewicht P so ändern, fs das Verhältnis besteht

$$P : Q = CB : a,$$

ler dafs

$$a \cdot P = CB \cdot Q.$$

Es folgt daraus, dafs zwei Kräfte, welche einem Körper eine entgegen-setzte Drehung zu erteilen suchen, sich im Gleichgewicht halten, wenn sich verhalten umgekehrt wie die Abstände ihrer Angriffspunkte von r Drehungsaxe, oder wenn die Produkte aus den Kräften und den Ab-änden ihrer Angriffspunkte gleich sind. Diese Produkte nennt man die atischen oder mechanischen Momente; so dafs wir also den Satz so aus-rechen können: Zwei Kräfte, welche einem Körper entgegengesetzte rehungen zu erteilen suchen, halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre echanischen Momente gleich sind.

Wir sahen eben, dafs eine zwischen C und A angebrachte nach unten richtete Kraft unseren Stab in demselben Sinne zu drehen sucht wie das ewicht Q. Anstatt zwischen C und B eine nach oben ziehende Kraft an-bringen, können wir daher eine ihr genau gleiche, in gleichem Abstande on C zwischen C und A anbringen. Auch dann wird nach dem obigen atze eine Bewegung nicht eintreten können, wenn die Momente gleich sind. er Versuch bestätigt diese Folgerung unmittelbar.

Wenn wir anstatt des einen Gewichtes P eine Reihe von verschiedenen ewichten $p, p', p'' \cdots$ in den Abständen $d, d', d'' \cdots$ anbringen und statt es einen Gewichtes Q eine Anzahl Gewichte $q, q', q'' \cdots$ in den Abständen $e, e', e'' \cdots$, so folgt unmittelbar und zeigt uns der Versuch, dafs Gleich-gewicht ist, wenn die Summe der Momente nach der einen Richtung gleich ist der Summe der Momente nach der andern Richtung, wenn also

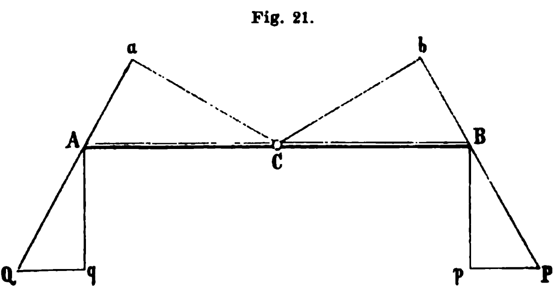
$$pd + p'd' + p''d'' \cdots = qe + q'e' + q''e'' \cdots$$

Wir können nun, wie man es in der Geometrie zu machen pflegt, ent-weder die Kräfte p, q, wenn sie nach entgegengesetzter Richtung wirken,

oder die Richtungen d, c, die an entgegengesetzter Seite der Drehungsaxe liegen, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen und dann unseren Satz kurz dahin aussprechen, dafs sich ein drehbarer Körper im Gleichgewicht befindet, wenn die Summe der Drehungsmomente der auf ihn einwirkenden Kräfte gleich Null ist.

Wir haben bisher zwar alle Kräfte, welche nicht senkrecht auf der Verbindungslinie ihres Angriffspunktes und der Drehungsaxe wirken, aus der Betrachtung ausgeschlossen, aber auch auf solche Kräfte läfst sich der soeben erkannte Satz ausdehnen, wenn man nur anstatt des Abstandes des Angriffspunktes der Kraft von der Drehungsaxe den senkrechten Abstand der Richtung der Kraft von der Drehungsaxe einführt. Denn wirkt z. B. auf unsere Stange AB an dem Hebelarm (so nennt man kurz den Abstand des Angriffspunktes der Kraft von der Drehungsaxe, während man den ganzen Stab als Hebel bezeichnet) CB die Kraft P, aber in einer zu CB nicht senkrechten Richtung, so wirkt eigentlich von dieser Kraft nur

Fig. 21.



$$p = P \cos \alpha,$$

wenn wir mit α den Winkel pBP bezeichnen und das Moment der Kraft ist

$$P \cos \alpha \cdot CB.$$

Der senkrechte Abstand der Kraft P von der Drehungsaxe ist aber gleich Cb. Da nun aber Cb senkrecht auf bP und CB senkrecht auf pB ist, so ist auch $\angle\, bCB = \alpha$ und $Cb = CB \cdot \cos \alpha$; also

$$P \cdot Cb = P \cos \alpha \cdot CB.$$

Man sieht, dafs es gleichwertig ist, das Moment der Kraft P als $p \cdot CB$ oder als $P \cdot Cb$ zu nehmen, dafs also unter der soeben gemachten Restriction der Satz von den Momenten auch für Kräfte gilt, welche nicht senkrecht zu ihrem Hebelarm sind.

Den Satz, dafs bei der drehenden Bewegung zwei Kräfte sich das Gleichgewicht halten, wenn sie sich umgekehrt verhalten wie ihre Abstände von der Drehungsaxe, haben wir im Vorigen als einen experimentellen Erfahrungssatz hingestellt. Man kann indes diesen Satz auch als eine Folge der im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätze über die Arbeit der Kraft erhalten. Aus jenen Sätzen ergibt sich nämlich, dafs ein System, an welchem Kräfte an verschiedenen Punkten, welche starr mit einander verbunden sind, wirken, im Gleichgewicht sein mufs, wenn bei der Bewegung des Systems in dem einen Sinne genau soviel Arbeit geleistet wird wie bei der Bewegung im entgegengesetzten Sinne. Um die Bedeutung des Satzes und seine Richtigkeit zu erkennen, sei AB (Fig. 22) ein starrer Hebel, den wir uns ohne Gewicht denken wollen. Derselbe liege horizontal und sei bei A um eine

vertikale Axe drehbar. Im Punkte C, im Abstande l_1 von der Drehungsaxe sei eine Schnur an dem Hebel befestigt, diese sei über eine Rolle geführt und trage das Gewicht P_1. Ebenso sei bei B im Abstande l von der Drehungsaxe eine Schnur angebracht, welche das Gewicht P trage. Sinkt das Gewicht P, so mufs P_1 gehoben werden, sinkt P_1, so mufs P gehoben werden. Dafs nun, wenn zum Heben des Gewichtes P_1 eine Arbeit geleistet werden mufs, welche gleich ist der Arbeit des Gewichtes P, das ist gleich dem Produkte aus P und dem von ihm zurückgelegten Wege, durch diese beiden an dem Hebel angreifenden Kräfte keine Bewegung entstehen kann, das ergibt sich folgendermafsen. Würde durch die konstant wirkende Kraft P das System aus der Ruhe in Bewegung versetzt, so würde ebenso in jedem Momente die Bewegung geändert, somit eine gleichförmig beschleunigte Bewegung entstehen müssen. Dadurch erhielten die Massen der Gewichte P und P_1 eine mit der Zeit wachsende lebendige Kraft, welche wieder einen gewissen Arbeitsvorrat repräsentiert. Wir würden demnach durch das niedersinkende Gewicht die der Arbeit der Kraft P gleiche Arbeit des Emporhebens von P_1 leisten, aufserdem noch in der Form von lebendiger Kraft einen mit der Zeit wachsenden Vorrat von Arbeit erhalten, diese letztere Arbeit somit ohne einen entsprechenden Aufwand von Kraft, somit aus nichts schaffen. Das widerspricht aber dem Principe von der Erhaltung der Kraft. Ist demnach die bei der Bewegung in dem einen Sinne zu leistende Arbeit gleich jener im entgegengesetzten Sinne, so müssen sich die Kräfte P und P_1 im Gleichgewicht halten.

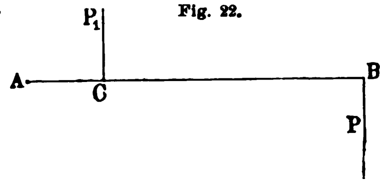


Fig. 22.

Um daraus die Bedingung des Gleichgewichts zu erhalten, denken wir uns, der Hebel werde in dem Sinne der Kraft P um den sehr kleinen Bogen φ gedreht, so sinkt das Gewicht P um die Strecke $l\varphi$, die diesem Sinken entsprechende Arbeit ist $P \cdot l \cdot \varphi$. Dabei würde das Gewicht P_1 um $l_1 \cdot \varphi$ gehoben, die geleistete Arbeit wäre somit $P_1 \cdot l_1 \cdot \varphi$, die Bedingung, dafs keine Bewegung eintritt, ist somit

$$Pl\varphi = P_1 l_1 \varphi$$

oder

$$Pl = P_1 l_1,$$

die mechanischen Momente müssen gleich oder ihre Summe, dieselbe gebildet wie vorhin, mufs gleich Null sein.

Ganz in derselben Weise erhält man aus diesem Princip die Bedingung des Gleichgewichtes, wenn an dem Hebel beliebig viele Kräfte angreifen; es müssen auch dann, wenn Gleichgewicht bestehen soll, die bei einer eintretenden Drehung auf beiden Seiten geleisteten Arbeiten gleich sein, somit mufs die Summe aller statischen Momente gleich Null sein.

Das soeben zur Ableitung des Satzes von den statischen Momenten angewandte Princip, dafs, wenn die von den thätigen Kräften bei einer Bewegung des Systems nach entgegengesetzter Richtung geleisteten Arbeiten einander gleich sind, das System durch diese Kräfte keine Bewegung annehmen kann, gilt, wie leicht ersichtlich, nicht nur in dem speciellen Falle,

an dem wir es erläutert haben, sondern ganz allgemein. Haben w
ein System von Punkten, an dem irgend welche Kräfte angreifen,
bei einer beliebigen Bewegung des Systems die von den Kräften
Arbeit gleich derjenigen, die bei der gerade entgegengesetzten B
geleistet wird, so können die Kräfte keine Bewegung erzeugen, s
sich das Gleichgewicht. Das so allgemein ausgesprochene Princ
man das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, eine Bezeichnun
andeuten soll, dafs die Bewegungen, welche man zur Bestimn
Arbeit betrachtet, eben nur gedachte, nicht wirklich stattfindende
der Mechanik wird dieses Princip vielfach angewandt, um die Bed
des Gleichgewichts für ein System von Punkten, an welchen K
greifen, zu formulieren.

Da bei der drehenden Bewegung Kräfte, deren Drehungsmom
gegengesetzt gleich sind, sich das Gleichgewicht halten, so folgt a
an einem Körper angreifende Kräfte demselben eine gleiche dreh
wegung, also in gleichen Zeiten gleiche Winkelgeschwindigkeiten,
wenn die Kräfte gleiche Momente haben. Die Winkelgeschwindi
gleich jener, welche eine im Abstande eins von der Drehungsaxe an
Kraft dem Körper erteilt, deren Drehungsmoment den gegebenen I
momenten gleich ist. Da nun das Drehungsmoment einer im Abst
angreifenden Kraft soviel Einheiten hat, wie die Kraft Einheiten
folgt, dafs die im Abstande eins angreifende Kraft soviel Einheit
mufs, als die gegebenen Drehungsmomente Einheiten besitzen,
man kurz sagt, dafs die Kraft den gegebenen Drehungsmoment
sein mufs. Die Summe der gegebenen Drehungsmomente gibt u
die Gröfse der Kraft, welche im Abstande eins von der Drehun
gebracht dieselbe drehende Bewegung erzeugt wie die gegebenen

§ 15.

Zusammensetzung verschieden gerichteter Drehungen. W
bisher vorausgesetzt, dafs der drehbare Körper sich nur um eine b
Drehungsaxe drehen könnte; es ist aber möglich, dafs ein Kö
gleichzeitig um verschiedene Drehungsaxen drehen kann und nach
schiedenen Richtungen, nach denen er sich drehen kann, gleichz
getrieben wird. Es fragt sich dann, ob diese Drehungen sich e
einer resultierenden Drehung zusammensetzen, wie verschieden g
fortschreitende Bewegungen eine Resultierende ergeben, und wel
Richtung und Gröfse der resultierenden Drehung ist. Wir kö
einen solchen Fall etwa in folgender Weise realisiert denken. W
eine massive Kugel in ein kleines Segment einer Hohlkugel von
Radius und decken, um die Kugel an der fortschreitenden Bew
hindern, ein ebensolches Segment oben auf die Kugel. Eine solc
kann sich dann um jede beliebige durch den Mittelpunkt derselben
Axe drehen. Um diese Kugel nach verschiedenen Richtung
treiben, denken wir uns in der Oberfläche derselben, gröfsten
folgend, einige Rinnen eingeschnitten, und in diese Rinnen Schnü
in ähnlicher Weise wie bei der Rolle der Fallmaschine. Üben wir
mehreren dieser Schnüre einen Zug aus, so erhält die Kugel I

momente um alle Axen, welche zu den größten Kreisen, um welche die betreffenden Schnüre gelegt sind, senkrecht stehen.

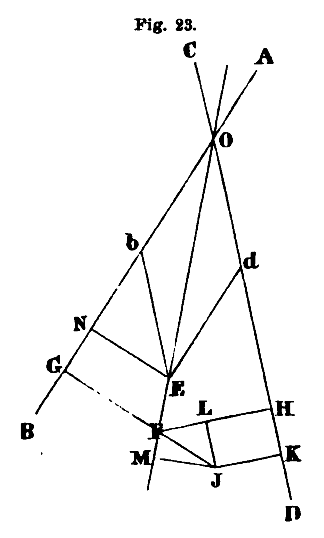
Nehmen wir an, es werde die Kugel nach zwei gegen einander geneigten Richtungen angetrieben, so ergeben dieselben Überlegungen, die wir bei Entwicklung des Satzes vom Kräfteparallelogramm machten, daſs die infolge der beiden Antriebe eintretende Bewegung in ihrer Richtung nicht mit der Richtung der Antriebe zusammenfallen kann, daſs die Drehungsrichtung vielmehr zwischen die Richtung der beiden Antriebe fallen muſs. Betrachten wir irgend einen Punkt auf der Oberfläche der Kugel, der infolge des ersten Antriebes, wenn er für sich allein wirksam wäre, den Bogen α beschreiben würde, infolge des zweiten Antriebes in der gegen die erste geneigten Richtung aber den Bogen β, so muſs der unter gleichzeitiger Wirkung der beiden Antriebe in derselben Zeit von dem betrachteten Punkte erreichte Ort ganz derselbe sein, wie wenn sich der Punkt die gleiche Zeit hindurch mit der gleichen Geschwindigkeit erst in der einen, dann in der andern Richtung gedreht hätte, also in beiden Richtungen nach einander in der einen den Bogen α, in der andern β beschrieben hätte. Die Bahn des Punktes muſs dann der Bogen sein, der den Ausgangspunkt und den so bestimmten Ort des Punktes nach der Bewegung verbindet. Dieser Bogen ist aber die Diagonale des aus den Bögen α und β auf der Kugel gebildeten Vierecks. Die Drehungsaxe, um welche eine einfache Drehung durch den von dieser Diagonale der Gröſse und Richtung nach gegebenen Bogen genau dieselbe Drehung dieses und damit aller Punkte der Kugel ergeben haben würde, ist diejenige Axe der Kugel, welche zu dem Kreise, zu welchem der resultierende Bogen gehört, senkrecht ist. Diese Axe liegt in den durch die beiden gegebenen Axen bestimmten Ebenen und bildet mit jeder derselben den gleichen Winkel, welchen der resutierende Bogen mit den Bögen α und β bildet.

Aus dieser letzteren Bemerkung erkennt man, daſs man die Richtung der resultierenden Axe und auch die Gröſse der resultierenden Drehung durch eine ebene Konstruktion erhalten kann. Wir legen durch die beiden ursprünglich gegebenen Axen eine Ebene und tragen von dem Punkte, wo sich die Axen schneiden, auf denselben die Bögen α und β als Seiten eines Parallelogrammes auf. Die durch den Schnittpunkt der Axen gelegte Diagonale des vervollständigten Parallelogramms ist dann die Axe der resultierenden Drehung, und gleichzeitig ist die Länge der Diagonale die Gröſse der resultierenden Drehung.

Um die Richtigkeit dieser Konstruktion zu erkennen, seien AB und CD (Fig. 23) die beiden sich im Mittelpunkte O der Kugel schneidenden Drehungsaxen, und setzen wir voraus, daſs wir in der Axe OB stehend den Kopf bei O, den Fuſs bei B, die Drehung in demselben Sinne, und zwar von links nach rechts, erfolgen sehen, wie die Drehung um die Axe OD, wenn wir in dieser stehen, den Kopf bei O und den Fuſs bei D. Wir wollen zunächst annehmen, die Drehungen erfolgen mit gleichförmiger Bewegung und die Bögen α und β seien die in einer Sekunde beschriebenen Bögen, also gleichzeitig die beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten. Wir tragen dann auf OB den Bogen $\alpha = Ob$, auf OD den Bogen $\beta = Od$ auf, ergänzen das Parallelogramm $ObEd$ und erhalten in OE die Richtung der resultierenden Drehungsaxe und die Gröſse des Bogens γ, um welchen der

betrachtete Punkt um diese Axe in derselben Zeit einer Sekunde gedreh wird, und zwar so, dafs wenn wir in der Axe stehen, den Kopf bei O, de Fufs bei E, die Bewegung in demselben Sinne von links nach rechts erfolg

Fig. 23.



Die Richtigkeit der Konstruktion erkenne wir durch den Nachweis, dafs infolge beide Drehungen die auf OE liegenden Punkte i Ruhe bleiben, denn bei der Drehung ein Körpers sind die Punkte der Axe und n diese in Ruhe, und zweitens dadurch, dafs w zeigen, dafs irgend ein beliebiger Punkt in d That mit der Winkelgeschwindigkeit γ u diese Axe gedreht wird.

Ein Punkt F der Axe OE wird dur die Drehung um die Axe OB aus der Ebe der Zeichnung nach vorn gehoben in eine Kreise, dessen Radius die von F auf OB hera gelassene Senkrechte FG ist. Da die Winke geschwindigkeit dieser Drehung α ist, so wi in der unendlich kleinen Zeit dt der Punkt um das unendlich kleine Stückchen $GF \cdot \alpha \cdot$ und zwar weil das Kreiselement auf seine Radius senkrecht steht, senkrecht zur Ebe der Zeichnung nach vorn gehoben. In demselben Zeitelement dt rückt d Punkt F infolge der Drehung um OD um die Strecke $FH \cdot \beta \cdot dt$ sen recht hinter die Ebene der Zeichnung. Die Verschiebung des Punktes F i Sinne der ersten Drehung ist dann die Differenz beider Verschiebungen od

$$(FG \cdot \alpha - FH \cdot \beta) dt.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist aber gleich Null, denn es ist

$$\frac{GF}{FO} = \sin GOF \quad \frac{FH}{FO} = \sin FOH = \sin OEb$$

$$GF : FH = \sin GOF : \sin OEb = Eb : Ob.$$

Nun ist nach der Konstruktion

$$Eb = \beta; \quad Ob = \alpha,$$

somit

$$GF \cdot Ob = GF \cdot \alpha = FH \cdot Eb = FH \cdot \beta$$

oder

$$FG \cdot \alpha - FH \cdot \beta = 0.$$

Die Differenz der Verschiebungen, welche der beliebige Punkt F der A OE in dem Zeitelement dt erfährt, ist somit gleich Null, oder was da selbe ist, der Punkt F, und somit alle Punkte der Axe OE erhalten in de Zeitelement dt und damit überhaupt keine Verschiebung. Die Richtung O ist also die resultierende Drehungsaxe.

Um den Nachweis dafür zu liefern, dafs für jeden beliebigen Pun die Gröfse der Drehung pro Sekunde oder die Drehungsgeschwindigk durch den durch die Länge der Diagonale repräsentierten Bogen $\gamma = O$ gegeben ist, betrachten wir die Drehung eines beliebigen in der Ebene d

Zeichnung liegenden Punktes J. Wir wollen nur, um die Zeichnung nicht zu sehr zu komplicieren, annehmen, dieser Punkt liege auf der Verlängerung der vorher durch den Punkt F gelegten zu OB senkrechten Richtung FG. Da der Punkt F ein vorher ganz beliebig auf der Axe angenommener ist, so geschieht durch diese Voraussetzung der Allgemeinheit unserer Betrachtung kein Eintrag. Die Verschiebung des Punktes J in der Zeit dt im Sinne der Drehung um OB ist dann

$$(GJ \cdot \alpha - JK \cdot \beta)dt.$$

Ziehen wir JL parallel OD, so können wir diesen Ausdruck schreiben

$$\{(GF + FJ)\alpha - (FH - FL)\beta\}\, dt = (FJ \cdot \alpha + FL \cdot \beta)dt.$$

Da, wie vorher gezeigt wurde, OM die resultierende Drehungsaxe ist, so können wir, wenn $JM \perp OM$, die resultierende Drehung um OE resp. die in der Zeit dt in demselben Sinne eintretende Verschiebung des Punktes J durch die Winkelgeschwindigkeit γ ausdrücken

$$MJ \cdot \gamma \cdot dt$$

und haben dann zu zeigen, daſs $\gamma = OE$ ist. Aus den beiden Ausdrücken für die Verschiebung des Punktes J erhalten wir

$$\gamma = \frac{FJ \cdot \alpha + FL \cdot \beta}{MJ}.$$

In dem Dreieck FJM ist der Winkel an J, da $MJ \perp MO$, $FJ \perp OB$, gleich dem Winkel GOE, demnach

$$MJ = FJ \cdot \cos GOE,$$

in dem Dreiecke JFL ist der Winkel an F, da $FH \perp OH$, $FJ \perp OB$, gleich dem Winkel GOH, welchen die beiden gegebenen Axen mit einander bilden, demnach

$$FL = FJ \cdot \cos GOH,$$

somit

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta \,.\, \cos GOH}{\cos GOE}.$$

Ziehen wir nun EN senkrecht zu OG, so sieht man, daſs der Zähler dieses Ausdrucks die Kathete ON des rechtwinkligen Dreiecks ENO ist, welche mit der Hypotenuse EO den Winkel GOE einschlieſst; daraus folgt, daſs der Ausdruck auf der rechten Seite eben dieser Hypotenuse gleich ist, oder daſs

$$\gamma = OE.$$

Die Diagonale OE ist somit die aus den beiden gegebenen Drehungen α und β resultierende Drehung.

Wir haben hierbei zunächst vorausgesetzt, daſs die Drehungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgen, diese Beschränkung können wir aber ohne weiteres fallen lassen, wenn wir α und β als die dem betrachteten Augenblicke oder der Zeit dt entsprechenden Drehungsgeschwindigkeiten bezeichnen. Es bedeutet dann γ die aus diesen beiden resultierende augenblickliche Drehungsgeschwindigkeit um die Axe OE. Die ganze Entwicklung behält auch unter dieser Voraussetzung ihre strenge Gültigkeit.

Wir erhalten somit ganz allgemein die aus zwei gegen einander geneigten Drehungen resultierende Drehungsgeschwindigkeit, indem wir von dem Schnittpunkte der beiden Axen die gegebenen Drehungsgeschwindigkeiten so auftragen, dafs wir den Kopf im Schnittpunkte der Axen gedacht und in die Richtung, nach welcher wir die gegebenen Drehungen aufgetragen haben, uns stellend, die Drehungen im gleichen Sinne erfolgend sehen, und dann die Diagonale des aus den beiden aufgetragenen Längen gebildeten Parallelogramms ziehen. Die Diagonale gibt der Gröfse und Richtung nach die resultierende Drehungsgeschwindigkeit. Man kann somit die Drehungen hiernach gerade so zusammensetzen, wie fortschreitende Bewegungen.

Ganz dieselbe Konstruktion liefert uns, gerade wie bei dem Kräfteparallelogramm, auch das aus zwei gegebenen gegen einander geneigten Drehungsmomenten resultierende Drehungsmoment, das heifst das Drehungsmoment, welches an Stelle der gegebenen um die resultierende Axe wirkend genau dieselbe Drehung hervorbringt. Ersetzen wir in unserer Konstruktion die augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten durch die Winkelbeschleunigungen, so sind diese, wie wir sahen, den Drehungsmomenten proportional. Damit ist der Satz vom Kräfteparallelogramm auch sofort auf die Drehungsmomente ausgedehnt, indem wir dieselben als Längen auf die Drehungsaxen auftragen und diese Längen zur Konstruktion benutzen.

Ebenso wie zwei Drehungen oder Drehungsmomente können wir in derselben Weise auch beliebig viele zu einer Resultierenden zusammensetzen, indem wir sie paarweise vereinigen.

Gerade so wie eine gegebene fortschreitende Bewegung können wir nun auch eine gegebene Drehung in andere zerlegen, so besonders auch die Komponenten nach zwei zu einander senkrechten Richtungen bestimmen. Die Ausdrücke für die Komponenten fallen nach den soeben gemachten Entwicklungen ganz mit denen für die Komponenten einer fortschreitenden Bewegung zusammen. Die Komponente der Drehung um eine Axe, welche mit der gegebenen Axe den Winkel φ bildet, ist gleich der gegebenen Drehung multipliciert mit dem Cosinus des Winkels φ. Wirkt also auf einen Körper ein Drehungsmoment ein, dessen Axe mit der Richtung der Axe, um welche sich der Körper drehen kann, einen Winkel bildet, so erhalten wir in dem Produkte aus dem gegebenen Drehungsmomente und dem Cosinus dieses Winkels auch das Drehungsmoment, welches die mögliche Drehung bewirkt.

§ 16.

Mittelpunkt paralleler Kräfte. Wenn an einem Hebel AB eine Reihe von parallelen Kräften wirkt, und es ist der Punkt C, in Bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist, unterstützt, so tritt keine drehende und auch keine fortschreitende Bewegung ein. Würde dann die Unterstützung fortgenommen, so nähme der Stab infolge der parallel wirkenden Kräfte eine fortschreitende Bewegung in der Richtung der wirkenden Kräfte an. Diese können wir jedoch hemmen, wenn wir an dem Punkte C (Fig. 24) in entgegengesetzter Richtung eine Kraft anbringen, welche gleich ist der Summe $P + Q$ der gegebenen Kräfte. Die im Punkte gebrachte Kraft $P + Q$ hält also den beiden einzelnen in A und B

angreifenden Kräften Q und P das Gleichgewicht. Diese beiden Kräfte wirken also zusammen ebenso, als wenn am Punkte C eine ihrer Summe $P+Q$ gleiche Kraft angebracht wäre.

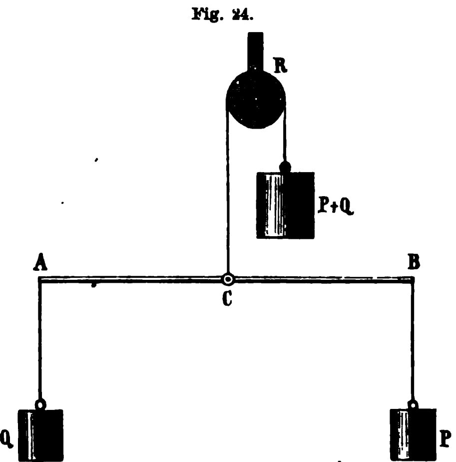
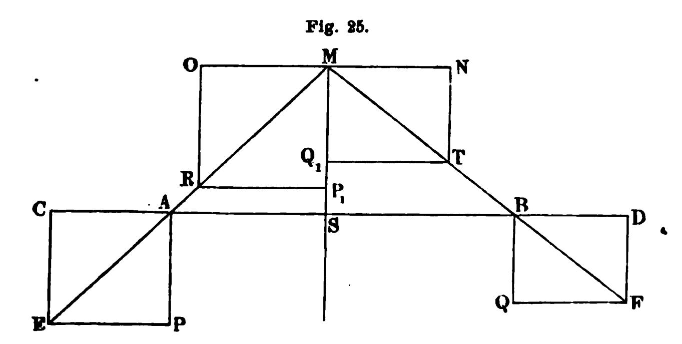


Fig. 24.

Wir schliefsen demnach, dafs auch parallele Kräfte eine Resultierende haben, welche ihrer Summe gleich ist, und dafs diese Resultierende an jenem Punkte angreift, in Bezug auf den die Summe der Momente gleich Null ist, d. h. dafs die verteilt angebrachten Kräfte gerade so wirken, als wenn an diesem Punkte alle Kräfte angebracht wären. Dieser Punkt heifst daher der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Dafs in der That der Punkt, in Bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist, der Mittelpunkt der parallelen Kräfte ist, und dafs die Mittelkraft der Summe der einzelnen Kräfte gleich ist, können wir auch ohne Versuch schon aus dem Satze vom Kräfteparallelogramm beweisen. Sei zu dem Ende AB (Fig. 25) eine feste Linie, an deren Enden die beiden Kräfte P und Q parallel nach derselben Richtung wirkend angebracht seien;

Fig. 25.



die Längen AP und BQ stellen diese Kräfte dar. Bringen wir nun an A und B die beiden gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte AC und BD an, so wird, da sie sich gegenseitig aufheben, durch dieselben am System gar nichts gestört. Die je zwei Kräfte AC und AP, sowie BQ und BD geben eine Resultierende, welche der Gröfse und Richtung nach durch die Diagonalen AE und BF der Parallelogramme $APCE$ und $BQFD$ gegeben ist. Verlängern wir diese beiden Diagonalen rückwärts, bis sie sich im Punkte M schneiden, und denken wir uns den Punkt M mit der Linie AB in fester unveränderlicher Verbindung, so können wir uns die beiden Kräfte AE und BF an dem Punkte M in MR und MT angebracht denken. Die Verhältnisse des Systems werden dadurch nicht geändert. Die

beiden Kräfte MR und MT können nun nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm zerlegt werden und zwar MR in $OM = AC$ und $MP_1 = AP$ und MT in $MN = BD$ und $MQ_1 = BQ$. Die beiden Kräfte MO und MN heben sich auf, und es bleibt zuletzt als Resultierende die Summe der beiden Kräfte P und Q. Daraus folgt zunächst, dafs zwei parallele Kräfte eine ihrer Summe gleiche Resultierende oder Mittelkraft haben, deren Richtung jener der gegebenen Kräfte parallel ist, und die in einem Punkte S zwischen A und B die feste Linie AB schneidet. Die Lage dieses Punktes S auf AB erhält man aus den ähnlichen Dreiecken $ASM \sim RP_1M$ und $BSM \sim TQ_1M$. Dieselben geben nämlich

$$AS : SM = RP_1 : P_1M$$

$$BS : SM = Q_1T : Q_1M.$$

Und daraus, da $SM = SM$, $RP_1 = Q_1T$, $P_1M = P$, $Q_1M = Q$,

$$AS \cdot P = BS \cdot Q,$$

dieselbe Bedingung, welche wir soeben experimentell ableiteten, der Punkt S liegt so, dafs in Bezug auf ihn die Summe der Momente gleich Null ist.

Dafs die so bestimmte Resultierende auch in Bezug auf die drehende Bewegung die gegebenen Kräfte vollständig ersetzt, das heifst dafs sie unter allen Umständen genau dasselbe Drehungsmoment liefert, erkennen wir folgendermafsen.

Haben wir eine Anzahl von Kräften $p_1, p_2 \cdots$, welche in den Abständen $l_1, l_2 \cdots$ vom Mittelpunkte angreifen, so ist die Summe

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \cdots\cdots = 0.$$

Legen wir durch das System eine Drehungsaxe, dessen zur Kraftrichtung senkrechter Abstand von dem Mittelpunkte gleich x ist, so wird in Bezug auf diese das Drehungsmoment

$$p_1(l_1 + x) + p_2(l_2 + x) + \cdots = p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + (p_1 + p_2 + \cdots)x.$$

Da der Voraussetzung nach

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots\cdot = 0,$$

so folgt für das Drehungsmoment in Bezug auf die angenommene Axe

$$(p_1 + p_2 + \cdots)x,$$

also ganz dasselbe, wie wenn im Mittelpunkte die Summe aller Kräfte angebracht wäre.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dafs die einander parallelen Kräfte auch gleich gerichtet seien, aber ebenso haben zwei parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte im allgemeinen eine Resultierende. Um die Gröfse derselben und ihren Angriffspunkt zu finden, sei AB Fig. 26 wieder eine feste Linie, an deren Punkten A und B die beiden Kräfte P und Q wirken. Wir können nun P als Mittelkraft zweier anderer betrachten, von denen die eine bei B angreift und der Kraft Q genau gleich ist, während die andere gleich $P - Q$ ist und in einem Punkte S angreift, dessen Lage durch die Bedingung gegeben ist, dafs

$$AS \cdot (P - Q) = AB \cdot Q$$

$$AS = AB \cdot \frac{Q}{P - Q}.$$

Die beiden Kräfte Q und Q_1 heben sich auf, da sie an demselben Punkte nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Es bleibt also als Resultierende die Differenz der gegebenen Kräfte übrig, deren Richtung der ursprünglichen parallel ist, und deren Angriffspunkt wieder jener Punkt ist, in Bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist. Denn aus der Gleichung für AS folgt

$$AS \cdot P = (AS + AB)Q = SB \cdot Q,$$

In einem Falle jedoch haben parallele Kräfte keine Resultante, bringen sie also ein ganz freies System von Punkten nicht in eine fortschreitende Bewegung, nämlich dann, wenn sie einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Dafs in dem Falle keine resultierende Kraft vorhanden ist, folgt zunächst aus dem soeben abgeleiteten Satze, nach welchem bei entgegengesetzt gerichteten Kräften die Resultante gleich der Differenz der beiden Kräfte ist, es folgt aber weiter aus der Gleichung für die Lage des Angriffspunktes

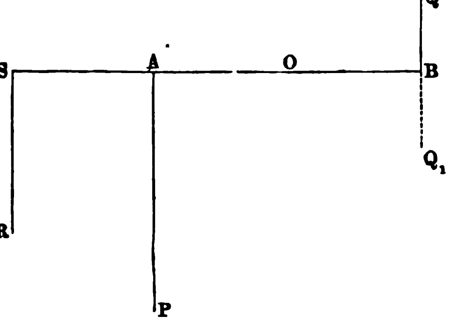
$$AS = AB \cdot \frac{P}{P - Q}.$$

Da nämlich in diesem Falle $P - Q = 0$ ist, so wird AS unendlich, oder es gibt keinen in endlicher Entfernung von A liegenden Punkt, an dem die Mittelkraft anzubringen wäre, es gibt also keine Mittelkraft.

Ein solches Kräftepaar bringt deshalb nur eine drehende Bewegung hervor um irgend einen zwischen A und B liegenden Punkt, und das statische Moment eines solchen Paares ist gleich dem Produkte aus einer der Kräfte und dem senkrechten Abstande beider. Denn welchen Punkt wir uns auch als fest denken, wo auch der Punkt O (Fig. 26) liegt, das Drehungsmoment ist, da beide Kräfte das System in demselben Sinne drehen, $P \cdot AO + Q \cdot BO$, also wenn P und Q gleich sind, gleich

$$P(AO + OB) = P \cdot AB.$$

Fig. 26.



Die Kräftepaare, ihr Verhalten und die Zusammensetzung derselben ist besonders von Poinsot untersucht worden, der die Anwendung derselben zur Bestimmung der drehenden Bewegungen in die Mechanik eingeführt hat. Wir verweisen wegen dieser schönen Theorie auf die Lehrbücher der Mechanik und besonders auf Poinsot: Eléments de statique.

Haben wir eine Reihe von in einer Richtung wirkenden parallelen Kräften anstatt an einer Linie an einer festen Ebene verteilt, so müssen auch diese eine Resultierende und einen Mittelpunkt haben. Denn wir können je zwei solcher Kräfte zusammensetzen, die Resultierende dann mit

einer folgenden und so fort, bis uns die Mittelkraft der zuletzt übrig bleibenden Kräfte die Resultante und deren Angriffspunkt den Mittelpunkt aller Kräfte gibt.

Sind die parallelen Kräfte nicht alle gleich gerichtet, so liefert die Zusammensetzung der gleich gerichteten zunächst zwei entgegengesetzt gerichtete Resultierende. Greifen dieselben an verschiedenen Punkten an, so erhalten wir die Resultierende und den Angriffspunkt in der vorhin angegebenen Weise; sind dieselben gleich, so gibt es nur ein resultierendes Paar.

Die gleichen Schlüsse können wir anwenden, wenn eine Anzahl paralleler Kräfte anstatt an einer festen Ebene an einem festen Körper angreift; auch für diesen mufs es einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte geben, in welchem wir uns die Summe aller Kräfte angebracht denken können, und für den die Summe aller Momente gleich Null ist. Ist deshalb dieser Punkt befestigt, z. B. durch ihn eine Drehungsaxe geführt, so kann der Körper weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen.

Ändern wir die Richtung sämtlicher auf ein System wirkender Kräfte, aber so, dafs sie einander parallel bleiben, so wird der Angriffspunkt der Resultierenden nicht geändert. Denn nach der Drehung ist die Summe der Momente in Bezug auf eben diesen Punkt gerade so gleich Null wie vorher. Es folgt das unmittelbar aus unserem Satze über die Momente. Haben sich z. B. alle Kräfte um den Winkel α gedreht, so sind die Momente der einzelnen Kräfte $p, p_1, p_2 \cdots$ in den Abständen $d, d_1, d_2 \cdots$, wenn sie vorher waren

$$pd + p_1 d_1 + p_2 d_2 + \cdots,$$

nach der Drehung

$$pd \cos\alpha + p_1 d_1 \cos\alpha + p_2 d_2 \cos\alpha \cdots,$$

also gleich

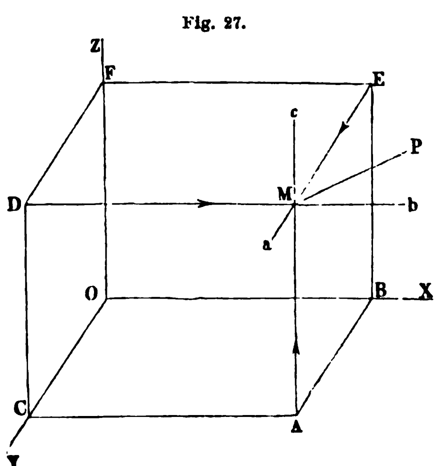
$$(pd + p_1 d_1 + p_2 d_2 + \cdots) \cos\alpha,$$

und war die Summe $pd \cdots$ gleich Null, so ist sie es auch, wenn sie mit $\cos\alpha$ multipliziert worden ist.

§ 17.

Gleichgewicht eines Systems, an welchem beliebige Kräfte angreifen. Im § 9 haben wir die Bedingungen abgeleitet, unter welchen ein Körper im Gleichgewicht ist, an welchem beliebige Kräfte wirksam sind, die aber alle an demselben Punkte angreifen. Die Bedingungen des Gleichgewichtes fielen dort zusammen mit denen eines Punktes. Die wenigen Sätze über die drehende Bewegung, welche wir im Bisherigen abgeleitet haben, setzen uns nun auch in den Stand das Gleichgewicht eines Körpers zu bestimmen, an welchem beliebige Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen. Diese Gleichgewichtsbedingungen fallen zusammen mit denen eines Systems von Punkten, an denen Kräfte angreifen, und die mit einander in fester Verbindung stehen. Ein solches System kann eine fortschreitende und eine drehende Bewegung annehmen. Die Bedingung des Gleichgewichts ist daher die, dafs weder die eine noch die andere Bewegung eintreten kann.

Wir denken uns, um diese Bedingungen zu erhalten, durch das System drei feste zu einander senkrechte Richtungen OX, OY, OZ (Fig. 27) gelegt, die sich in einem Punkte O schneiden. Sei M ein Punkt des Systems, dessen Lage durch die Koordinaten $MA = z$, $CA = OB = x$, $AB = CO = y$ gegeben sei. An M greife eine Kraft P an, deren Richtung durch die Winkel α, β, γ gegeben ist, welche sie mit den Axen bildet. Zerlegen wir die Kraft nach den drei Axen, so erhalten wir als Komponenten parallel



$$X \qquad\qquad Y$$
$$Mb = P\cos\alpha, \quad Ma = P\cos\beta,$$
$$Z$$
$$Mc = P\cos\gamma.$$

Diese drei Kräfte können dem System sowohl eine fortschreitende Bewegung, jede nach ihrer Richtung, als auch eine drehende Bewegung geben. Um die drehenden Bewegungen und ihre Momente zu erhalten, legen wir durch M die Linien MD, ME, MA parallel den drei Axen und verlängern dieselben, bis sie die durch die Axen bestimmten Ebenen schneiden in den Punkten D, E, A, die wir uns fest mit dem Punkte M verbunden denken. Wir können uns dann, ohne irgend etwas an der Wirkung von P zu ändern, die drei Komponenten an den Punkten D, E, A angreifend denken. Jede dieser Kräfte kann dann das System um zwei Axen drehen, Mb um Z und Y, Ma um Z und X, Mc um Y und X, so dafs also für jede der drei Axen zwei Drehungsmomente vorhanden sind. Diese je zwei Drehungen sind aber einander entgegengesetzt, so dafs z. B. Mb das System in entgegengesetzter Richtung um Z zu drehen sucht als Ma. Um deshalb die Drehungsmomente für die drei möglichen Drehungen zu bekommen, müssen wir die Differenzen der je zwei Momente bilden. Die senkrechten Abstände der drei Kraftrichtungen von den Drehungsaxen sind nun

Ma	von X	gleich $EB = z$;	Ma	von Z	gleich $EF = x$
Mb	„ Z	„ $DF = y$;	Mb	„ Y	„ $DC = z$
Mc	„ X	„ $AB = y$;	Mc	„ Y	„ $AC = x$.

Setzen wir die Drehungen positiv, welche im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers erfolgen, wenn wir in der Richtung der positiven Axen OX, OY, OZ stehend die Füfse in der Drehungsebene, auf die Drehungsebene hinsehen, so sind die Drehungsmomente um

$$X$$
$$Mc\cdot AB - Ma\cdot EB = P\cos\gamma\cdot y - P\cos\beta\cdot z = P(y\cos\gamma - z\cos\beta);$$
$$Y$$
$$Mb\cdot DC - Mc\cdot AC = P\cos\alpha\cdot z - P\cos\gamma\cdot x = P(z\cos\alpha - x\cos\gamma);$$
$$Z$$
$$Ma\cdot EF - Mb\cdot DF = P\cos\beta\cdot x - P\cos\alpha\cdot y = P(x\cos\beta - y\cos\alpha).$$

Haben wir eine beliebige Anzahl von Kräften P, welche an beliebigen Punkten des Systems angreifen und beliebig gerichtet sind, so können wir für jede Kraft ganz dieselbe Zerlegung vornehmen, und wir erhalten für jede Kraft drei mit den eben abgeleiteten gleich gerichtete Komponenten und drei Drehungsmomente, welche das System in demselben oder in dem entgegengesetzten Sinne zu drehen suchen. Die je drei Komponenten sowie die Summen der drei Drehungsmomente müssen einzeln gleich Null sein, wenn das System weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen soll. Bezeichnen wir diese einzelnen Summen mit Σ, so ist also die notwendige und ausreichende Bedingung des Gleichgewichts

$$\Sigma P \cos\alpha = 0; \quad \Sigma P \cos\beta = 0; \quad \Sigma P \cos\gamma = 0;$$
$$\Sigma P(y \cos\gamma - z \cos\beta) = 0; \quad \Sigma P(z \cos\alpha - x \cos\gamma) = 0;$$
$$\Sigma P(x \cos\beta - y \cos\alpha) = 0.$$

Denn diese Gleichungen zeigen, daſs das System infolge der wirksamen Kräfte nach keiner Richtung fortschreiten und nach keiner Richtung gedreht werden kann.

Sind die Kräfte alle parallel einer und derselben Richtung, etwa parallel MP, so daſs sie entweder nach MP oder der gerade entgegengesetzten Richtung wirken, sind also für alle die Winkel α, β, γ dieselben, so vereinfachen sich die Bedingungen des Gleichgewichtes bedeutend. Da es nämlich gleichgültig ist, ob wir in einer Summe alle einzelnen Glieder mit ein und denselben Faktor multiplizieren, oder ob wir die Summe der einzelnen Glieder mit diesem Faktor multiplizieren, so können wir in obigen Gleichungen die Cosinus als gemeinschaftliche Faktoren herausschreiben; wir erhalten dann als Gleichgewichtsbedingungen

$$\cos\alpha \cdot \Sigma P = 0; \quad \cos\beta \cdot \Sigma P = 0; \quad \cos\gamma \cdot \Sigma P = 0;$$
$$\cos\gamma \cdot \Sigma Py - \cos\beta \cdot \Sigma Pz = 0; \quad \cos\alpha \cdot \Sigma Pz - \cos\gamma \cdot \Sigma Px = 0;$$
$$\cos\beta \cdot \Sigma Px - \cos\alpha \cdot \Sigma Py = 0.$$

[illegible] die Summen der Produkte [illegible] ihrer Angriffspunkte bedeuten.

[illegible] und dieselbe Richtung mit [illegible] gleichzeitig rechte werden [illegible] bestehen, wenn

$$\Sigma P = 0; \quad \Sigma Px = 0; \quad \Sigma Py = 0; \quad \Sigma Pz = 0.$$

[illegible] Null ist, als auch die Summe [illegible] x, y, z ihrer Angriffspunkte [illegible]

[illegible] kann es eine Resultante [illegible] werden. Wenn es eine Resultante [illegible] wenn wir an dem Mittelpunkt [illegible] anbringen. Ist die Resultante [illegible] von den drei festen Richtungen [illegible] Vorigen die Richtung der Resultante [illegible] parallel sein. dieselbe mit

den Axen also dieselben Winkel α, β, γ bilden mufs, zur Bestimmung derselben und ihres Angriffspunktes

$$\cos\alpha \cdot \Sigma P = \cos\alpha \cdot R;\quad \cos\beta \cdot \Sigma P = \cos\beta \cdot R;\quad \cos\gamma \cdot \Sigma P = \cos\gamma \cdot R,$$

somit zunächst, wie wir vorhin schon ableiteten,

$$\Sigma P = R.$$

Ferner aber

$$\cos\gamma \cdot \Sigma Py - \cos\beta \cdot \Sigma Pz = \cos\gamma \cdot Ry_1 - \cos\beta \cdot Rz_1;$$
$$\cos\alpha \cdot \Sigma Pz - \cos\gamma \cdot \Sigma Px = \cos\alpha \cdot Rz_1 - \cos\gamma \cdot Rx_1;$$
$$\cos\beta \cdot \Sigma Px - \cos\alpha \cdot \Sigma Py = \cos\beta \cdot Rx_1 - \cos\alpha \cdot Ry_1$$

und daraus

$$\Sigma Px = Rx_1;\quad \Sigma Py = Ry_1;\quad \Sigma Pz = Rz_1,$$

oder

$$x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P};\quad y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P};\quad z_1 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Wir erhalten demnach die Lage des Mittelpunktes durch seine Abstände x_1, y_1, z_1, von den Axen, indem wir die Summen der Produkte der einzelnen Kräfte in die Abstände ihrer Angriffspunkte von den festen Richtungen durch die Summe der Kräfte dividieren.

Das System reduciert sich auf ein Kräftepaar, wenn $\Sigma P = 0$, aber eine der Summen ΣPx, ΣPy, ΣPz oder alle drei von Null verschieden sind.

Es genüge an diesen Entwicklungen, um zu zeigen, wie wir aus den experimentell abgeleiteten Gesetzen über die drehende Bewegung in Verbindung mit den allgemeinen Sätzen über die Wirkung von Kräften auf mathematischem Wege zu weiteren Gesetzen gelangen können; ein weiteres Verfolgen dieses Weges würde uns zu weit in die analytische Mechanik führen.

§ 18.

Schwerpunkt. Wenden wir uns jetzt dazu, die Bedingungen des Gleichgewichtes eines beliebigen festen Körpers, auf den nur die Schwere wirkt, abzuleiten. Alle Körper, welche der Schwere unterworfen sind, unterliegen der Wirkung paralleler vertikal abwärts gerichteter Kräfte, da die Schwere auf alle Teile des Körpers gleichmäfsig wirkt. Die Schwere wirkt überdies an einem Orte in der gleichen Richtung, nur an sehr weit von einander entfernten Orten sind die Richtungen der Schwerkraft merklich verschieden. Für die der Schwere unterworfenen Körper gibt es demnach einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte, an dem wir uns alle Kräfte vereinigt denken können, und in Bezug auf welchen die Summe der Drehungsmomente gleich Null ist. Man nennt diesen Punkt, in welchem man sich demnach das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken kann, den Schwerpunkt des Körpers. Ist deshalb der Schwerpunkt unterstützt, oder greift an ihn eine vertikal nach oben gerichtete dem Gewichte des Körpers gleiche Kraft an, so kann der Körper gar keine, weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen, derselbe ist im Gleichgewicht.

Der Schwerpunkt ist in einem gegebenen Körper ein ganz fester Punkt, der seine Lage nicht ändert, wenn wir auch den Körper drehen. Denn eine solche Drehung hat denselben Erfolg, als wäre bei ungeänderter Körperlage die Richtung sämtlicher Kräfte um einen gleichen Winkel gedreht. Wie aber in § 16 nachgewiesen ist, ändert eine solche Drehung den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nicht.

Den Schwerpunkt von Linien, Flächen und geometrisch bestimmbaren Körpern kann man mit Hülfe der in den beiden letzten Paragraphen abgeleiteten Sätze und der vorhin gemachten Bemerkung, dafs ein an den Schwerpunkt vertikal nach oben angebrachter Zug, der gleich dem Gewichte des Körpers ist, den Körper im Gleichgewichte halte, berechnen.

Wir können nämlich jeden schweren Körper als ein System von Punkten betrachten, auf welche alle vertikal abwärts gerichtete Kräfte wirken, indem wir den ganzen Körper als aus einzelnen schweren Elementen zusammengesetzt ansehen. Die Summe der Gewichte dieser Elemente ist das Gewicht des Körpers. Denken wir uns nun durch den Körper ein dreiaxiges rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt und für alle einzelnen schweren Punkte die Abstände x, y, z gegeben, so sind es einfach die am Schlusse des vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen, die uns die Lage des Schwerpunktes geben. Nennen wir die Gewichte der einzelnen Körperelemente p, das Gewicht des ganzen Körpers P, so sind die Abstände des Schwerpunktes von den drei Axen

$$x_1 = \frac{\Sigma p x}{P}\,;\quad y_1 = \frac{\Sigma p y}{P}\,;\quad z_1 = \frac{\Sigma p z}{P}\,.$$

Um demnach die Lage des Schwerpunktes eines solchen Körpers zu erhalten, haben wir das Gewicht jedes Punktes mit seinem Abstande von jeder der drei Axen zu multiplicieren, für jede Axe die Summe dieser Produkte zu bilden und jede dieser Summen durch das Gewicht des ganzen Körpers zu dividieren. Diese drei Quotienten bestimmen die Lage des Schwerpunktes, indem sie uns die Abstände desselben von den drei festen Richtungen geben.

In welcher Weise die Rechnungen in speciellen Fällen durchzuführen sind, können wir hier nicht besprechen, wir verweisen deshalb auf die Lehrbücher der Mechanik.

Man kann indes leicht den Schwerpunkt der Körper, auch solcher, die geometrisch nicht bestimmbar sind, experimentell bestimmen, indem man den Satz von den statischen Momenten anwendet.

Ist nämlich der Schwerpunkt unterstützt, so ist der Körper in Ruhe, ist er es nicht, so nimmt der Körper, wenn seine fortschreitende Bewegung gehemmt ist, eine drehende Bewegung an, bis sein Schwerpunkt sich senkrecht unter dem Unterstützungspunkte befindet. Denn wir sahen vorhin, dafs eine Reihe von Kräften nur dann keine drehende Bewegung hervorruft, wenn die Summe ihrer statischen Momente gleich Null ist. Da wir uns nun in dem Schwerpunkte das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken können, so folgt, dafs nur dann das statische Moment des Körpers gleich Null ist, wenn der horizontale Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe oder dem Unterstützungspunkte gleich Null ist, d. h. wenn beide in einer vertikalen geraden Linie liegen.

Befestigen wir einen Körper, dessen Schwerpunkt wir suchen, an einem Faden und lassen ihn frei herabhängen, so ist er darnach nur in einer Lage im Gleichgewicht, und wir können sicher sein, dafs der Schwerpunkt des Körpers dann auf der Verlängerung des Fadens liegt. Befestigen wir darauf den Körper mit einem andern Punkte am Faden, so wird der Schwerpunkt in der Gleichgewichtslage auch dann auf der Verlängerung des Fadens liegen. Diese beiden so bestimmten Richtungen schneiden sich immer in einem Punkte, und dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Körpers. Man überzeugt sich davon leicht, indem dieser Punkt stets in der Verlängerung des Fadens liegt, wenn der Körper im Gleichgewichte ist, an welchem Punkte des Körpers wir denselben auch befestigen.

Auf diese Weise kann man leicht finden, dafs in einer homogenen Kugel der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammenfällt, dafs er bei einem geraden Cylinder oder senkrechten Prisma auf der Axe in deren halber Höhe liegt, dafs er bei einem Dreiecke mit dem Punkte zusammenfällt, in dem sich die drei von den Winkelspitzen zu den Halbierungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Linien schneiden, dafs er in der dreiseitigen Pyramide in $^1/_4$ der Höhe derselben liegt u. s. f.

Der Schwerpunkt eines Körpers kann auf drei verschiedene Weisen mit dem Unterstützungspunkte oder der Drehungsaxe in einer Vertikalebene liegen; diesen entsprechen drei Arten von Gleichgewicht des Körpers:

1) Der Schwerpunkt liegt in der Drehungsaxe. Wir mögen dem Körper dann eine Lage geben, welche wir wollen, der Schwerpunkt ist immer mit der Drehungsaxe in derselben Vertikalebene, er ist daher in jeder Lage im Gleichgewicht. Man nennt diesen Gleichgewichtszustand den des indifferenten Gleichgewichtes.

2) Der Schwerpunkt liegt senkrecht unter der Drehungsaxe. Dreht man dann den Körper um seine Axe, so kehrt er, da das in seinem Schwerpunkt vereinigte Gewicht ihn nach unten treibt, in seine frühere Lage zurück, um nach einigen Schwankungen darin zu verharren. Man nennt diesen Gleichgewichtszustand den des stabilen Gleichgewichtes.

3) Der Schwerpunkt liegt senkrecht über der Drehungsaxe. Der Körper befindet sich dann im labilen Gleichgewicht. Ist er aus seiner Lage gebracht, so mufs eine Drehung eintreten, da das Drehungsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsaxe nicht mehr gleich Null ist. Die Schwere erteilt dem Körper dann aber eine Drehung, welche den Schwerpunkt noch weiter aus seiner frühern Lage entfernt, sie dreht ihn, wenn kein äufseres Hindernis die Bewegung hemmt, bis der Körper sich im Zustande des stabilen Gleichgewichts befindet.

Hieraus geht hervor, dafs ein Körper nur dann feststeht, d. h. jeder Veränderung seiner Lage einen grofsen Widerstand entgegensetzt und nach kleinen Änderungen wieder in seine frühere Lage zurückkehrt, wenn eine Änderung eine Erhebung des Schwerpunktes bewirkt. Aufgestellte Körper, bei denen der Schwerpunkt stets über der Stütze liegt, stehen daher nur auf einer Ebene fest und zwar um so fester, je breiter die Ebene ist, auf der sie stehen.

Haben wir z. B. einen Körper $ABCD$, dessen Schwerpunkt in M liegt, so können wir denselben nur dadurch umwerfen, dafs wir ihn um die Kante B oder A als Drehungsaxe drehen. Dabei mufs der

Schwerpunkt den Kreisbogen MN beschreiben mit dem Radius MB, ı MB gröfser ist als MO, so mufs der Schwerpunkt des Körpers g werden. Es läfst sich auch leicht berechnen, welche Kraft aufg werden mufs, um den Körp B oder A zu drehen und som zuwerfen. Das Drehungsmom Körpers in Bezug auf eine dı gehende Drehungsaxe ist nac Vorigen

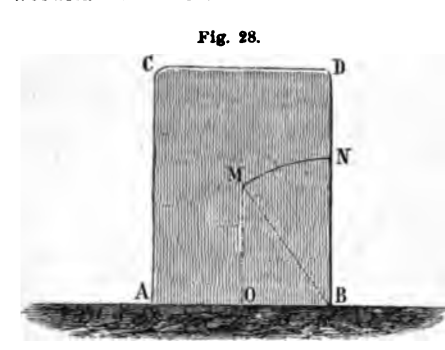


Fig. 28.

$$M \cdot OB,$$

wenn wir mit M das Gewic Körpers bezeichnen, das v Schwerpunkt vereinigt denke nen. Dieses Moment streb Körper eine Drehung in den zu erteilen, dafs M sich nach unten bewegt, eine Drehung, welche duı Widerstand des Bodens, auf welchem der Körper steht, verhindert v . Um dem Körper eine entgegengesetzte Drehung um B zu e müssen wir also auf den Körper einen Druck wirken lassen, wel entgegengesetzter Richtung dasselbe Moment hat.

Je gröfser also $M \cdot OB$ ist, um so gröfser ist die Stabilität de pers. Man nimmt daher auch dieses Moment als Mafs der Stabili Körpers, so dafs diese Stabilität durch das Produkt aus dem Gewic Körpers und dem senkrechten Abstand einer durch den Schwe gehenden Vertikalebene von der Umdrehungskante bestimmt wird.

§ 19.

Von den Trägheitsmomenten. Wir haben bisher bei der dre Bewegung nur die Kräfte betrachtet, welche die Bewegung hervorb und untersucht, wie die Kräfte an verschiedenen Punkten sich e können, um die gleiche drehende Bewegung zu erzeugen, indem v stimmten, welche Kräfte in verschiedenen Abständen von der Drehu angebracht werden müssen, um sich gegenseitig das Gleichgewicht zu Dadurch ist die Abhängigkeit der drehenden Bewegung von den l vollständig gegeben, wir können sie in dem Satze zusammenfassen Kräfte gleiche drehende Bewegungen, also gleiche Winkelgeschwindi hervorbringen, wenn ihre statischen Momente denselben Wert haben

In Bezug auf die drehende Bew haben wir nun noch die Frage zu worten, in welcher Weise dieselbe ab ist von der Masse des durch ge Kräfte in Bewegung zu setzenden S Denken wir uns deshalb zunächst einen gewichtlosen Hebel OB (Fig. dessen Ende bei B eine Kraft p a von der wir der Einfachheit wegen setzen wollen, dafs sie in jeder Lage des Hebels konstant und se zum Hebelarm sei. Im Punkte B befinde sich eine Masse m, welche

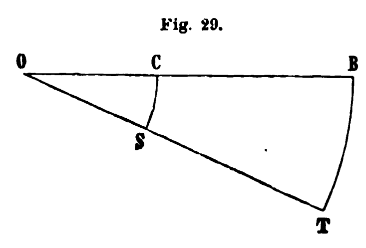


Fig. 29.

die Kraft p in Bewegung gesetzt wird. Der Weg $BT = s$, den die Masse in irgend einer Zeit zurücklegt, ist dann, da wir die Kraft als immer von gleicher Gröfse vorausgesetzt haben,

$$BT = s = \frac{1}{2}\frac{p}{m}t^2.$$

Nennen wir die Länge des Hebels l und den Bogen, dem der Weg s entspricht, φ, so können wir auch schreiben

$$s = l\varphi = \frac{1}{2}\frac{p}{m}t^2; \quad \varphi = \frac{1}{2}\frac{p}{lm}t^2.$$

Nun werde die Masse m bei B fortgenommen, und es soll dann bei C im Abstande r von O eine Masse m' angebracht werden, so dafs auch jetzt in derselben Zeit t durch die Wirkung der bei B angreifenden Kraft p von dem System derselbe Bogen φ beschrieben wird.

Um die Gröfse dieser Masse zu bestimmen, haben wir zunächst uns daran zu erinnern, dafs die bei B wirkende Kraft p in dem Punkte C einen Druck p' ausübt, der gegeben ist durch die Gleichung

$$pl = p'r$$

$$p' = p\frac{l}{r}.$$

Der Weg, den die Masse m' in der Zeit t durch die Wirkung dieser Kraft zurücklegt, ist

$$s' = \frac{1}{2}\frac{p\frac{l}{r}}{m'}t^2.$$

Dieser Weg soll nun demselben Bogen φ entsprechen, es ist also $s' = r\varphi$ und

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{pl}{r^2m'}t^2.$$

Aus den beiden Gleichungen für φ ergibt sich

$$\frac{1}{2}\frac{p}{lm} = \frac{1}{2}\frac{pl}{r^2m'}$$

oder

$$m \cdot l^2 = m' \cdot r^2.$$

Die in dem Punkte C anzubringende Masse m' bekommt also durch die in B angreifende Kraft p dieselbe Winkelbewegung wie die in B angebrachte Masse m, wenn das Produkt aus der Masse m' und dem Quadrate ihres Abstandes von der Drehungsaxe gleich ist der Masse m, multipliziert mit dem Quadrate ihres Abstandes; oder zwei Massen erhalten durch eine und dieselbe an demselben Punkte angreifende Kraft dieselbe drehende Bewegung, wenn sie ihrer Gröfse nach umgekehrt sich verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsaxe.

Das Produkt mr^2 einer Masse m in das Quadrat ihres Abstandes r von der Drehungsaxe bezeichnet man als das Trägheitsmoment der Masse; mit dieser Bezeichnung können wir somit den eben abgeleiteten Satz auch kurz so aussprechen, dafs durch eine gegebene Kraft verschiedene Massen gleiche drehende Bewegung erhalten, wenn sie gleiche Trägheitsmomente besitzen.

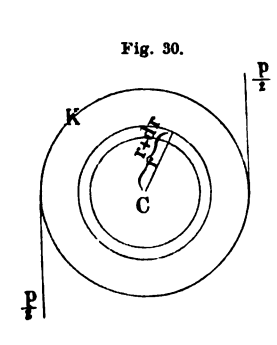
Das Trägheitsmoment einer gegebenen Masse bedeutet glei jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe ang werden mufs, um die im Abstande r befindliche Masse m zu ersetzen, die Winkelgeschwindigkeit dieselbe ist.

Dieser Satz von den Trägheitsmomenten setzt uns in den Sta drehende Bewegung eines Systems, in welchem Massen in versch Punkten vorhanden sind und von verschiedenen Kräften angegriffen oder auch diejenige eines ausgedehnten Körpers wenigstens dann voll zu bestimmen, wenn wir die Verteilung der Massen und Kräfte Indem wir nämlich die Trägheitsmomente der vorhandenen Mas stimmen, erhalten wir jene Masse, welche in der Abstandseinheit Drehungsaxe die sämtlichen vorhandenen Massen so ersetzt, dafs die d Bewegung, welche diese in der Abstandseinheit vorhandene Mass die wirksamen Kräfte erhält, genau jener gleich ist, welche die ve Massen erhalten. Durch Bestimmung der statischen Momente erhal dann die in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe angreifend welche die sämtlichen an verschiedenen Punkten angreifenden Kr setzt. Da diese Kraft in demselben Punkte angreift, in welchem di das Trägheitsmoment bestimmte Masse sich befindet, so erhalten Beschleunigung dieser Masse, indem wir den Quotienten aus der Kr der Masse bilden, und aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit in einer gegebenen Zeit zurückgelegten Weg ganz nach den im Kapitel abgeleiteten Sätzen.

Bei einem ausgedehnten um eine Axe drehbaren Körper hab um das Trägheitsmoment desselben zu bilden, uns den Körper in Punkte zerlegt zu denken; die Summe der Trägheitsmomente aller ei Punkte ist dann das Trägheitsmoment des ganzen Körpers. Hat der eine geometrisch bestimmte Gestalt, und ist die Masse in ihm gleic verteilt, so dafs also innerhalb des Körpers gleiche Volumina überall Masse enthalten, so läfst sich das Trägheitsmoment berechnen un die drehende Bewegung des Körpers vollständig bestimmen.

Um diese Rechnung zu übersehen, wollen wir als Beispiel die d Bewegung einer Kreisscheibe um eine durch ihre Axe gehende Dreh untersuchen. Die Kreisscheibe K (Fig. 30) habe den Durchmesser Dicke b, und an ihrem Umfange greife ei stante Kraft p an; etwa so, dafs wir die Dr axe der Scheibe vertikal gestellt, dann Scheibe zwei Schnüre gelegt denken, wel einem Punkte des Umfangs befestigt un zwei Rollen geführt sind. An den über die herabhängenden Enden der Schnüre seien a das Gewicht $\frac{p}{2}$ befestigt. Sei ferner das von einem Kubikcentimeter der Scheibe g somit die in einem Kubikcentimeter vorl Masse gleich $\frac{q}{g}$.

Fig. 30.



Um das Trägheitsmoment der Scheibe zu erhalten, denken aus derselben einen Ring ausgeschnitten, dessen innerer Radius g

ınd dessen äufserer den um das Differential dr gröfsern Wert $r + dr$ hat. Da dr einen verschwindend kleinen Wert hat, ist der äufsere Umfang des Ringes nur unendlich wenig von dem innern verschieden, wir können leshalb ohne einen merklichen Fehler das Volumen dieses Ringes gleich $2\pi r dr b$ setzen. Die Masse desselben wird dann $2\pi r dr b \frac{q}{g}\cdot$ Eben deshalb, weil wir den Ring als unendlich dünn vorausgesetzt haben, können wir den Abstand aller seiner Punkte von der mit der Axe des Ringes zusammenfallenden Drehungsaxe als gleich und zwar als gleich r ansehen. Dann wird las Trägheitsmoment dieses Ringes gleich

$$r^2 \cdot 2\pi r dr b \frac{q}{g} = 2\pi b \frac{q}{g} \cdot r^3 dr.$$

Wir bekommen somit das Trägheitsmoment dieses Ringes in Form eines Differentialausdrucks. Das Trägheitsmoment der ganzen Scheibe erhalten rir dann, indem wir die Trägheitsmomente aller der unendlich vielen, unndlich dünnen Ringe summieren, aus welchen wir die Scheibe zusammenesetzt denken können. Die Trägheitsmomente aller dieser Ringe erhalten ir, wenn wir in obigem Ausdrucke für r nach und nach alle, jedesmal um r zunehmende Werte von 0 bis a einsetzen. Das Trägheitsmoment der anzen Scheibe ist somit das von 0 bis a genommene bestimmte Integral

$$K = \int_0^a 2\pi b \frac{q}{g} \cdot r^3 dr.$$

Dem Begriffe des Integrals als Summe entsprechend können wir den onstanten Faktor vor das Summenzeichen setzen und erhalten

$$K = 2\pi b \frac{q}{g} \int_0^a r^3 dr.$$

Nach E 1 ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen das Differential on $\frac{1}{4} r^4$, somit nach E VIII

$$K = 2\pi b \frac{q}{g} \left(\frac{1}{4} a^4 - 0\right) = \frac{1}{2} \pi b \frac{q}{g} \cdot a^4.$$

Nun ist $\pi a^2 b$ das Volumen unserer Kreisscheibe, somit

$$\pi a^2 b \frac{q}{g} = M$$

ie Masse der Kreisscheibe; wir können somit das Trägheitsmoment derılben schreiben

$$K = \frac{1}{2} M a^2$$

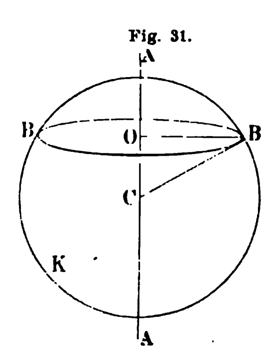
ler das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe, oder allgemein eines massiven reiscylinders, da die Kreisscheibe ja nur ein Cylinder von geringer Höhe , in Bezug auf die Axe des Cylinders ist gleich der halben Masse des linders multipliziert mit dem Quadrate des Radius. Damit erhalten wir Beschleunigung bei der drehenden Bewegung

$$G = \frac{Pa}{\frac{1}{2} M a^2} = 2 \frac{P}{Ma},$$

ein Ausdruck, der gleichzeitig, wenn wir G als Bruchteil von 2π angeben, uns die Winkelbeschleunigung gibt, da die Beschleunigung sich auf einen Punkt bezieht, der sich im Abstande eins von der Drehungsaxe befindet.

Das Trägheitsmoment einer Kugel in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe können wir leicht aus dem soeben abgeleiteten Trägheitsmoment der Scheibe erhalten. Sei, um die Berechnung durchzuführen, der Kreis K ein Durchschnitt durch die Kugel, deren Radius gleich a sei, und AA sei die Drehungsaxe. Sei auch jetzt wieder q das Gewicht der Volumeinheit der Kugel. Sei BB eine Scheibe, welche durch zwei unendlich nahe zur Drehungsaxe senkrechte Schnitte begrenzt sei, deren erster im Abstande x, deren zweiter im Abstande $x + dx$ vom Mittelpunkte C der Kugel sich befinde. Diese Scheibe können wir als einen Cylinder ansehen, dessen Höhe gleich dx und dessen Radius r gegeben ist durch die Gleichung

Fig. 31.



$$r^2 = a^2 - x^2.$$

Da die Drehungsaxe der Kugel durch die Axe dieser Scheibe geht, so ist das Trägheitsmoment derselben, wie eben abgeleitet wurde,

$$\tfrac{1}{2}\pi \frac{q}{g} r^4 dx = \tfrac{1}{2}\pi \frac{q}{g} (a^2 - x^2)^2 dx \cdots (1).$$

Das Trägheitsmoment der ganzen Kugel ist die Summe der Trägheitsmomente aller Scheiben, in welche wir auf diese Weise die Kugel zerlegen können. Wir erhalten alle diese einzelnen Trägheitsmomente, indem wir in dem soeben entwickelten Ausdruck nach und nach für x alle die Abstände einsetzen, welche in der Kugel vorkommen. Die obere Hälfte der Kugel bekommen wir, indem wir für x nach und nach alle Werte einsetzen, von 0 bis a, die untere, deren Scheiben an der entgegengesetzten Seite des Mittelpunktes sich befinden, wenn wir für x alle Werte zwischen 0 und $-a$ einsetzen; denn um die in Bezug auf den Mittelpunkt, von dem aus wir die Abstände x rechnen, entgegengesetzte Lage der Scheiben zu beachten, müssen wir den nach unten gerechneten Abständen x das negative Vorzeichen geben. Wir erhalten somit das Trägheitsmoment der ganzen Kugel, indem wir von $-a$ angefangen nach und nach für x alle Werte von $-a$ bis $+a$ setzen und alle die so sich ergebenden Werte des Ausdruckes (1) summieren, oder

$$K = \int_{-a}^{+a} \tfrac{1}{2}\pi \frac{q}{g} (a^2 - x^2)^2 dx = \tfrac{1}{2}\pi \frac{q}{g} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx.$$

Um dieses bestimmte Integral nehmen zu können, führen wir die unter dem Integralzeichen angedeutete Quadrierung aus; das Integral zerlegt sich dann in drei, da sich aus dem Begriffe des Integrals als Summe ergibt, daſs das Integral einer Summe gleich ist der Summe der Integrale der einzelnen Glieder

$$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx = \int_{-a}^{+a} a^4 dx - \int_{-a}^{+a} 2a^2x^2 dx + \int_{-a}^{+a} x^4 dx.$$

Nach E 1 ist der Ausdruck unter dem ersten Integralzeichen das Differential von $a^4 x$, unter dem zweiten von $\frac{2}{3}a^2x^3$, unter dem dritten von $\frac{1}{5}x^5$. Damit wird nach E VIII

$$\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)^2 dx = (a^5 + a^5) - \tfrac{2}{3}(a^5 + a^5) + \tfrac{1}{5}(a^5 + a^5) = \tfrac{16}{15}a^5$$

somit
$$K = \tfrac{1}{2}\pi\frac{q}{g}\cdot\tfrac{16}{15}a^5 = \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{4}{3}\pi a^3\frac{q}{g}\right)a^2.$$

Der in der Klammer eingeschlossene Teil des Ausdruckes ist die Masse der Kugel; bezeichnen wir dieselbe mit M, so wird

$$K = \tfrac{2}{5}M\cdot a^2.$$

Die beiden Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie man durch Rechnung das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers von geometrisch bestimmter Gestalt erhalten kann. Für alle Formen, welche uns für das Trägheitsmoment eines Elementes einen Differentialausdruck liefern, dessen Integral man auswerten kann, läfst sich das Trägheitsmoment berechnen.

Aufser durch Rechnung läfst sich das Trägheitsmoment einer Masse auch experimentell bestimmen. Dafür geeignete Methoden werden wir § 31 kennen lernen.

§ 20.

Allgemeiner Satz über die Trägheitsmomente. Das Trägheitsmoment einer Masse hat nach der Definition dieses Begriffes keineswegs einen für die gegebene Masse immer gleichen Wert, sondern dieser Wert hängt wesentlich ab von der Lage der Drehungsaxe, um welche die drehende Bewegung stattfindet. Auf specielle Fälle der Art einzugehen, würde zu weit führen; wir wollen in der Beziehung nur einen allgemeinen Satz beweisen, der uns immer gestattet, das Trägheitsmoment einer Masse in Bezug auf eine beliebige Axe zu bestimmen, wenn man es in Bezug auf eine der beliebigen Axe parallele durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte Axe kennt. Ist nämlich M die Masse eines Körpers und Mk^2 das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Axe, so ist in Bezug auf eine mit der letztern parallele und im Abstande z von derselben befindliche Drehungsaxe das Trägheitsmoment gleich $M(k^2 + z^2)$.

Um diesen Satz zu beweisen, sei der senkrechte Abstand a des Punktes (Fig. 32) von der durch den Schwerpunkt o des Körpers senkrecht zur Ebene der Zeichnung gehenden Axe durch zwei senkrechte Koordinaten x und y gegeben, dafs

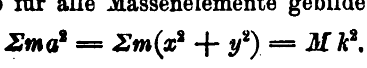
$$a^2 = x^2 + y^2.$$

Fig. 32.

Das Trägheitsmoment des im Punkte m befindlichen Massenelementes m ist dann

$$ma^2 = m(x^2 + y^2),$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Körpers ist die Summe der so für alle Massenelemente gebildeten Momente



$$\Sigma ma^2 = \Sigma m(x^2 + y^2) = Mk^2.$$

Liege die zweite Axe in der Richtung der senkrechten Abständ von der ersten Axe um z entfernt, sie gehe durch o', so ist das Trägh moment des in m befindlichen Massenelementes in Bezug auf diese neue

$$ma'^2 = m\{(x - z)^2 + y^2\},$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Körpers, die Summe der Trägh momente aller Massenelemente

$$\Sigma ma'^2 = \Sigma m\{(x - z)^2 + y^2\}.$$

Letztere Summe ist aber gleich

$$\Sigma m\{(x - z)^2 + y^2\} = \Sigma mx^2 + \Sigma mz^2 + \Sigma my^2 - 2z\Sigma mx$$

oder auch

$$\Sigma m\{(x - z)^2 + y^2\} = \Sigma m(x^2 + y^2) + \Sigma mz^2 - 2z\Sigma mx.$$

Das erste Glied des Ausdruckes auf der rechten Seite ist gl Mk^2, das zweite, da z^2 ein für alle Glieder der Summe konstanter Fa ist, und $\Sigma m = M$ gleich der Masse des Körpers ist, gleich $M \cdot z^2$. haben demnach für das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug die neue Axe

$$Mk^2 + Mz^2 - 2z\Sigma mx = M(k^2 + z^2) - 2z\Sigma mx.$$

Das Glied $-2z\Sigma mx$ ist nun aber gleich Null, weil die Axe, der die Abstände x gerechnet sind, durch den Schwerpunkt geht, und nach unserer Definition des Schwerpunktes als des Mittelpunktes der d die Schwere der einzelnen Körperelemente gegebenen parallelen Kräfte Summe der Momente in Bezug auf denselben Null ist.

Es bleibt somit für das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug die neue Axe, welche mit der durch den Schwerpunkt gehenden par und um z von ihr entfernt ist,

$$M(k^2 + z^2).$$

Wir werden von diesem Satze demnächst Gebrauch machen.

Mit Hülfe der Sätze über das Trägheitsmoment ist, wie schon vo bemerkt wurde, die Behandlung der drehenden Bewegung auf jene der schreitenden zurückgeführt, indem wir die Masse des zu bewegenden Kör immer in dem Angriffspunkt der resultierenden Kraft konzentriert de können. Es erübrigt uns jetzt noch, einige Anwendungen der abgeleit Sätze und einige die drehende Bewegung begleitende Erscheinungen zu trachten.

§ 21.

Die Wage. Wir wenden unsere Sätze zunächst an, um die Th des für die Physik wichtigsten Meſsapparates, der Wage, abzuleiten.

Die Wage hat die Aufgabe, das Gewicht der Körper zu bestim das heiſst, das Gewicht eines gegebenen Körpers mit demjenigen uns kannter Gewichtsstücke zu vergleichen. Zu dem Zwecke besteht bek lich die Wage aus einem in seiner Mitte unterstützten Stabe, der an se Enden die Wagschalen trägt, deren eine den abzuwägenden Körper, d andere die Gewichte aufnimmt. Wir schlieſsen dann, daſs das Gewicht

abzuwägenden Körper demjenigen der Gewichte gleich ist, wenn der die Schalen tragende Stab, der Wagebalken, horizontal steht. Die horizontale Stellung erkennen wir an einem mit dem Wagebalken fest verbundenen Zeiger, der dann auf eine bestimmte Marke zeigt. Wir verlangen ferner, dafs der Wagebalken in einer geneigten Stellung zur Ruhe kommt, wenn auf der einen Seite ein nicht zu grofses Übergewicht ist. Die Neigung soll für das kleinste Übergewicht noch deutlich sichtbar sein, der Wagebalken also noch einen deutlich erkennbaren Winkel mit der Horizontalen bilden. Dieses kleinste Übergewicht ist je nach dem Zwecke der Wagen verschieden; Wagen zu wissenschaftlichen Untersuchungen sollen schon einen deutlich sichtbaren Winkel mit der Horizontalen, einen deutlichen Ausschlag geben, wenn die eine Seite um Bruchteile eines Milligrammes schwerer ist.

Aus dieser Aufgabe der Wage läfst sich unmittelbar ableiten, wie dieselbe eingerichtet sein mufs. Wir wollen aus der Horizontalstellung der Wage auf die Gleichheit der abzuwägenden Gewichte schliefsen; daraus folgt zunächst, dafs die Wage im unbelasteten Zustande horizontal stehen, das heifst, dafs dann der Schwerpunkt mit der Drehungsaxe in derselben Vertikalen liegen mufs. Dazu ist erforderlich, dafs die beiden Hälften der Wage an jeder Seite der Drehungsaxe derselben, durch die Schwere genau dasselbe Drehungsmoment erhalten müssen, somit dafs, wenn die beiden Hälften gleichartig gearbeitet sind, was wir voraussetzen, dieselben gleiche Gewichte haben müssen.

Es ergibt sich daraus zweitens, dafs die beiden Hälften des Wagebalkens, die Abstände der Drehungsaxe der Wage von den Aufhängepunkten der Wagschalen, genau gleiche Längen haben müssen. Denn in der Voraussetzung, dafs die erste Bedingung erfüllt ist, beweist uns die horizontale Stellung der belasteten Wage nur, dafs die Drehungsmomente der beiden Seiten gleich sind. Aus der Gleichheit der Drehungsmomente folgt aber die Gleichheit der wirkenden Kräfte, hier also der in den Wagschalen liegenden Gewichte, nur dann, wenn wir wissen, dafs die Hebelarme, hier also die horizontalen Abstände der Aufhängepunkte der Wagschalen von der Drehungsaxe einander gleich sind. In wie weit diese Bedingung strenge erfüllt werden kann, werden wir im nächsten Paragraphen besprechen.

Da die Wage, wenn auf der einen Wagschale ein kleines Übergewicht liegt, in einer geneigten Lage zur Ruhe kommen soll, so folgt als dritte notwendig zu erfüllende Bedingung, dafs die unbelastete Wage im stabilen Gleichgewichte sich befinden, dafs also der Schwerpunkt unter der Drehungsaxe liegen mufs. Würde die Wage im labilen Gleichgewichte sein, so würde sie bei der geringsten Bewegung umschlagen. Wäre die Wage im indifferenten Gleichgewicht, so würde sie unbelastet in jeder Lage im Gleichgewichte sein, bei dem geringsten Übergewichte auf der einen Seite sich dagegen um 90° drehen, soweit, bis der Schwerpunkt des Übergewichtes unter der Drehungsaxe in derselben Vertikalen liegen würde. Denn da im Zustande des indifferenten Gleichgewichtes die Summe der statischen Momente der einzelnen Teile der Wage in Bezug auf die Unterstützungsaxe selbst Null ist, und in jeder Lage Null bleibt, kann bei Hinzufügung eines Übergewichtes nur dann Gleichgewicht sein, wenn das Moment des Übergewichtes für sich gleich Null ist; das ist aber nur dann der Fall, wenn sein Schwerpunkt mit der Drehungsaxe in derselben Vertikalen ist. In

diesem Falle würde somit die Wage ebenfalls unbrauchbar sein. Ist die unbelastete Wage dagegen im stabilen Gleichgewicht, so tritt eine von der Gröfse des Übergewichtes abhängige Drehung der Wage ein. Denn dadurch dafs die Wage sich nach der Seite des Übergewichtes neigt, wird der Schwerpunkt nach der andern Seite gehoben, somit ein die Wage zurückdrehendes Moment erzeugt; die Gleichgewichtslage ist dann jene, in welcher die nach entgegengesetzter Richtung drehenden Momente einander gleich sind.

Indem wir diese Gleichgewichtsbedingung formulieren, erkennen wir weiter, von welchen Umständen aufser von der Gröfse des Übergewichtes die Gröfse der Drehung abhängig ist, welche speciellere Einrichtung somit die Wage haben mufs, damit sie für ein möglichst kleines Übergewicht einen deutlich erkennbaren Ausschlag gibt. Bei dieser Formulierung machen wir die allgemeinste mit den bereits erkannten Bedingungen verträgliche Annahme, die sich im allgemeinen in der Praxis stets realisiert findet, daß nämlich der Wagebalken AB (Fig. 33) nicht eine gerade Linie bilde, dafs also die Verbindungslinie der Aufhängepunkte der Wagschalen nicht durch die Drehungsaxe geht.

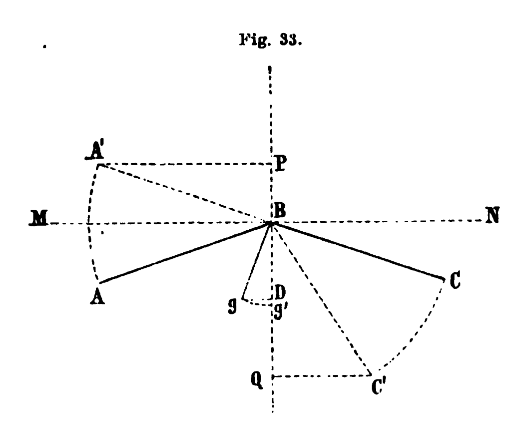


Fig. 33.

Wir nehmen aber an, dafs in der Gleichgewichtslage die Verbindungslinie AC horizontal sei, dafs also AB und BC dann mit der horizontalen MN den gleichen Winkel β bilden. Die Längen $AB = BC$ seien gleich l. Der Schwerpunkt des Wagebalkens liege in g' im Abstande l' unter B.

Sei ferner p das Gewicht des Balkens und sei das Gewicht der an A und C angehängten Wagschalen inklusive der eingelegten Gewichte auf der einen Seite gleich Q, auf der andern Seite $Q + q$. Die Wage wird sich um einen Winkel α neigen und die Lage $A'BC'$ annehmen. Der Schwerpunkt der Wage rückt dann nach g. Besteht Gleichgewicht, so mufs die Summe der Momente der wirkenden Gewichte Q, p, $Q + q$ gleich Null sein.

Die Hebelarme der Gewichte sind für Q die Länge $A'P$, für das Gewicht p der Wage gD und für die Gewichte $Q + q$, welche an dem Punkte C' angreifen, $C'Q$, es mufs sonach

$$Q \cdot A'P + p \cdot gD - (Q + q)\, C'Q = 0,$$

oder

$$Q \cdot A'P + p \cdot gD = (Q + q)\, C'Q \cdots 1.$$

Nun sind

$$A'P = A'B \cdot \cos BA'P = A'B \cdot \cos A'BM = l \cdot \cos(\alpha - \beta),$$

$$gD = gB \cdot \sin gBD = l' \cdot \sin \alpha,$$

$$C'Q = C'B \cdot \cos QC'B = C'B \cdot \cos C'BN = l \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

und daraus, wenn wir diese Ausdrücke in (1) einsetzen,

$$Q l \cos(\alpha - \beta) + p l' \sin \alpha = (Q + q) l \cos(\alpha + \beta)$$

oder auch

$$Q l (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) + p l' \sin \alpha =$$
$$= (Q + q) l (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta).$$

Fassen wir die mit $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ multiplizierten Glieder zusammen, so erhalten wir

$$\cos \alpha \{ Q l \cos \beta - (Q + q) l \cos \beta \} =$$
$$= - \sin \alpha \{ Q l \sin \beta + (Q + q) l \sin \beta + p l' \}$$

oder

$$q l \cos \beta \cdot \cos \alpha = \{ 2 Q l \sin \beta + q l \sin \beta + p l' \} \sin \alpha.$$

Dividieren wir durch $\cos \alpha$ und lösen die Gleichung nach $\operatorname{tang} \alpha$ auf

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{q l \cos \beta}{2 Q l \sin \beta + q l \sin \beta + p l'}$$

oder

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{q l}{(2 Q + q) l \operatorname{tang} \beta + \frac{p l'}{\cos \beta}} \cdots 2.$$

Der Winkel α gibt die Neigung des Wagebalkens, wenn in die Wagschale bei C das Übergewicht q gebracht ist, er mifst also die Empfindlichkeit der Wage. Da α immer sehr klein ist, können wir auch $\operatorname{tang} \alpha$ als Mafs der Empfindlichkeit betrachten. Man sieht in obiger Gleichung, dafs wenn der Winkel β von Null verschieden ist, der Wert α abhängig ist von $2Q + q$, das heifst, die Empfindlichkeit der Wage ist nicht konstant, sie ändert sich bei gleichem Übergewichte q mit der gemeinsamen Belastung der Wage, sie ist gröfser, wenn die Wage weniger belastet ist. Dafs das der Fall sein mufs, ergibt die direkt an Fig. 33 als richtig einzusehende Überlegung, dafs bei der hier vorausgesetzten Neigung der Wagebalken die Drehung der Wage zur Folge hat, dafs der Hebelarm, an welchem das Übergewicht wirkt, in stärkerm Verhältnisse kleiner wird, als der Hebelarm an der andern Seite der Wage.

Lägen die Punkte A und C anstatt unter der Horizontalen über derselben, so wäre die Rechnung genau so durchzuführen, nur müfste man in den Gleichungen den Winkel β negativ setzen, wo in den vorigen Gleichungen $\alpha + \beta$ steht, müfsten wir $\alpha - \beta$ setzen und umgekehrt. Die Gleichung (2) wird dann

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{q l}{\frac{p l'}{\cos \beta} - (2 Q + q) \operatorname{tang} \beta}.$$

Hier wird der Nenner unseres Ausdrucks mit zunehmender Belastung kleiner, die Empfindlichkeit der Wage also gröfser.

Ist der Winkel β gleich Null, so ist die Empfindlichkeit der Wage konstant, unabhängig von der Belastung. Da das durchaus wünschenswert ist, so sucht man soviel wie möglich die drei Punkte A, B, C in eine gerade Linie zu legen. Nehmen wir an, dafs das erreicht, also $\beta = 0$ sei, so wird die Empfindlichkeit der Wage gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{l'} \left(\frac{l}{p} \right) q.$$

Bei gleichem gegebenen Übergewicht wird somit der Ausschlag der Wage um so gröfser

1) je kleiner l', also der Abstand des Schwerpunktes von dem Unterstützungspunkte ist. Man erkennt das auch an der Fig. 33 sofort als richtig, denn je näher g an B liegt, um so gröfser mufs der Winkel α werden, damit der Hebelarm, an welchem das Gewicht des Wagebalkens angreift, einen solchen Wert hat, dafs das zurückdrehende Moment dem Drehungsmoment des Übergewichtes gleich wird.

2) Der Winkel α wird um so gröfser, je gröfser der Quotient $\frac{l}{p}$, also aus der Länge des Wagebalkens und dem Gewichte desselben wird, je länger also bei gegebenem Gewichte p die Wagebalken sind, oder je leichter bei gegebener Länge das Gewicht des Wagebalkens ist. Diese Bedingungen sind selbstverständlich innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen, da bei zu grofser Länge oder zu kleinem Gewichte die Wagebalken sich biegen, somit die Bedingung, dafs $\beta = 0$ ist, nicht mehr erfüllt sein kann. Von zwei Wagen, bei denen der Quotient $\frac{l}{p}$ denselben Wert hat, ist schon deshalb diejenige die beste, deren Wagebalken die kürzeren sind, da bei dieser nicht so leicht Verbiegungen eintreten. Es wird sich im nächsten Paragraphen herausstellen, dafs sich mit einer solchen Wage auch schneller wägen läfst.

Die Theorie liefert daher für eine gute Wage folgende Bedingungen, die man in der Praxis möglichst zu erfüllen sucht:

1) Die beiden Wagebalken sollen einander gleich sein.

2) Der Quotient $\frac{l}{p}$ soll möglichst grofs sein.

3) Der Aufhängepunkt des Wagebalkens und diejenigen der Wagschalen sollen in einer geraden Linie liegen.

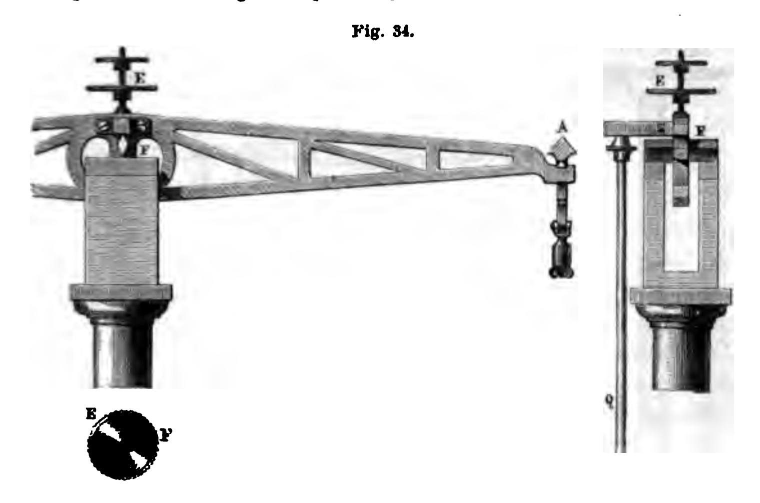
4) Der Schwerpunkt der Wage soll unter der Drehungsaxe liegen, aber derselben möglichst nahe.

Um diesen vielfachen Bedingungen Genüge zu leisten, wendet man als Wagebalken einen Messing- oder Stahlstreifen von ungefähr 5^{mm} Dicke und 60^{cm} Länge an. Man gibt ihm die Form (Fig. 34) eines länglichen verschobenen Vierecks, und, um ihn leicht zu machen, wird er vielfach durchbrochen, so dafs nur die Seiten des Vierecks übrig bleiben nebst einigen das Viereck durchsetzenden Stützen. Man erfüllt dadurch die zweite Bedingung, man erhält einen bei gegebener Länge möglichst leichten Wagebalken, ohne befürchten zu müssen, dafs er sich biegt.

Auf die Aufhängung des Balkens sowohl als der Schalen ist grofse Aufmerksamkeit zu verwenden. Es ist notwendig, Träger herzustellen, die in einer zur Drehungsebene des Wagebalkens senkrechten Linie auslaufen, die fähig sind, dem Drucke zu widerstehen, welchen die angehängten Gewichte ausüben, die sich während der Drehung des Wagebalkens nicht verschieben, und die hinlänglich beweglich sind, um nicht durch einen merklichen Reibungswiderstand die Bewegung des Wagebalkens zu hemmen. Man befestigt zu dem Ende in dem Wagebalken ein Prisma von gehärtetem Stahl F, dessen untere möglichst geradlinig gearbeitete Kante auf einer gut polierten Platte von Stahl oder besser noch von Achat aufliegt.

Es ist klar, dafs eine solche Aufhängevorrichtung den gestellten Beingungen auf das wünschenswerteste entspricht. An den Enden des Wagealkens sind ebenfalls zwei Prismen angebracht, deren Kanten nach oben erichtet sind, um auf diese die unten eben abgeschliffenen Stahlstücke *A* ufzunehmen, an denen die Wagschalen aufgehängt sind. Die Aufhängeaxen s Wagebalkens sowie der Wagschalen sind demnach die Kanten dieser ei Prismen. Diese drei Kanten müssen nun gemäfs der dritten Regel öglichst in eine gerade Linie gebracht werden, und die beiden Abstände r an den Enden des Wagebalkens angebrachten von der mittlern nach der ten Regel unter sich genau gleich gemacht werden.

Fig. 34.



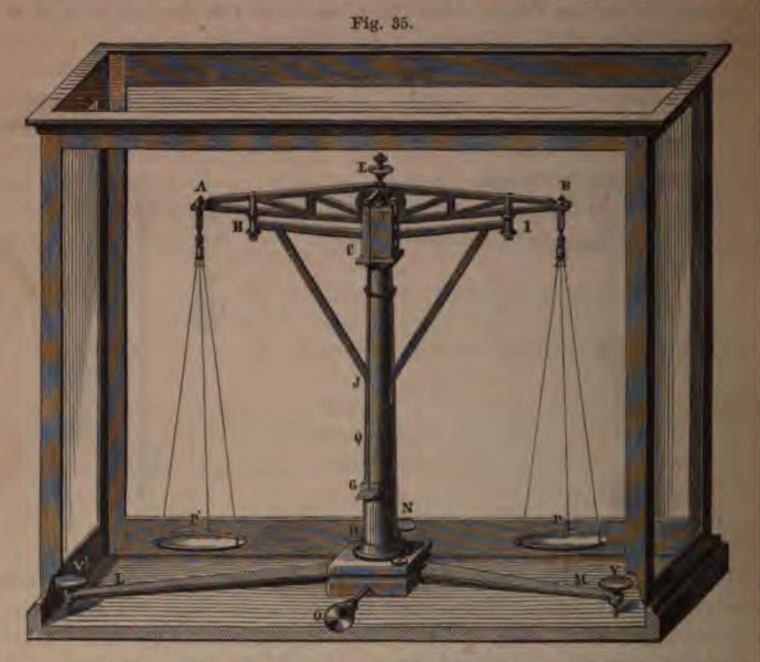
Gewöhnlich werden diese Bedingungen von dem Verfertiger der Wagen üllt, das ist bei unserer Zeichnung angenommen; zuweilen aber wird es ch demjenigen überlassen, der mit der Wage arbeitet. In dem Falle sind r zwei Prismen unveränderlich fest. Das dritte kann durch Schrauben rtikal verschoben werden, um die Kanten der drei Prismen in eine Linie ı bringen, und horizontal, um die Abstände der beiden äufsern Prismen on dem mittlern unter sich gleich zu machen.

Um die vierte und wichtigste Bedingung herzustellen, ist an dem bern Rande des Wagebalkens gerade über dem Aufhängepunkt eine Schraubenpindel mit sehr schmalen Gängen eingesetzt, auf welcher sich zwei Laufgewichte *E* auf- und abschrauben lassen. Das untere ist gröfser und schwerer, las obere kleiner und leichter. Eine Bewegung dieser Gewichte ändert die Lage des Schwerpunktes; werden sie hinaufgeschraubt, so steigt der Schwerpunkt, werden sie hinabgeschraubt, so sinkt derselbe. Die gröbern Hebungen und Senkungen des Schwerpunktes werden durch eine Bewegung der grofsen, die kleinern durch eine Drehung der kleinern Schraubenmutter bewirkt. Durch diese Vorrichtung wird also der Schwerpunkt des Wagebalkens beweglich, und man sieht, wie man ihn dadurch der Aufhängeaxe so nahe bringen und dadurch die Wage so empfindlich machen kann, wie man will. Man hat diese Vorrichtung noch dahin vervollkommnet, dafs man mittels derselben dem Schwerpunkt auch eine seitliche Bewegung geben kann. Zu dem

Ende ist auf der einen Schraubenmutter ein excentrischer Knopf an
bracht, der durch seine seitliche Bewegung bei der Drehung des La
gewichtes den Schwerpunkt auch seitlich etwas verschiebt, uns also in d
Stand setzt, ihn genau vertikal unter die Aufhängeaxe zu bringen in d
Augenblicke, wo die drei Prismenkanten sich in der Horizontalen befind

Wir bedürfen an unserer Wage noch eines Zeigers, der angibt, wa
der Wagebalken horizontal ist. Zu dem Zwecke ist in der Mitte des Balk
genau über der Aufhängeaxe eine stählerne Nadel Q (Fig. 35) befestigt,

Fig. 35.



bis unten an die Säule hinabreicht, welche die Wage trägt. Die Spitze
Nadel schwingt vor einer Elfenbeinplatte G (Fig. 35) hin und her, we
mit einer Teilung versehen ist. Man reguliert die unbelastete Wage du
Drehung der Stellschrauben $V V'$ so, dafs das Ende der Nadel gerade auf
Mitte der Teilung, dem mit 0 bezeichneten Teilstrich, einsteht. Von
Punkte geht man aus, eine Neigung des Wagebalkens wird dann du
einen Ausschlag der Nadel angegeben; und da letztere sehr lang ist,
gibt sie für die geringste Neigung schon einen deutlichen Ausschlag[1]).

Es erübrigt noch die Aufstellung der Wage zu betrachten. Dieselbe st
auf einem eisernen Dreifufs $L M N$ (Fig. 35), welcher mit Stellschrauben
versehen ist. Von der Mitte des Dreifufses erhebt sich eine Messingsäule

[1]) Der Mechaniker Bunge in Hamburg verfertigt jetzt Wagen mit
kurzen Wagebalken, indem er durch die Form, die er den Balken gibt, si
leicht machen kann, ohne Verbiegung zu befürchten, dafs die Wagen dies
Empfindlichkeit haben, als Wagen mit längern Balken. Die Wagen von Bu
werden sehr gerühmt, ich habe kein Urteil darüber, weil ich noch nicht
einer solchen gearbeitet habe; das Princip, nach dem sie gearbeitet sind,
jedenfalls ganz richtig.

auf deren Spitze die Achatplatte angebracht ist, auf welcher die Schneide des Stahlprisma F ruht. Teils um die Stahlschneide zu schonen, teils um die Wagebalken vor einer Biegung zu bewahren und die Wage besser transportieren zu können, ist an der Säule DC eine Gabel HIJ angebracht, deren Arme den Wagebalken erreichen. Sie kann mittels einer in der Säule verborgenen Zahnstange, in welche ein mittels des Knopfes O drehbares Zahnrad eingreift, gehoben und gesenkt werden. Dreht man den Knopf nach der einen Seite, so hebt man die Gabel; dieselbe nimmt den Wagebalken zwischen ihre Arme bei H und I und unterstützt ihn, indem sie ihn ein wenig emporhebt. Dreht man den Knopf O und damit das Zahnrad nach der entgegengesetzten Seite, so sinkt die Gabel hinunter, läfst die Schneide F sehr langsam auf ihre Unterlage herab und läfst dann den Wagebalken frei.

Um beim Vornehmen einer Wägung die störenden Luftströmungen, welche die Bewegung der Wage hemmen, um die Wirkung der Feuchtigkeit auf die zu wägenden Körper zu hindern, und andererseits um die Wage selbst vor Staub und sonstigen verderblichen Einflüssen zu schützen, umgibt man den ganzen Apparat mit einem Glaskasten, der an einer Seite geöffnet werden kann.

§ 22.

Prüfung der Wage; Methode der Wägungen. Wenn man die von der Theorie geforderten Bedingungen bei Herstellung der Wagen auch möglichst zu erfüllen sucht, so läfst sich eine theoretisch vollkommene Wage nicht herstellen. Man mufs deshalb eine jede Wage sorgfältig prüfen, besonders wie weit die Grundbedingung an derselben, die Gleichheit der Wagebalken erfüllt ist. Man kann das leicht durch zwei Wägungen. Wir legen in die Wagschale links einen Körper, dessen Gewicht mit q bezeichnet werde, und bringen ihn durch das auf die Schale rechts gelegte erforderliche Gewicht p ins Gleichgewicht. Ist die Länge des Wagebalkens links gleich l, rechts gleich r, so folgt

$$lq = pr.$$

Wir legen dann den Körper vom Gewichte q auf die Wagschale rechts und bringen ihn durch die erforderlichen in die linke Schale gelegten Gewichte ins Gleichgewicht. Sei dazu $p + p_1$ erforderlich, so ist

$$(p + p_1)\, l = rq.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{r}{l} = \sqrt{1 + \frac{p_1}{p}}.$$

Bei der Wägung mit einer solchen Wage müfste somit auch das beobachtete Gewicht korrigiert werden, es wäre

$$q = p \cdot \sqrt{1 + \frac{p_1}{p}}.$$

Bei Wägungen, bei denen es sich um die äufserste Genauigkeit handelt, wird man sich indes nicht mit dieser Korrektion begnügen, da schon geringe Temperatureinflüsse das Verhältnis der Längen der Wagebalken ändern können. Man wendet da besser die Methode der doppelten Wägung an. Zu dem

Zwecke legt man den abzuwägenden Körper auf die eine Wagschale, un bringt ihn durch Schrotkörner und ähnliches, die auf die andere Wagschal gelegt werden, genau ins Gleichgewicht. Dann ersetzt man den abzuwägen den Körper durch Gewichtsstücke, bis wiederum die Wage genau im Gleich gewicht ist.

Da auf diese Weise die Gewichtsstücke, durch welche das Gewich des Körpers bestimmt wird, in derselben Schale liegen, somit an demselbe Hebelarme wirken, so mufs das Gewicht derselben auf das genaueste de Gewichte des Körpers entsprechen, mögen die Arme des Wagebalkens gleic sein oder nicht, wenn nur die Wage empfindlich genug ist, um die kleinst Gewichtsdifferenzen anzugeben.

Die Empfindlichkeit der Wage nimmt, wenn die Aufhängepunkte de Wagebalkens und der Wagschalen nicht in einer geraden Linie liegen, mi steigender Last ab. Wenn nun auch ursprünglich diese drei Punkte in eine geraden Linie liegen, so ist bei den feinen Wagen doch nicht zu vermeiden dafs bei Wägung grofser Gewichte eben wegen der Länge und Leichtigkei des Wagebalkens derselbe eine geringe Biegung erhält. Dadurch aber sink der Schwerpunkt des Wagebalkens herab, und die Wage verliert an Empfind lichkeit. Um diesen Fehler zu korrigieren, sind die über dem Wagebalke angebrachten Laufgewichte vorzüglich brauchbar, indem sie die Lage de Schwerpunktes ändern. Man kann mittels derselben der Wage immer di gröfste Empfindlichkeit geben.

Will man kleine Gewichte wägen, so schraubt man vorher die beide Laufgewichte in die Höhe, bis die Wage in den Zustand des labilen Gleich gewichts versetzt wird; dann schraubt man das eine der Gewichte wiede herunter, bis das Gleichgewicht der Wage gerade wieder anfängt stabil z werden. Auf diese Weise ist in dem Falle das Maximum der Empfindlichkei erreicht. Will man grofse Gewichte abwägen, so legt man zunächst a die beiden Wagschalen Gewichte, welche nahezu eine gleiche Belastung aus machen als die zu bestimmenden. Dann verfährt man gerade wie vorhe man schraubt die beiden Laufgewichte bis zum labilen Gleichgewicht de Wage in die Höhe und läfst dann das eine soweit herab, bis das Gleichgewich der Wage wieder stabil wird. Auch hier ist dann wieder das Maximum de Empfindlichkeit erreicht.

Da die Wägungen zu den feinsten und wichtigsten Versuchen in de Physik gehören, so wird es gut sein, das Verfahren bei denselben etwa genauer zu beschreiben. Wir setzen voraus, die Wage stehe auf einen festen Tische, durch die Stellschrauben sei der Zeiger bei unbelasteter Wag auf den Nullpunkt geführt, man habe der Wage den abzuwägenden Ge wichten gemäfs das Maximum der Empfindlichkeit gegeben und wolle di Methode der doppelten Wägung anwenden. Man legt alsdann den ab zuwägenden Körper in die eine Wagschale und Schrot in die andere, bi das Gleichgewicht nahezu hergestellt ist; das bietet keine Schwierigkeit Ist das erreicht, so arretiert man mittels der Gabel den Wagebalken, hemm mit der Hand die Schwankungen der Schalen, schliefst den Kasten un läfst die Gabel vorsichtig wieder herab. Die Nadel wird dann sehr langsa vor der Teilung hin und her schwingen. Man beobachtet dann eine Anzal Schwingungen; ist das Gleichgewicht erreicht, so sind die Schwingunge um den Nullpunkt symmetrisch, so dafs die Summe zweier auf einande

den Schwingungen nach der einen Seite gleich ist dem doppelten
der zwischen den beiden liegenden Schwingung nach der entgegen-
ten Seite. Man wird nämlich bei absolut gleicher Belastung, oder
wenn man die mit aller Genauigkeit justierte Wage ohne Belastung in
hwingung versetzt, finden, dafs die auf einander folgenden Schwingungen
von gleicher Gröfse sind, dafs die Weite der Schwingungen vielmehr
und regelmäfsig abnimmt. Geht etwa die erste Schwingung nach
um r Skalenteile, so findet man die darauf folgende Schwingung
links etwa $r - \alpha$ Skalenteile; dann bewegt sich der Zeiger nach rechts
$- 2\alpha$ Skalenteile, wieder nach links um $r - 3\alpha$ Skalenteile u. s. f.
rund dieser Abnahme liegt darin, dafs der Bewegung der Wage der
stand der Luft und die Reibung in der Aufhängung entgegen wirkt.
hnen wir nun die Schwingungen, ausgedrückt in Teilen der Skala
rechts mit $r_1, r_2, r_3 \cdots$, nach links mit $l_1, l_2, l_3, \cdots$, so mufs, wenn
age um die horizontale Lage, der Zeiger also um den Nullpunkt
igt,

$$r_1 + r_2 = 2l_1$$
$$2r_2 = l_1 + l_3$$
$$r_3 + r_2 = 2l_2$$

sein. Findet man also nach der vorgenommenen Tarierung, dafs dies
at ist, so folgt, dafs die Ruhelage des Wagebalkens die horizontale,
dafs das Gleichgewicht erreicht ist. Findet man dagegen, dafs

$$r_1 + r_2 \gtrless 2l_1$$

s. f., so beweist das, dafs die Ruhelage des Wagebalkens nicht die
ntale, somit dafs das Gleichgewicht noch nicht erreicht ist; ist
$r_2 < 2l_1$, so ist die Wage rechts zu schwer, im entgegengesetzten
auf der linken Seite. Man mufs dann, nachdem man die Wage arre-
hat, mit einer Pincette ein Schrotkorn fortnehmen oder zulegen,
idem die Tara zu grofs oder zu klein ist. Wenn durch Wegnehmen
Zulegen eines Schrotkornes aber die Tara zu sehr geändert wird, so
man feineres Schrot anwenden oder Papierschnitzel oder auch Sand-
r und so lange mit dem Ab- und Zugeben dieser kleinen Gewichtchen
hren, bis die Schwingungen des Zeigers der angegebenen Bedingung
echen[1]).

Dann ist der Körper tariert; nun wird er aus der Wagschale genommen,
seiner werden Gewichte hineingelegt und mit den Gewichten jetzt gerade
fahren, wie vorhin mit der Tara. Man findet zunächst das notwendige
ht leicht als zwischen n und $n + 1$ Gramme enthalten und hat dann zu
Gewichte noch die Bruchteile eines Gramm zu legen. Zu dem Ende
en sich in den Gewichtssätzen 9 Decigramme in Stücken von 5, 2 und
igramm, so dafs man dadurch eine beliebige Zahl von Decigrammen

[1]) Die oben auseinandergesetzte Beobachtung der Gleichgewichtslage aus
hwingungen ist der Beobachtung ohne Schwingungen vorzuziehen, da sie
r ist und rascher zum Ziele führt. Gerade dann zeigt sich aber der Vor-
r Wagen, welche bei gleicher Empfindlichkeit die kürzesten Balken haben,
Schwingungsdauer bei kürzern Balken immer kleiner ist als bei längern
t.

zwischen 1 und 9 herstellen kann. Ebenso findet man 9 Centigramme und 9 Milligramme in ähnlichen Stücken, so dafs man bis auf Milligramme genau das Gewicht eines Körpers erhalten kann.

An vielen Wagen ist nun noch eine Vorrichtung, um selbst die Bruchteile der Milligramme bis auf 0,1 zu erhalten. Es ist nämlich jede Hälfte des Wagebalkens durch vertikale Striche zunächst in 10 gleiche Teile geteilt und diese einzelnen Teile nochmal in 10 gleiche Unterabteilungen. Bei den Gewichtssätzen befinden sich dann Häkchen von Platindraht, genau ein Centigramm schwer, welche als Reiterchen auf dem Wagebalken verschoben werden können. Auf dem ersten Hauptteilstrich wirkt dann ein solches Reiterchen gerade soviel als 1 Milligramm in der Wagschale, weil es an einem Hebelarm wirkt, der nur 0,1 der Länge des Wagebalkens hat; auf den Teilstrichen 2, 3, · · · als 2, 3 · · · Milligramme und auf den zwischen den Hauptteilstrichen eingeschnittenen Teilstrichen als 1,1; 1,2 etc Milligramme, so dafs man durch Verschiebung der Reiter zugleich di Milligramme und ihre Bruchteile erhält.

Die Unterabteilungen der Grammgewichte verfertigt man sich am besten selbst, da man sich meist auf die käuflichen nicht sicher verlassen kann. Man macht dieselben aus Platindraht, der mehrmals durch denselben Drahtzug gezogen ist, und von dem eine Länge von 1 Meter ungefähr ein Gramm wiegt. Nachdem man von einem solchen Draht ein Stück abgeschnitten, welches etwas mehr als ein Gramm wiegt, beschneidet man es um es genau auf ein Gramm zu bringen. Dann wird es ausgespannt und seine Länge gemessen; da nun jedes Zehntel des Drahtes ein Decigramm wiegt, so zerteilt man ihn nach der Länge in Stücke von 5, 2, 1, 1 Decigramm. Das übrig bleibende Zehntel wird dann in einem Drahtzuge zu ungefähr einem Meter ausgezogen, und man verfährt mit dem neuen Stück wie vorhin, um die Centigramme zu erhalten. Das dann übrig bleibend Zehntel wird dann zu Milligrammen verarbeitet. Schliefslich gibt man dann den verschiedenen Drahtstücken entsprechende Formen, welche ihr Gewich bezeichnen.

§ 23.

Specifisches Gewicht und Dichtigkeit. Mittels der Wage sind wi imstande eine wichtige Eigenschaft der Körper zu erkennen. Man finde nämlich sehr oft, dafs zwei gleiche Volumina verschiedener Körper nich das gleiche Gewicht haben, oder was dasselbe ist, dafs das Verhältnis de Volumina verschiedener Körper zu ihren Gewichten nicht dasselbe ist. Fü einen und denselben Körper ist das Gewicht P seinem Volumen V propor tional, also .

$$P = V \cdot p \text{ oder } \frac{P}{V} = p.$$

Diese Gröfse p nennt man das specifische Gewicht der Körper. Di Gröfse p gibt also das Verhältnis des Gewichtes zum Volum eines Körpe oder das Gewicht der Volumeinheit. Die Gröfse p ist konstant für ein un dieselbe Substanz bei gleicher Temperatur, für verschiedene Substanze verschieden.

Da die Gröfse p das Gewicht eines bestimmten Volumens eines Körpe ausdrückt, so ist sie eigentlich abhängig von den gewählten Einheiten d

Gewichts und Volumens und daher in verschiedenen Ländern numerisch verschieden. Um jedoch diese Verschiedenheit zu vermeiden, ist man übereingekommen, die specifischen Gewichte überall in derselben Einheit auszudrücken, nämlich als Einheit das Gewicht der Volumeinheit Wasser zu nehmen. Für gleiche Volumina hat man

$$\text{für irgend einen Körper } P = V \cdot p$$

$$\text{für Wasser} \cdots\cdots \quad P' = V \cdot p'$$

und daraus

$$\frac{P}{P'} = \frac{p}{p'} = s,$$

so dafs s das Verhältnis des Gewichtes der Volumeinheit eines Körpers zu dem der Volumeinheit von Wasser bei 4° C. darstellt. Es ist das relative specifische Gewicht, welches aber meist schlechthin das specifische Gewicht genannt wird.

Um es zu erhalten, genügt es, das Verhältnis der Gewichte P und P' zu bestimmen, d. h. des Gewichtes von einem beliebigen Volum eines Körpers zu dem eines gleichen Volum Wasser von 4°. Dieses Verhältnis ist sonach unabhängig von den gewählten Einheiten.

Man hat nun

$$P = P' \cdot s = V \cdot p' \cdot s,$$

d. h. das Gewicht eines Körpers ist gleich dem Produkt aus seinem Volumen V, seinem relativen specifischen Gewicht s und dem Gewicht p' der Volumeinheit Wasser von 4°.

Legt man das Grammgewicht zu Grunde, so ist die Gewichtseinheit schon die von 1 Kubikcentimeter Wasser bei 4°, also das Gewicht p' gleich 1; in dem Falle hat man daher

$$P = V \cdot s.$$

Diese Vereinfachung gilt jedoch nur dann, wenn man das Verhältnis des Gewichts eines Körpers zu dem eines gleichen Volumens Wasser als sein relatives specifisches Gewicht nimmt; geht man von dem Gewicht der Volumeinheit eines andern Körpers aus, so fällt sie fort.

Bei den Gasen und Dämpfen z. B. geht man von dem Gewicht der Volumeinheit der atmosphärischen Luft aus; p' ist dann das Gewicht eines Kubikcentimeter atmosphärischer Luft bei 0° und 760^{mm} Barometerstand gleich $0^{gr},001\,293$. Das Gewicht des Volum V irgend eines Gases ist dann, wenn s sein specifisches Gewicht in Bezug auf atmosphärische Luft ist,

$$P = V \cdot s \cdot 0,001\,293.$$

Wir haben früher § 6 die Masse eines Körpers definiert und gesehen, dafs sie gemessen wird durch den Quotienten seines Gewichtes und der Beschleunigung g, die er beim freien Falle erhält. Die Masse eines Körpers ist also seinem Gewichte und somit für eine und dieselbe Substanz auch dem Volumen proportional. Man hat sonach

$$m = V \cdot d, \quad \frac{m}{V} = d.$$

Der Quotient d heifst die Dichtigkeit des Körpers, er gibt die Masse der Volumeinheit.

Man kann die Massen der verschiedenen Körper mit der eines gleichen Volumen Wasser von 4⁰ vergleichen. Bedeuten m', V', d' Masse, Volumen und Dichtigkeit des Wassers, so hat man

$$m = Vd, \quad m' = Vd',$$

$$\frac{m}{m'} = \frac{d}{d'} = \delta.$$

Dieses Verhältnis δ der Massen gleicher Volumina eines Körpers und Wassers ist die relative Dichtigkeit, welcher die Masse der Volumeinheit Wasser als Einheit zu Grunde liegt.

Nun ist

$$m = \frac{P}{g}, \quad m' = \frac{P'}{g},$$

und daher

$$\frac{m}{m'} = \frac{P}{P'} = \delta = s.$$

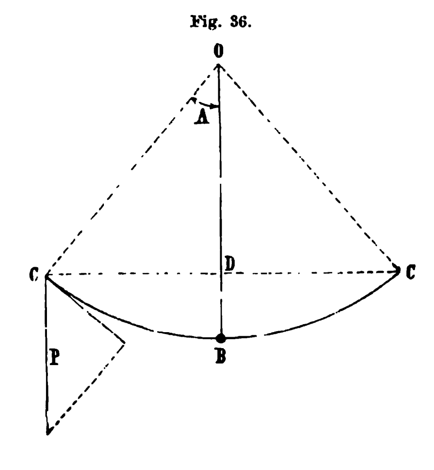
Es geht daraus hervor, dafs Dichtigkeiten und specifische Gewichte der Körper durch eine und dieselbe Zahl dargestellt werden. Dennoch aber sind Dichtigkeiten und specifische Gewichte verschieden, und die Einheiten, die beiden zu Grunde liegen, sind nicht dieselben; bei dem einen ist es das Gewicht, bei dem andern die Masse der Volumeinheit Wasser.

Vielfach läfst man indes diesen Unterschied fallen, gebraucht die Bezeichnung Dichtigkeit auch für das specifische Gewicht und trennt ebenfalls nicht scharf relatives und eigentliches specifisches Gewicht oder Dichtigkeit.

§ 24.

Das Pendel. Die zweite Anwendung, welche wir von den in den frühern Paragraphen abgeleiteten Gesetzen der drehenden Bewegung machen müssen, ist die Untersuchung der Bewegung des Pendels; wir erhalten dadurch zunächst die Theorie des gewöhnlichen Pendels, welches wir zum Messen der Zeit gebrauchen, weiter aber benutzen wir diese Sätze in ausgedehntester Weise zur Messung von Kräften, Trägheitsmomenten und Beschleunigungen.

Fig. 36.



Das Pendel in seiner einfachsten Form ist ein Stab oder Faden OB (Fig. 36), welcher um eine Axe O drehbar ist und an seinem untern Ende oder in der Nähe desselben ein Gewicht B trägt. In der Gleichgewichtslage mufs der Schwerpunkt des Pendels vertikal unter der Drehungsaxe sich befinden, das Pendel mufs also vertikal hängen. Heben wir dasselbe aus der Gleichgewichtslage nach der einen Seite heraus, etwa nach OC, so dafs die Lage des Pendels mit der Gleichgewichtslage den Winkel A bildet, und überlassen es dann sich selbst, so mufs das Pendel sich gegen die Gleichgewichtslage hin bewegen. Denn das im

Schwerpunkte des Pendels angreifende Gewicht P, welches vertikal abwärts gerichtet ist, gibt demselben ein Drehungsmoment, welches das Pendel gegen die Gleichgewichtslage hintreibt. Dieses Drehungsmoment ist gleich dem Produkte aus der zu OC senkrechten, also der in die augenblickliche Bewegungsrichtung fallenden Komponente der Kraft, des im Schwerpunkt angreifenden Gewichtes P, und dem Abstande des Schwerpunktes von der Drehungsaxe. Die zu OC senkrechte Komponente der Kraft ist $P \sin A$; nennen wir den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe z, so ist das Drehungsmoment, welches das Pendel aus seiner augenblicklichen Lage gegen die Gleichgewichtslage hintreibt, $P \sin A \cdot z$. Sowie nun aber das Pendel seine Lage OC verlassen hat, und einen kleinern Winkel α mit der Gleichgewichtslage bildet, wird auch sofort das Drehungsmoment kleiner, es geht über in $P \sin \alpha \cdot z$, da dann die Komponente der Kraft nur mehr $P \sin \alpha$ ist. Die bewegende Kraft wird somit stetig kleiner mit $\sin \alpha$, um gleich Null zu werden, wenn α und damit $\sin \alpha = 0$ wird. Das Pendel mufs daher auf seiner Bahn OB eine beschleunigte Bewegung erhalten, deren Beschleunigung mit Annäherung an die Gleichgewichtslage aber immer kleiner wird.

In der Lage OB angekommen, besitzt das Pendel eine gewisse Winkelgeschwindigkeit, es kann deshalb in dieser Lage nicht verharren, sondern mufs vermöge der Trägheit nach der andern Seite weiter gehen. Sowie es aber an dieser mit der Gleichgewichtslage einen Winkel α bildet, wirkt wieder ein Drehungsmoment von der Gröfse $P \sin \alpha \cdot z$ auf dasselbe ein, aber jetzt in entgegengesetzter Richtung, da α jetzt an der andern Seite der Vertikalen liegt. Dasselbe wirkt somit jetzt gerade so verzögernd auf die Bewegung ein wie vorher beschleunigend. Da nun die jetzt verzögernden Drehungsmomente genau denselben Wert haben, wie bei einem gleichen Winkel α auf der andern Seite die beschleunigenden, so folgt, dafs das Pendel sich nach dieser Seite der Vertikalen, bis durch die fortdauernd wirkende Verzögerung die Geschwindigkeit gleich Null geworden ist, durch genau denselben Winkel BC' aufsteigend bewegen mufs, als der Bogen BC war, auf welchem die Geschwindigkeit von Null bis zu jenem Werte gewachsen ist, den das Pendel bei dem Passieren der Gleichgewichtslage besafs. In dieser äufsersten Lage angekommen mufs das Pendel einen Augenblick in Ruhe sein; das dann aber wirkende Drehungsmoment $P \sin A \cdot z$ treibt das Pendel zurück, und da das Pendel diesen Rückgang unter genau denselben Umständen beginnt und fortsetzt, so folgt, dafs es jetzt genau denselben Bogen $C'BC$ und genau in derselben Weise in entgegengesetztem Sinne durchläuft wie bei der ersten Bewegung von C nach C'. Daraus folgt, dafs das Pendel unaufhörlich denselben Bogen CBC' einmal in der einen, dann in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen mufs. Das Pendel nimmt somit eine schwingende Bewegung an, es vollführt Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Die Gröfse des Bogens, durch welchen das Pendel schwingt, nennt man seine Schwingungsweite oder Amplitude. Dieselbe müfste nach unserer Betrachtung konstant sein; in Wirklichkeit ist das indes nicht der Fall, da wir bei unserer Ableitung die der Bewegung entgegenstehenden Hindernisse, als Reibung in der Aufhängeaxe, Widerstand der Luft, aufser Acht gelassen haben. Da die Überwindung derselben in jedem Momente etwas Arbeit erfordert, so wird die

dem Pendel durch die erste Hebung erteilte Arbeit allmählich verbrau die Amplituden werden kleiner und das Pendel kommt allmählich zur R Diese Abnahme lassen wir zunächst aufser Acht, und nehmen an, das Pe bewege sich ohne Widerstand, oder, wie es in unsern Uhren der Fall es erhalte jedesmal in der äufsersten Lage einen solchen Antrieb, dafs durch der zur Überwindung der Widerstände stattgehabte Arbeitsver gerade ausgeglichen werde.

Dann erkennt man weiter, dafs die Zeit, welche das Pendel zur V führung einer Schwingung gebraucht, seine Schwingungsdauer, immer selbe sein mufs, da es immer denselben Weg unter denselben Verhältni zurücklegt. Gerade das macht das Pendel zu einem vorzüglichen Mi der Zeitmessung, dafs es uns genau gleiche Zeitabschnitte angibt.

§ 25.

Ableitung der Schwingungsdauer des Pendels. Die Untersuch von welchen Umständen die Schwingungsdauer des Pendels abhängig könnten wir zum Teil wenigstens experimentell führen; wir wollen i die Gesetze der Pendelbewegung aus den allgemeinen Bewegungsgese ableiten, da sie uns ein ausgezeichnetes Beispiel der Bewegung durch n konstante Kräfte bietet.

Wir sahen im vorigen Paragraph, dafs das Drehungsmoment, wel das Pendel in jedem Momente antreibt, wenn es mit der Gleichgewichts den Winkel α bildet, gleich $Pz \sin \alpha$ ist. Setzen wir zunächst voraus, die Amplitude so klein sei, dafs wir den Sinus gleich dem Bogen se dürfen, so können wir auch als Drehungsmoment $Pz\alpha$ setzen. Dieses Drehu moment gibt uns nach § 14 die in der Abstandseinheit von der Drehung angreifende Kraft; das heifst die in der Abstandseinheit von der Drehu axe angreifende Kraft $Pz\alpha$ ersetzt die das Pendel wirklich in Beweg setzenden Kräfte.

Um die Beschleunigung zu erhalten, welche diese Kraft dem Pe in dem Momente erteilt, in welchem es mit der Vertikalen den Wink bildet, müssen wir die Masse bestimmen, welche in der Abstandsein von der Drehungsaxe die Masse des Pendels ersetzt, welche an Stelle gegebenen Pendels dort angebracht durch die wirksamen Kräfte genau selbe Winkelgeschwindigkeit bekommt, als das Pendel. Wir wissen, diese Masse durch das Trägheitsmoment des Pendels gegeben ist. Se wir voraus, wir hätten dasselbe berechnet und gleich K gefunden. D ist dann die Beschleunigung, die das Pendel in diesem Momente er resp. die Beschleunigung des in der Abstandseinheit von der Drehung liegenden Punktes, an dem die Kraft angreift, und in dem die Mass sich befindet,

$$\frac{Pz\alpha}{K}.$$

Für diese Beschleunigung erhalten wir andererseits nach § 1 § 12 den Quotienten aus der Geschwindigkeitszunahme dv und der unen kleinen Zeit dt, während deren wir die Kraft als konstant ansehen kö erhalten somit die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Pz\alpha}{K}.$$

Wir müssen in dieser Gleichung indes für die rechte Seite noch das Vorzeichen richtig bestimmen, da wir sahen, dafs die Beschleunigung bald ositiv, bald an der andern Seite der Gleichgewichtslage negativ ist. Da las Pendel sich zu verschiedenen Zeiten an den entgegengesetzen Seiten ler Gleichgewichtslage in gleichen Abständen α befindet, so müssen wir, um lie absolut gleichen aber an entgegengesetzten Seiten der Ruhelage vorommenden Lagen zu unterscheiden, dieselben mit entgegengesetztem Voreichen versehen. Wir wollen nun die Abstände von der Gleichgewichtslage ach links hin mit dem positiven, diejenigen nach rechts hin mit dem negaiven Vorzeichen versehen. Dann müssen wir auch die Beschleunigung ach links hin als positive, die nach rechts hin als negative bezeichnen. Tun ist, so lange das Pendel sich links befindet, also α positiv ist, die eschleunigung nach rechts gerichtet, also negativ, so lange α negativ ist, as Pendel sich rechts befindet, nach links; oder die Beschleunigung hat mmer die dem augenblicklichen Abstande α entgegengesetzte Richtung. Vir müssen daher in unserer Gleichung der rechten Seite das negative orzeichen geben, um zu erkennen, dafs die Beschleunigung immer der ichtung, nach welcher α gerechnet ist, entgegengesetzt ist, oder es ist

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Pz\alpha}{K}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{Pz}{K} = k^2,$$

) wird

$$\frac{dv}{dt} = -k^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wir erhalten hier den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach er Zeit nicht als eine Funktion der Zeit angegeben, sondern als eine unktion der Lage des Punktes in seiner Bahn. Wir können demnach hier icht die in der Einleitung abgeleiteten Sätze, nach denen wir aus dem ifferentialquotienten nach einer Veränderlichen die Funktion ableiten, unittelbar anwenden. Wir gelangen indes leicht dazu, wenn wir mit Hülfe es im § 11 abgeleiteten Satzes, dafs die Arbeit der Kraft gleich ist der ebendigen Kraft, welche diese Arbeit der Masse erteilt hat, aus der leichung (1) eine andere ableiten. Wir gehen dabei aus von der äufserten Lage des Pendels, in welcher es die Ablenkung α_0 und die Geschwindigeit o hat. Fällt es dann herab, bis die Ablenkung α ist, so sei seine Gechwindigkeit in diesem Momente gleich v, somit seine lebendige Kraft leich $\frac{1}{2}Kv^2$. Diese lebendige Kraft ist der Masse K dadurch erteilt woren, dafs auf jedem Wegeelement $d\alpha$ von α_0 bis α die Kraft $Pz\alpha$ gewirkt at. Da die Masse K sich in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe efindet, und wir α als Bogen in Bruchteilen des Kreisumfanges 2π rechnen,) ist $d\alpha$ im Längenmafs der Weg, durch welchen die Kraft $Pz\alpha$ gewirkt t, somit $Pz\alpha d\alpha$ die auf dem Wegeelement $d\alpha$ geleistete Arbeit. Die ımmen aller der Arbeiten von α_0 bis α genommen ist demnach gleich r überhaupt geleisteten Arbeit oder gleich der gewonnenen lebendigen aft, oder es ist

$$\frac{1}{2}Kv^2 = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} Pz\alpha\, d\alpha,$$

worin wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen setzen müssen, weil das Zurücklegen des Bogens $d\alpha$, wenn α positiv ist, während die Geschwindigkeit v wächst, einer Verminderung des Bogens α entspricht. Das auf der rechten Seite der Gleichung stehende bestimmte Integral ergibt sich unmittelbar nach E 1 und VIII, es ist

$$\tfrac{1}{2} K v^2 = -\tfrac{1}{2} P z\,(\alpha^2 - \alpha_0^2) = \tfrac{1}{2} P z\,(\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Für die Geschwindigkeit v im Abstande α von der Gleichgewichtslage ergibt sich daraus

$$v^2 = \frac{Pz}{K}(\alpha_0^2 - \alpha^2) = k^2(\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Dafs diese Gleichung die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung gemäfs unserer vorigen Betrachtung wiedergibt, erkennt man sehr leicht. Die Geschwindigkeit ist gleich Null, wenn $\alpha = \alpha_0$, in der äufsersten Lage von wo aus die Bewegung beginnt; sie wächst mit abnehmendem α und erhält ihren gröfsten Wert, wenn $\alpha = 0$, wenn das Pendel die Gleichgewichtslage passiert. Nach Überschreiten derselben nimmt sie wieder ab, und hat für gleiche Werte α auf beiden Seiten der Gleichgewichtslage denselben Wert, da α^2 für ein positives oder negatives α denselben Wert hat. Da die Gleichung für v

$$v = \pm k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}$$

wird, so gibt sie gleichzeitig an, dafs die Geschwindigkeit bei der einen Schwingung nach der einen, bei der andern nach der entgegengesetzten gerichtet ist.

Aus dieser Gleichung für die Geschwindigkeit der Bewegung müssen wir nun ableiten, welche Zeit das Pendel braucht, um irgend ein beliebiges Stück seiner Bahn zurückzulegen, woraus sich dann die Zeit ergibt, welche das Pendel zum Durchlaufen seiner ganzen Bahn gebraucht. Nach § 1 resp. § 11 haben wir, wenn s die von dem Körper in der Zeit t durchlaufene Bahn ist,

$$\frac{ds}{dt} = v\,; \quad ds = v \cdot dt.$$

Da nun $d\alpha$ die von dem Pendel in der Zeit dt zurückgelegte Strecke ist, so wird

$$d\alpha = v dt = -k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2} \cdot dt,$$

wo wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen schreiben, wenn wir die Bewegung von dem positiven Werte α_0 aus verfolgen, da die Geschwindigkeit, wenn wir die Schwingung von $+\alpha_0$ zu $-\alpha_0$ betrachten, nach der negativen Seite gerichtet, also negativ zu setzen ist. Für die Zeit dt, während welcher die Strecke $d\alpha$ durchlaufen wird, ergibt sich daraus

$$dt = -\frac{d\alpha}{k\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}.$$

Die Bewegung beginnt in dem Augenblick, in welchem wir das Pendel in seiner äufsersten Lage, wo $\alpha = \alpha_0$, loslassen; die Zeit t, welche es braucht, um einen solchen Bogen zurückzulegen, dafs α_0 in α übergeht, ist die Summe der Zeitelemente dt, während deren es die Wegeelemente $d\alpha$ durchlief, welche auf dem Wege von α_0 bis α liegen, also

$$t = \int dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}},$$

oder auch

$$k \cdot t = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\frac{1}{\alpha_0} d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}}.$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Differentialausdruck ist der E 9 abgeleitete, wie man unmittelbar erkennt, wenn man $\frac{\alpha}{\alpha_0} = x$ setzt, wonach $dx = \frac{1}{\alpha_0} d\alpha$ wird. Demnach wird

$$kt = \text{arc}\left(\cos = \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) - \text{arc}\left(\cos = \frac{\alpha_0}{\alpha_0}\right).$$

Der Bogen, dessen Cosinus gleich $\frac{\alpha_0}{\alpha_0}$, also gleich 1 ist, ist 0, 2π, oder überhaupt irgend ein Vielfaches von 2π. Welchen Wert wir dafür setzen, ist gleichgültig, da wir für $t = 0$ auch in dem ersten Gliede auf der rechten Seite $\alpha = \alpha_0$ zu setzen haben, wir also dort von demselben Werte ausgehen müssen, den wir dem zweiten beilegen. Wir setzen deshalb am einfachsten das Glied gleich Null, und erhalten

$$kt = \text{arc}\left(\cos = \frac{\alpha}{\alpha_0}\right).$$

Die Schwingungsdauer des Pendels T erhalten wir hieraus, wenn wir α so bestimmen, dafs die zurückgelegte Bahn der ganzen Amplitude entspricht; das ist der Fall, wenn $\alpha = -\alpha_0$ wird, demnach

$$kT = \text{arc}(\cos - 1) = \pi,$$

somit

$$T = \pi \frac{1}{k}.$$

Da wir nun gesetzt hatten

$$k^2 = \frac{Pz}{K}; \quad \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{K}{Pz}},$$

so folgt schliefslich

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pz}}.$$

Die Schwingungsdauer des Pendels ist somit gleich der Zahl π multipliziert mit der Quadratwurzel aus dem Quotienten des Trägheitsmomentes des Pendels und des Drehungsmomentes, welches die wirksamen Kräfte dem Pendel erteilen, wenn α oder vielmehr, da wir α für $\sin \alpha$ gesetzt haben, wenn $\sin \alpha = 1$ ist, also das Pendel in horizontaler Lage ist.

Um zu erkennen, dafs obige Gleichung für t uns die Schwingung des Pendels so darstellt, wie uns die Betrachtungen des vorigen Paragraphen sie lieferten, schreiben wir

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \cos kt, \quad \alpha = \alpha_0 \cos kt,$$

wofür wir auch, da

$$k = \frac{\pi}{T},$$

setzen können

$$\alpha = \alpha_0 \cos \pi \frac{t}{T}.$$

Ist $t = 0$, so wird der Cosinus gleich 1, somit $\alpha = \alpha_0$; wächst wird der Cosinus immer kleiner, bis er für $t = \frac{1}{2} T$ gleich Null wird Pendel hat somit nach der ersten Hälfte der Schwingungsdauer die G gewichtslage erreicht. Wächst t weiter, so wird der Cosinus und da negativ, das Pendel bewegt sich auf die andere Seite der Gleichgewich bis für $t = T$ die Ablenkung $\alpha = -\alpha_0$ wird. Bei weiterer Zunahm t nimmt der negative Wert des Cosinus und damit α wieder ab, wi $t = \frac{3}{2} T$ gleich Null, und wird dann wieder positiv und wächst bis $t = 2T$ u. s. f. Kurz wir sehen, das Pendel geht unaufhörlich hi her, und legt jedesmal in der Zeit T seine Bahn zurück.

Die abgeleitete Gleichung gibt somit in der That die Bewegu Pendels gerade so wieder, wie wir sie durch die Betrachtung des v Paragraphen erkannt hatten.

§ 26.

Mathematisches und physisches Pendel. Der vorhin f Schwingungsdauer des Pendels erhaltene Ausdruck

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{Pz}}$$

nimmt eine sehr einfache Form an, wenn wir voraussetzen, das Pend stehe aus einem gewichtslosen Faden, an dessen unterem Ende si schwerer Punkt befände. Sei die Länge des Fadens gleich l, das G des Punktes gleich P, so erhalten wir für das Trägheitsmoment des P

$$K = \frac{P}{g} \cdot l^2,$$

und für das statische Moment

$$Pz = Pl,$$

da, wenn der Faden gewichtslos ist und das Gewicht P ein schwerer ist, die ganze Masse sich im Abstande l von der Drehungsaxe befinde ebenso der Schwerpunkt in den Punkt P fällt. Die Schwingungsdaue dann

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ein solches Pendel, welches man in Wirklichkeit strenge nich stellen kann, nennt man ein mathematisches Pendel. Für dieses ge wir zu dem Satze, dafs die Schwingungsdauer der Quadratwurzel a Pendellänge direkt und der Quadratwurzel aus der Beschleunigung b freien Fall umgekehrt proportional ist.

Die wirklich herstellbaren Pendel, bei denen also die Masse a ganzen Pendel verteilt ist, nennt man physische Pendel. Mit einem physischen Pendel hat ein mathematisches bestimmter Länge die g

Schwingungsdauer; diese Länge bezeichnet man als die Länge des physischen Pendels. Einen Ausdruck für diese Länge gibt uns unsere Gleichung für die Schwingungsdauer des physischen Pendels unmittelbar, wenn wir die Masse des Pendels m einführen, also

$$\frac{P}{g} = m, \quad P = g\,m$$

setzen, denn dann wird der Ausdruck für T

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{g\,m\,z}},$$

und die Länge l des isochron schwingenden mathematischen Pendels wird

$$l = \frac{K}{m\,z}.$$

Den in dem so bestimmten Abstande l von der Drehungsaxe liegenden Punkt des physischen Pendels nennt man den Schwingungspunkt des Pendels.

§ 27.

Experimentelle Prüfung der Pendelgesetze. Die theoretisch abgeleiteten Gesetze über die Schwingungsdauer des Pendels lassen sich in doppelter Weise experimentell prüfen. Zunächst kann man Pendel herstellen, welche einem mathematischen Pendel möglichst nahe kommen, indem man einen möglichst leichten Faden unten mit einer kleinen aber möglichst schweren Kugel belastet. Für ein solches Pendel mufs dann die Schwingungsdauer durch die Gleichung

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gegeben sein, worin man für l ohne merklichen Fehler den Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der Drehungsaxe einsetzen kann.

Stellt man ein solches Pendel etwa aus einem ganz feinen weichen Kupferdraht her, an welchem unten eine Bleikugel befestigt ist, so kann man zunächst leicht zeigen, dafs bei kleinen Amplituden die Schwingungsdauer nicht merklich von der Amplitude beeinflufst wird. Man versetzt das Pendel in Schwingungen, so dafs α_0, der Anfangsausschlag nur etwa 4^0 beträgt. Wie wir schon bemerkten werden wegen der verschiedenen Widerstände, welche der Bewegung des Pendels entgegenwirken, die Amplituden der Bewegung immer kleiner, ein solches Pendel macht aber doch, ehe es zur Ruhe kommt, einige hundert Schwingungen. Bestimmt man nun die Dauer etwa der ersten hundert, dann der zweiten etc. hundert Schwingungen, so findet man die Zeit stets gleich, trotzdem die Gröfse der Amplitude bei den weiter folgenden Schwingungen stets kleiner ist als bei den vorhergehenden.

Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Länge des Pendels erkennt man, indem man Fäden von verschiedener Länge anwendet. Nimmt man Fäden, deren Längen sich verhalten wie 1, 4, 9, 16, so findet man, dafs die Schwingungsdauern sich verhalten wie 1 : 2 : 3 : 4.

Eine vollständigere experimentelle Prüfung der Pendelgesetze können wir indes durch Herstellung eines Pendels erreichen, an welchem wir die

statischen Momente und die Trägheitsmomente zu verändern imstande sind. An den beiden Enden AB (Fig. 37) eines dünnen und leichten Stabes von Tannenholz befestigen wir zwei schwere Bleikugeln, deren Gewicht resp. P und $P + p$ ist. Mittels einer in der Mitte O des Stabes befestigten Stahlschneide setzen wir dann den Stab auf eine feste Unterlage, und erhalten dann ein Pendel, dessen Schwingungsdauer wir leicht berechnen können. Die bewegende Kraft für dieses Pendel ist nicht das Gesamtgewicht, sondern nur das Übergewicht p, da die beiden Gewichte P im Abstande $+ l = OB = OA$ und ebenso die Gewichte der beiden Stabhälften sich vollständig äquilibrieren. Der Angriffspunkt der Kraft ist der Punkt B, wenn wir annehmen, dafs dort der Schwerpunkt des untern Gewichtes sei. Das statische Moment unseres Pendels ist somit gleich $p \cdot l$. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Holzstabes mit K und die Radien der beiden Kugeln mit r und r_1, so ist nach § 19 und 20 das Trägheitsmoment des ganzen Pendels

Fig. 37.



$$M = K + \frac{P}{g}\left(\tfrac{2}{5} r^2 + l^2\right) + \frac{P+p}{g}\left(\tfrac{2}{5} r_1^2 + l^2\right)$$

$$= K + \tfrac{2}{5}\left(\frac{P}{g} r^2 + \frac{P+p}{g} r_1^2\right) + \frac{2P+p}{g} l^2.$$

Nehmen wir den Stab recht leicht und geben ihm eine Länge von 2 Meter, so dafs $l = 1$ Meter wird, so können wir ohne merklichen Fehler die beiden ersten Glieder vernachlässigen, da der Radius der Bleikugeln, selbst wenn wir bis zu einem Gewichte von 2 Kilogramm gehen, nur etwa $0{,}035^{\mathrm{m}}$ beträgt. Der Wert der beiden ersten Glieder erreicht dann noch nicht 0,001 des letzten.

Dies vorausgesetzt erhalten wir für die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{(2P+p)l^2}{gpl}} = \pi \sqrt{\frac{(2P+p)l}{gp}}.$$

Wählen wir nun als Kugel bei A eine von 1 Kilogramm Gewicht und bei B der Reihe nach Kugeln von

1,6666 Kilogr. 1,25 Kilogr. 1,1333 Kilogr.,

wodurch also

$$p = \tfrac{2}{3} \text{ Kilogr.}, \quad \tfrac{2}{8} \text{ Kilogr.}, \quad \tfrac{2}{15} \text{ Kilogr.}$$

wird, so werden die Schwingungsdauern des Pendels

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \quad 3\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \quad 4\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

die Schwingungsdauern müssen also unter einander und zu denen des einfachen Pendels von der Länge l im Verhältnis $2 : 3 : 4$ stehen.

Man wird bei Versuchen diese Resultate leicht bestätigt finden, um so genauer, je leichter man den Pendelstab gewählt hat.

Wir können noch in anderer Weise die Beschleunigungen und Schwingungsdauern variieren und damit gleichzeitig einen experimentellen Beweis für die Richtigkeit des im § 19 abgeleiteten Satzes über das Trägheitsmoment

liefern. Wir nehmen zwei Bleikugeln, jede vom Gewichte P, und durchbohren sie so, dafs sie auf dem Stabe verschiebbar und in verschiedenen Abständen von der Drehungsaxe festgeklemmt werden können. Im Abstande l unten am Ende des Stabes befestigen wir dann eine Kugel vom Gewichte p. Klemmen wir dann die Kugeln P einmal so ein, dafs ihr Mittelpunkt sich im Abstande $\frac{3}{4}\,l$ befindet, dann, dafs der Abstand der Mittelpunkt wird $\frac{1}{2}\,l$, $\frac{1}{4}\,l$, so lassen wir die bewegende Kraft und die bewegte Masse ganz ungeändert, geben letzterer aber eine andere Verteilung, und infolge dessen mufs die Schwingungsdauer jedesmal eine andere sein. Befinden sich die Kugeln im Abstand $\frac{3}{4}\,l$, so wird das Trägheitsmoment des Pendels

$$M = K + 2\,\frac{P}{g}\left(\tfrac{9}{16}\,l^2 + \tfrac{2}{5}\,r^2\right) + \frac{p}{g}\left(l^2 + \tfrac{2}{5}\,r_1^{\,2}\right),$$

wenn r der Radius der Kugeln P und r_1 jener der Kugeln p ist. Nach der vorhin gemachten Bemerkung können wir auch hier die nicht mit l^2 multiplizierten Glieder vernachlässigen und erhalten dann

$$M = \left(\tfrac{9}{8}\,\frac{P}{g} + \frac{p}{g}\right) l^2$$

und für die Schwingungsdauer des Pendels

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{(18\,P + 16\,p)\,l}{16 \cdot gp}}\;.$$

Klemmen wir die beiden Kugeln P_1 so, dafs ihre Mittelpunkte sich in $\frac{1}{2}$ befinden, so wird in derselben Weise berechnet

$$t = \pi \sqrt{\frac{(8\,P + 16\,p)\,l}{16 \cdot pg}}\,,$$

und wenn die Kugeln in $\frac{1}{4}\,l$ eingeklemmt werden,

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{(2\,P + 16\,p) \cdot l}{16 \cdot pg}}\;.$$

Nehmen wir nun jede der Kugeln P gleich 1 Kilogramm und p gleich $\frac{1}{16}$ Kilogramm, so werden diese Schwingungsdauern

$$t = 4{,}35\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,,\quad 3\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,,\quad 1{,}732\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

Werte, die man leicht durch den Versuch bestätigt findet. Damit ist dann auch experimentell der Nachweis geführt, dafs das Produkt einer Masse in das Quadrat ihres Abstandes von der Drehungsaxe ihr Trägheitsmoment ist, oder dafs bei der drehenden Bewegung Massen sich ersetzen, welche sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsaxe.

§ 28.

Korrektion wegen der Amplitude. Wir haben schon im § 24 darauf hingewiesen, dafs unsere Ableitung der Pendelgesetze die Voraussetzung machte, dafs die Amplitude so klein sei, dafs wir die Bögen für die Sinus einsetzen dürfen. Das ist strenge nur für unendlich kleine Bögen der Fall. In der That ist deshalb auch die Schwingungsdauer etwas von

der Amplitude abhängig und etwas gröfser, als unsere Gleichung sie angibt. Die Berechnung der Schwingungsdauer, wenn wir in der Gleichung 1 des § 24 sin α anstatt α beibehalten, ist ziemlich kompliciert, ohne jedoch im Princip irgendwie anders geführt zu werden, als wir sie führten. Wir begnügen uns deshalb hier damit, das Resultat der Rechnung mitzuteilen. Ist α_0 der Ausschlagswinkel des Pendels, so wird

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pz}} \left(1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha_0 + \tfrac{9}{64} \sin^4 \tfrac{1}{2} \alpha_0 + \cdots\right).$$

Wenn α_0 nur wenige Grade beträgt, so kann man schon das dritte Glied der Klammer fort lassen. Der Wert der ganzen Korrektion beträgt erst, wenn $\alpha_0 = 10^0$ ist, etwa 0,2 Procent der Schwingungsdauer, das heifst, ein Pendel, welches mit dieser Amplitude 1000 Schwingungen vollführt, würde mit unendlich kleiner Amplitude 1001,89 Schwingungen machen. Mit dieser Korrektion erhält man aus der beobachteten Schwingungsdauer T die auf unendlich kleine Amplitude reducierte T'

$$T' = \pi \sqrt{\frac{K}{Pz}} = \frac{T}{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0},$$

für welche somit die abgeleitete Gleichung für die Schwingungsdauer des Pendels strenge gilt.

§ 29.

Bestimmung von g. Eine der wichtigsten Anwendungen unserer Gleichung für die Schwingungsdauer des Pendels

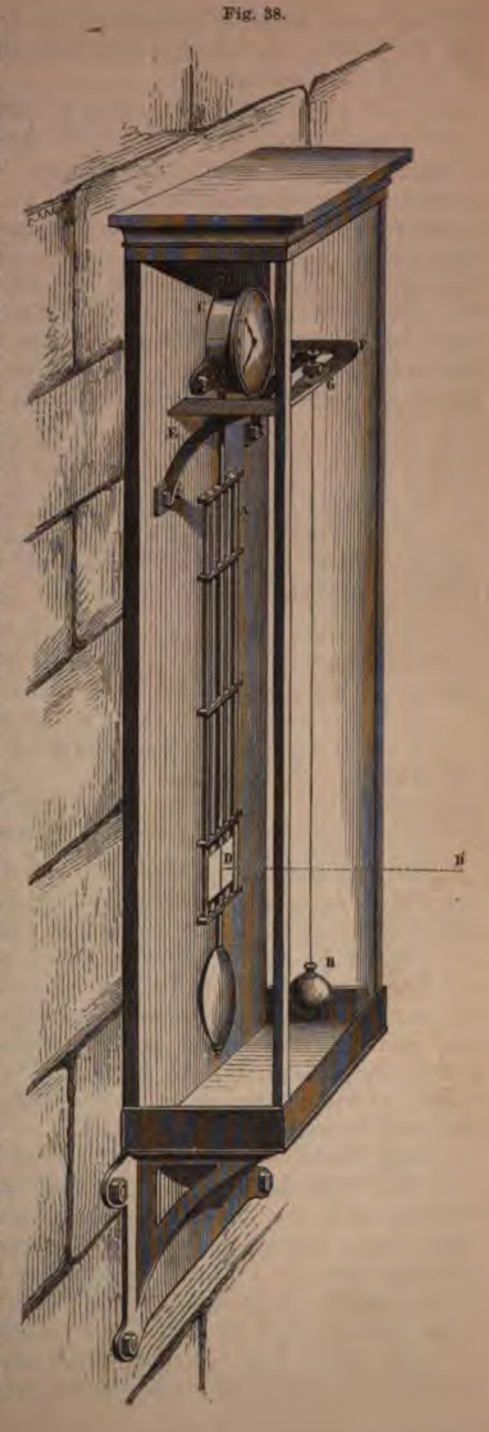
$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

worin l die vorhin definierte Länge des physischen Pendels bedeutet, ist die Bestimmung der Gröfse g, der Beschleunigung beim freien Fall, da diese Gröfse auf keinem andern Wege mit einer ähnlichen Genauigkeit bestimmt werden kann, als durch Beobachtung der Pendelschwingungen. Man beobachtet dazu mit möglichster Genauigkeit die Schwingungsdauer eines Pendels, bestimmt die Länge des mathematischen Pendels bei gleicher Schwingungsdauer und berechnet dann g. Die einzige Schwierigkeit ist die Bestimmung der Länge des mathematischen mit dem physischen isochron schwingenden Pendels. Man kann dazu auf einem doppelten Wege gelangen; entweder gibt man dem Pendel eine geometrisch bestimmte Gestalt, und sorgt dafür, dafs die Masse des Pendels überall die gleiche Dichtigkeit hat, so dafs man das Trägheitsmoment des Pendels berechnen kann; diesen Weg schlugen Borda, Arago und Biot sowie Bessel bei ihren Bestimmungen von g ein; oder man gibt dem Pendel eine solche Form, dafs man an ihm experimentell die Länge des mit ihm isochron schwingenden mathematischen Pendels bestimmen kann. Letztere Methode ist von Bohnenberger angegeben und vorzugsweise von Kater ausgeführt worden.

Die Anordnung der Versuche, wie sie Borda und später Arago und Biot anwandten, zeigt Fig. 38. Das Pendel BG besteht aus dünnem Platindraht, an welchem unten eine Kugel von Platin befestigt ist. Das Pendel ist befestigt an einem stählernen Prisma, das mit seiner untern scharfen Kante auf einer auf dem eisernen Träger EFG aufgelegten in ihrer Mitte

im Durchlassen des Pendels
lurchbohrten Platte von Stahl
der Achat aufsteht. Da das Pris-
ma und die Klemmvorrichtung,
welche den Draht hält, an den
Oscillationen teilnehmen und ein
nicht zu vernachlässigendes Ge-
wicht haben, so würde die Schwin-
gungsdauer des Pendels auch von
der Verteilung der Masse des Pris-
mas abhängen. Dadurch würde
es schwierig sein, durch Rech-
nung das Pendel auf ein mathe-
matisches zu reducieren, da man
der Aufhängevorrichtung nicht
eine so einfache geometrische
Gestalt geben kann, wie sie zur
Berechnung des Trägheitsmomen-
es erforderlich ist. Zur Um-
gehung dieser Schwierigkeit rich-
tete Borda die Aufhängevorrich-
tung so ein, dafs sie auf die
Schwingungsdauer des Pendels
gar keinen Einflufs hatte. Wegen
der unter dem Prisma angebrach-
ten, zur Aufnahme des Platin-
drahtes dienenden Klemmvorrich-
tung liegt der Schwerpunkt der
ganzen Aufhängevorrichtung un-
terhalb der Schneide. Stellt man
daher das Prisma ohne angehäng-
es Pendel auf die Unterlage, so
schwingt es selbst als Pendel hin
und her. Um nun die Schwingungs-
dauer dieses kleinen Pendels ver-
längern zu können, ist, wie die
Figur zeigt, in der Mitte des
Prismas, gewissermafsen als eine
nach oben gerichtete Verlänge-
rung des Pendelfadens, eine
Schraubenspindel aufgesetzt, auf
welcher ein Laufgewicht auf und
nieder bewegt werden kann. Durch
eine Hebung des Laufgewichtes
wird der Schwerpunkt der Auf-
hängevorrichtung der Schneide
näher gebracht, und damit wird
die Schwingungsdauer derselben
eine gröfsere. Denn nennen wir

Fig. 38.



die Masse der Aufhängevorrichtung m, den Abstand ihres Schwerpunktes von der Schneide a und das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schneide k, so ist die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{k}{g\,a\,m}};$$

es wächst somit t, wenn a kleiner wird. Das Laufgewicht wurde nun so gestellt, daſs die Schwingungsdauer der Aufhängevorrichtung für sich genau gleich war der Schwingungsdauer des ganzen zusammengesetzten Pendels. Dann ist die Schwingungsdauer des ganzen Pendels dieselbe, als wenn es nur aus dem Aufhängedraht und der unten angehängten Kugel bestände. Sei, um das nachzuweisen, K das Trägheitsmoment des Fadens und der unten angehängten Kugel, A der Abstand des Schwerpunktes dieser beiden Teile von der Schneide, und M die Masse von Faden und Kugel. Ist nun die Schwingungsdauer des ganzen Pendels ebenfalls gleich t, so ist

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{k + K}{g\,(a\,m + A\,M)}},$$

da das Trägheitsmoment eines zusammengesetzten Körpers gleich ist der Summe der Trägheitsmomente der Bestandteile, und das statische Moment mehrerer Kräfte gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber

$$\frac{k}{g\,a\,m} = \frac{k - K}{g\,(a\,m - A\,M)},$$

und daraus unmittelbar

$$\frac{k - K}{g\,(a\,m - A\,M)} = \frac{K}{g\,A\,M}$$

oder auch

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{g\,A\,M}}.$$

Bei den eigentlichen Versuchen zur Bestimmung von g war die Kugel von Platin; um aber zu untersuchen, ob der Wert von g für alle Substanzen genau derselbe sei, wurde die Kugel zuweilen gewechselt. Deshalb war die Kugel nicht direkt, sondern durch ein ganz kleines Ansatzstück B, welches unten konkav als Teil einer Kugelfläche, deren Radius gleich dem der anzuhängenden Kugeln war, befestigt. Die Kugel wird mittels einer ganz dünnen Wachsschicht in diese Vertiefung eingeklebt. Dadurch ist gleichzeitig ermöglicht, die Kugel an verschiedenen Stellen ihrer Oberfläche anzukleben, um so zu untersuchen, ob der Mittelpunkt der Kugel auch der Schwerpunkt derselben ist.

Das Pendel wurde an einem festen schmiedeeisernen Träger EGF (Fig. [illegible]) aufgehängt, welcher in einer massiven steinernen von belebten Strassen entfernten Mauer derartig befestigt und durch Streben E unterstützt war, dass er weder durch äussere Stösse, noch auch durch die Schwingungen des Pendels die geringste Bewegung annahm. Auf diesen Träger war bei f die gut polierte Platte von Stahl oder Achat fest aufgeschraubt, auf welcher die Schneide der Aufhängevorrichtung aufstand.

Das Pendel hing vor einer gut regulierten astronomischen Uhr herab, so dass man gleichzeitig die Bewegung des zu den Beobachtungen dienenden

und des Pendels der Uhr übersehen konnte. Schliefslich war Uhr und Pendel von einem Glasgehäuse umgeben, welches etwaige Luftströmungen von dem Pendel abhielt.

Zur Bestimmung von g bedarf es zunächst der Kenntnis der Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem physischen isochron schwingt, also des Wertes

$$l = \frac{K}{AM}.$$

Dazu ist es notwendig, die Länge f des Fadens, das Gewicht des Fadens und den Radius, sowie das Gewicht der Kugel, zu dem wir ohne merklichen Fehler das Gewicht des Ansatzstückes B hinzuziehen können, zu messen. Die Länge des Fadens, deren Bestimmung vor Konstruktion des Kathetometers mit einiger Schwierigkeit verknüpft war, ist mit Hülfe dieses Mefsapparates leicht zu erhalten. Borda brachte eine genau horizontale Platte durch eine Mikrometerschraube mit dem tiefsten Punkte der Kugel zur Berührung und mafs dann mit Hülfe eines Mafsstabes den Abstand der Platte von der Schneide. Jetzt visiert man mit einem Kathetometer einmal die Schneide und dann den tiefsten Punkt der Kugel, so dafs der horizontale Faden des Fadenkreuzes gerade als Tangente der Kugel erscheint. Die Differenz der Stellungen des Kathetometerfernrohrs gibt dann die Länge des Fadens plus dem Durchmesser der Kugel. Ist das Pendel länger als die Skala des Kathetometers, so visiert man zunächst die Schneide und irgend einen zwischen dem obern und untern Ende des Pendels liegenden Punkt, setzt dann das Kathetometer tiefer und visiert dann von neuem den eben visierten Punkt und darauf den tiefsten Punkt der Kugel.

Um den Durchmesser der Kugel zu erhalten, kann man sich des Sphärometers bedienen, oder genauer, man bestimmt den Gewichtsverlust der Kugel beim Eintauchen derselben in Wasser von bestimmter Temperatur; in welcher Weise, wird später hervortreten, wenn wir die Methoden zur Bestimmung des specifischen Gewichtes der festen Körper besprechen. Die Differenz zwischen den Ablesungen des Kathetometers und dem Durchmesser $2r$ der Kugel gibt dann die Länge f des Fadens.

Da der Faden überall dieselbe Dichtigkeit hat, so liegt sein Schwerpunkt in dem Abstande $\frac{1}{2}f$ von der Aufhängeaxe; der Schwerpunkt der Kugel liegt in ihrem Mittelpunkte. Ist daher p das Gewicht des Fadens, P das Gewicht der Kugel, so ist

$$AM = \frac{p}{g}\,\frac{f}{2} + \frac{P}{g}(f + r).$$

Das Trägheitsmoment des Fadens erhalten wir in folgender Weise. Sei q das Gewicht der Längeneinheit des Fadens, so ist das Gewicht eines unendlich kleinen Stückchens von der Länge dx gleich $q \,.\, dx$. Befindet sich dieses Stückchen im Abstande x von der Schneide, so ist das Trägheitsmoment dieses Stückchens

$$\frac{q}{g} \cdot x^2 \cdot dx$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Fadens

$$K_1 = \frac{q}{g}\int_0^f x^2\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{q}{g}\,f^3.$$

Nun ist $q \cdot f = p$ gleich dem Gewichte des Fadens, somit

$$K_1 = \tfrac{1}{3} \frac{p}{g} \cdot f^2.$$

Das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende, der Schneide parallele Axe ist

$$\tfrac{2}{5} \frac{P}{g} \cdot r^2.$$

Da diese Axe sich im Abstande $f + r$ von der Drehungsaxe des Pendels befindet, so wird das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf diese Axe

$$K_2 = \tfrac{2}{5} \frac{P}{g} \{r^2 + (f + r)^2\},$$

somit

$$K = K_1 + K_2 = \tfrac{1}{3} \frac{p}{g} f^2 + \tfrac{2}{5} \frac{P}{g} \{r^2 + (f + r)^2\})$$

und schliefslich die Länge l des mathematischen Pendels

$$l = \frac{\tfrac{1}{3} p f^2 + \tfrac{2}{5} P \{r^2 + (f + r)^2\}}{p \frac{f}{2} + P (f + r)}.$$

Da die Länge f des Fadens und der Radius der Kugel von der Temperatur abhängig sind, so ändert sich auch die Länge l des Pendels mit der Temperatur. Ist daher die Temperatur bei den Beobachtungen nicht immer dieselbe und zwar jene, bei welcher die Längenmessungen durchgeführt sind, so muss man eine Korrektion anbringen, um die für jeden Versuch gültige Länge des Pendels zu erhalten. Ist Faden und Kugel von demselben Metall und t die Temperatur, bei welcher die Längenmessungen vorgenommen sind, τ die Temperatur, bei welcher die Schwingungen beobachtet werden, so ist die zur Bestimmung von g in Rechnung zu ziehende Länge l'

$$l' = l(1 + \delta(\tau - t)),$$

wenn δ den Ausdehnungskoeffizienten des Metalls bedeutet. Die Werte von δ für die verschiedenen Metalle werden wir im dritten Bande kennen lernen.[1]

Um die Schwingungsdauer des Pendels mit gröfster Genauigkeit zu bestimmen, vergleicht man die Schwingungen des Beobachtungspendels mit denen des Uhrpendels. Zu dem Zwecke beobachtet man die Schwingungen des durch einen kleinen Stofs in Bewegung gesetzten Pendels mit Hülfe eines dem Apparate gegenüber in der Richtung DD in einer Entfernung von mehreren Metern aufgestellten Fernrohrs.

[1] Genaueres über die Bestimmung der Pendellänge und insbesondere über den Einfluss der als Drehungsaxe dienenden Schneide auf die Länge des Pendels sehe man: F. W. Bessel, Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Aus den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1826.

Man sieht dann, wenn man durch das Fernrohr auf den Apparat hinblickt, das Pendel der Uhr, auf welches man vorher einen feinen vertikalen Strich gezogen hat, und das davor aufgehängte Pendel gesondert durch das Gesichtsfeld gehen. Da nun das eine der Pendel immer etwas rascher schwingt als das andere, nehmen wir an, das raschere sei das Pendel GB, so werden nach einigen Schwingungen die beiden Pendel zugleich in das Gesichtsfeld treten und sich decken. Diesen Zeitpunkt einer Koincidenz der beiden Pendel wählt man zum Ausgangspunkte der Beobachtungen. Um ihn genau zu erhalten, beginnt man die Beobachtungen schon etwas früher; man sieht dann, dafs bei den aufeinanderfolgenden Durchgängen die Pendel sich immer näher rücken, bis sie endlich bei einem Durchgange zur Koincidenz kommen. Bei den weiter folgenden Schwingungen eilt dann das Pendel GB vor, so dafs nach einiger Zeit das Pendel GB schon eine rückgängige Bewegung hat, während das Uhrpendel noch eine vorwärtsgerichtete Bewegung besitzt. Dabei kommt wieder ein Zeitpunkt, in welchem die beiden Pendel sich wieder in der Mitte des Gesichtsfeldes decken, aber jetzt mit entgegengesetzt gerichteter Bewegung. Dann hat das Pendel GB eine Oscillation mehr gemacht als das Pendel der Uhr von dem als Ausgangspunkt der Bewegung gerechneten Zeitpunkt der vorigen Koincidenz an. Weiterhin eilt das Pendel GB immer mehr vor, es geht bald wieder in gleicher Richtung mit dem Uhrpendel durch das Gesichtsfeld und kommt dann wieder mit dem Uhrpendel zur Koincidenz wie bei der ersten Beobachtung. Bei dieser zweiten Koincidenz hat das Pendel zwei Schwingungen mehr gemacht, und so bei jeder folgenden Koincidenz jedesmal eine Schwingung mehr. Setzen wir nun voraus, dafs das Uhrpendel genau Sekunden schwingt, und dafs man, während man m Koincidenzen beobachtet hat, an dem Sekundenzeiger der Uhr n Sekunden abliest, so ist die Schwingungsdauer t gleich

$$t = \frac{n}{n + m}.$$

Diese Art, die Schwingungen des Pendels zu beobachten, die Methode der Koincidenzen, bietet eine Reihe von Vorteilen. Zunächst leitet man die Dauer einer Schwingung aus der Beobachtung einer sehr grofsen Zahl $(n + m)$ Schwingungen ab; der bei der Zeitmessung begangene Fehler wird deshalb durch die Division mit dieser grofsen Zahl beträchtlich verkleinert. Ferner kann man bei der Beobachtung mit dem Fernrohr den Zeitpunkt der einzelnen Koincidenz scharf beobachten. Schliefslich bedarf es nur einer sehr scharfen Beobachtung der ersten und letzten Koincidenz; ja man kann sogar, nachdem man die zweite Koincidenz beobachtet und so jedenfalls mit grofser Annäherung die zwischen zwei Koincidenzen liegende Anzahl z von Sekunden erhalten hat, die Beobachtungen bis kurz vor der letzten Koincidenz unterbrechen, indem dann der Koefficient $\frac{n}{z} = m$ uns die Anzahl der Koincidenzen liefert.

Zur Berechnung von g müssen die Schwingungsdauern auf unendlich kleine Bögen reduciert werden. Sind die Bögen überhaupt nur sehr klein, so genügt es, das Mittel aus der ersten und letzten Amplitude zu nehmen. Man mifst zu dem Ende die Amplituden an einem hinter dem Pendel angebrachten Gradbogen, den man gleichzeitig mit dem Pendel im Fernrohr

sehen kann. Ist die erste Amplitude α_1, die letzte α_n, so setzt man in
Gleichung

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha\right)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} \cdot$$

Will man bei der Rechnung strenge verfahren, so hat man zu beacht
dafs die Dauer der einzelnen Schwingungen unter einander nicht ganz gle
ist, und dafs der gefundene Mittelwert t nicht gerade die Schwingun
dauer des Pendels bei der so bestimmten Amplitude α ist. Es würde
nur der Fall sein, wenn die Schwingungsdauer sich in einfach linearer We
mit dem Bogen änderte, und wenn weiter die aufeinanderfolgenden Bög
immer um dieselbe Gröfse kleiner würden. Beides ist nicht der Fall; d
ersteres nicht der Fall ist, zeigt unsere Gleichung für die Schwingun
dauer, und dafs letzteres nicht der Fall ist, ergibt die Beobachtung. D
selbe zeigt nämlich, dafs nicht die Differenzen der aufeinanderfolgend
Schwingungsbögen konstant sind, sondern dafs dieselben sehr nahe in ein
konstanten Verhältnisse stehen, oder dafs die Schwingungsbögen sehr na
eine geometrische Reihe bilden, um so näher, je kleiner überhaupt
Schwingungen sind. Sind also $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_k$ die einzelnen Bögen, so ist

$$\alpha_2 = c \cdot \alpha_1;\ \alpha_3 = c \cdot \alpha_2 = c^2 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_k = c^{k-1} \cdot \alpha_1,$$

wenn wir mit c einen echten Bruch bezeichnen.

Da wir bei den hier vorausgesetzten kleinen Bögen die Sinus noch d
Bögen proportional setzen können, so dürfen wir auch schreiben

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha_2 = c \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha_1;\ \sin \tfrac{1}{2}\alpha_3 = c^2 \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha_1 \cdots \sin \tfrac{1}{2}\alpha_k = c^{k-1} \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha_1$$

und zur genauern Berechnung von g erhalten wir dann folgende Gleichunge
wenn wir mit $t_1, t_2 \cdots t_k$ die Dauer der ersten, zweiten etc. bis zur letzt
Schwingung, für welche wir $k = n + 1$ setzen, bezeichnen:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1\right)$$

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4} c^2 \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1\right)$$

$$\vdots$$

$$t_k = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4} \cdot c^{2k-2} \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1\right).$$

Die Summe aller dieser Schwingungsdauern ist gleich der Dauer n de
ganzen Beobachtung. Bilden wir die Summe aller dieser Gleichungen, so
erhalten wir deshalb auf der linken Seite n, und die Gleichung wird

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{k + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha_1 \left(1 + c^2 + c^4 + \cdots c^{2k-2}\right)\right\}.$$

Die Summe der geometrischen Reihe ist bekanntlich

$$1 + c^2 + c^4 + \cdots + c^{2k-2} = \frac{c^{2k} - 1}{c^2 - 1}$$

omit wird

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ h + \frac{c^{2h} - 1}{c^2 - 1} \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1 \right\},$$

worin c nach dem eben angeführten Gesetze aus zwei aufeinanderfolgenden Amplituden, oder aus der ersten und letzten Amplitude gegeben ist durch

$$c^{h-1} = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_h}{\sin \frac{1}{2} \alpha_1}.$$

Bei einer Bestimmung von g darf man indes den bisher von uns aufser Acht gelassenen Einflufs der Luft, in welcher das Pendel schwingt, nicht vernachlässigen. Dieser Einflufs der Luft ist ein doppelter. Zunächst wird das Gewicht des Pendels verkleinert, somit das statische Moment, also die bewegende Kraft verkleinert. Diese Verkleinerung des Gewichtes ist, wie wir später nachweisen werden, gleich dem Gewichte der von dem Pendel verdrängten Luft, wofür wir auch ohne merklichen Fehler das Gewicht der von der Kugel verdrängten Luft einsetzen dürfen. Nennen wir dieses Gewicht P_1, so haben wir das von dem Gewichte P der Kugel abzuziehen, und der Nenner unseres Ausdruckes für l, den wir auf Seite 128 entwickelten, geht dadurch über in

$$p\frac{f}{2} + (P - P_1)\ (f + r).$$

Dann aber zweitens, und darauf hat Bessel[1]) zuerst aufmerksam gemacht, wird die Bewegung des Pendels durch den Widerstand der Luft verzögert; das Pendel mufs, indem es in der Luft von einer Stelle zur andern geht, die Luft verdrängen, welche den Raum einnimmt, in welchen das Pendel eintritt, es mufs dazu eine gewisse Arbeit verwendet werden, welche in jedem Momente von der Beschleunigung des Pendels abzuziehen ist; aufserdem tritt durch die Reibung in der Luft eine Verminderung der Geschwindigkeit ein, wie wir bei der Untersuchung der Luftreibung nachweisen werden. Diese beiden Umstände kann man dadurch in Rechnung ziehen, dafs man annimmt, mit dem Pendel bewege sich gleichzeitig nahezu die den Raum des Pendels ausfüllende Luftmenge. Wir müssen demnach zu dem Trägheitsmoment des Pendels eine dem Trägheitsmoment dieser Luftmenge nahezu gleiche Gröfse hinzuaddieren. Bezeichnet demnach K' das Trägheitsmoment, für das wir ohne merklichen Fehler dasjenige der von der Platinkugel verdrängten Luftkugel setzen dürfen, und ist k eine Zahl kleiner wie 1, so wird der Zähler unseres Ausdruckes für l

$$K + kK'$$

oder die Länge des mathematischen Pendels, welches im luftleeren Raume schwingend dieselbe Schwingungsdauer hat, wird

$$l = \frac{K + kK'}{p\frac{f}{2} + (P - P_1)\ (f + r)}.$$

Die Konstante k hängt von der Länge und Gestalt des Pendels ab; Bessel bestimmte dieselbe, indem er die Schwingungsdauer zweier Pendel verglich,

[1]) *Bessel*, Länge des einfachen Sekundenpendels. Abhandl. d. Berl. Akad. 1826 p. 32 ff.

deren einziger Unterschied darin bestand, dafs bei dem einen die Kugel aus Messing, bei dem andern aus Elfenbein hergestellt war. Der Durchmesser der Kugeln war bei beiden gleich. Der Wert des Gliedes kK' ist dann in beiden Fällen derselbe, während K für das Pendel mit der Messingkugel einen erheblich gröfsern Wert hat als für die Elfenbeinkugel. Eine Vergleichung der Schwingungsdauern der Pendel gestattet demnach, dieses Glied zu eliminieren oder auch den Wert von k zu berechnen und so die Länge l des Pendels zu berechnen, welches im luftleeren Raum die gleiche Schwingungsdauer hat[1]). Mit dem so berechneten l erhalten wir dann den Wert von g aus der Gleichung

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2}.$$

Der so berechnete Wert für g gilt nur für den Ort, an dem man die Messungen durchgeführt hat. Im nächsten Kapitel wird sich ergeben, dafs der Wert von g mit der Erhebung von der Erdoberfläche, resp. dem Meeresniveau kleiner wird; wir werden dort auch zeigen, wie wir den beobachteten Wert auf das Meeresniveau reducieren.

Borda erhielt auf diese Weise für g in Paris unter 48° 50′ 14″ n. Br. reduciert auf die Meereshöhe

$$g = 9{,}80882.$$

Biot fand unter denselben Verhältnissen

$$g = 9{,}80896,$$

zwei Werte, die sich nur um $0{,}14^{mm}$ unterscheiden. Bessel erhielt für Königsberg unter 55° 42′ n. Br. und auf das Niveau der Ostsee reduciert

$$g = 9{,}81443,$$

für Berlin unter 52° 30′ 16″ n. Br.

$$g = 9{,}81278.$$

Borda sowohl als Bessel haben dann weiter gezeigt[2]), dafs der Wert von g identisch derselbe ist, aus welcher Substanz man auch die Kugel des Pendels wählt; daraus folgt dann mit aller Strenge, dafs die Schwere auf alle Körper gleichmäfsig wirkt, dafs alle Körper beim freien Fall dieselbe Beschleunigung erhalten.

§ 30.

Bestimmung von g mittels des Reversionspendels. Die im vorigen Paragraphen besprochene Methode zur Bestimmung von g leidet an einer Unsicherheit, nämlich ob, wie es bei der Berechnung des Trägheitsmomentes vorausgesetzt werden mufs, die Kugel am untern Ende des Pendels auch überall dieselbe Dichtigkeit besitzt. Von dieser Unsicherheit ist die zweite der vorhin erwähnten Methoden frei, welche die Länge des mit dem physischen isochronen Pendels auf experimentellem Wege bestimmt. Die Methode wurde im Anfange dieses Jahrhunderts von dem Astronomen Bohnenberger zu Tübingen vorgeschlagen und später besonders von dem englischen Naturforscher Kater zur Messung der Länge des Sekundenpendels benutzt. Das

---

[1]) Man sehe *Bessel* a. a. O. und *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. CXLII.
[2]) *Bessel*, Über die Kraft der Schwere. Abh. der Berl. Akad. vom 1830.

Verfahren beruht auf einer besondern Eigenschaft des Schwingungspunktes des physischen Pendels. Führt man nämlich durch den Schwingungspunkt eines physischen Pendels eine der Aufhängeaxe des Pendels parallele Axe und hängt dann an dieser als Drehungsaxe das Pendel auf, so ist die Schwingungsdauer des Pendels bei dieser Aufhängung genau gleich derjenigen bei der frühern Aufhängung. Da nun der Abstand des Schwingungspunktes von der Drehungsaxe gleich ist der Länge des mathematischen Pendels, welches dieselbe Schwingungsdauer hat wie das physische Pendel, so gibt uns der Abstand der beiden Schneiden die Länge des mathematischen Pendels, mit der wir den Wert von g zu berechnen haben.

Wir können diese Eigenschaft des Schwingungspunktes leicht nachweisen mit Hülfe des im § 20 abgeleiteten Satzes, daſs wenn das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt geführte Axe gleich ist $M \cdot a^2$, daſs es dann in Bezug auf eine mit dieser parallele und im Abstand z von ihr befindliche gleich ist $M(a^2 + z^2)$.

Ist nämlich M die Masse unseres Pendels und z bei der ersten Aufhängung der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe, so ist die Länge des mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer

$$l = \frac{M(z^2 + a^2)}{M \cdot z} = z + \frac{a^2}{z}.$$

Sei bei der zweiten Aufhängung der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe gleich z', so ist der Abstand der beiden Schneiden gleich $z + z'$ und die Länge des mathematischen Pendels

$$l' = z' + \frac{a^2}{z'}.$$

Ist nun die Schwingungsdauer in beiden Fällen dieselbe, so folgt auch

$$l = l'$$

oder

$$z + \frac{a^2}{z} = z' + \frac{a^2}{z'}.$$

Diese Gleichung besteht erstens, wenn $z = z'$ ist, wenn also der Schwerpunkt des Pendels in der Mitte zwischen den beiden Schneiden liegt. Ist das aber der Fall, so können wir aus der Gleichheit der Schwingungsdauern nur auf die Gleichheit der beiden Werte von l und l' schlieſsen, ohne daſs der Abstand der beiden Schneiden $z + z'$ gleich l zu sein braucht. Ist aber z von z' verschieden, so kann die Gleichung nur erfüllt sein, wenn

$$z' = \frac{a^2}{z},$$

somit wenn

$$l = z + z'$$

ist. Liegt daher der Schwerpunkt nicht in der Mitte zwischen beiden Schneiden, so folgt aus der Gleichheit der Schwingungsdauern, daſs die zweite Schneide durch den Schwingungspunkt geht, somit daſs der Abstand der beiden Schneiden gleich ist der Länge des mathematischen Pendels mit gleicher Dauer der Schwingungen.

Das auf diesen Satz basierte Katersche Pendel (Fig. 39) besteht aus einem Messingstabe, der an seinen beiden Enden mit Spitzen versehen ist,

um bei der Beobachtung der Schwingungen die in dem vorigen Pa
besprochene Methode der Koincidenzen anwenden zu können. D
Fig. 39. Schneiden S und S^1 sind ein für allemal an dem Pend
änderlich und zwar so befestigt, dafs das fertige Pendel
jede Sekunde eine Schwingung vollführt. Unterhalb
Schneide S^1 ist eine Metalllinse angebracht, welche de
punkt des Pendels, das im übrigen in Bezug auf die beid
den symmetrisch eingerichtet ist, sicher unterhalb die
SS^1 herab, also näher zu S^1 legt. Zwischen den beiden
ist auf dem Pendelstabe eine Masse m mit Reibung ve
und aufserdem befindet sich an einer andern Stelle ei
Masse m_1, welche durch eine in dem Ringe a befestig
meterschraube eine kleine Verschiebung auf und ab erha

S m m_1 a S^1

Man hängt das Pendel nun zunächst an die eine d
den, etwa S, und beobachtet in der vorher beschrieben
seine Schwingungsdauer. Darauf hängt man das Pende
bewirkt durch eine Verschiebung der Massen m und m_1
dieser Aufhängung die Schwingungsdauer ganz genau di
Hat man das erreicht, so hat man nur mit dem Katheto
Abstand der Schneiden zu messen, und die so gefundene
die Gleichung zur Berechnung von g für die Länge l de
einzusetzen, also in die Gleichung

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ h + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1 \frac{c^{2h} - 1}{c^2 - 1} \right\},$$

worin die Bedeutung der Zeichen dieselbe ist wie im vori
graphen.

Es ist selbstverständlich, dafs man bei einem solch
auch die Reduktion auf den luftleeren Raum anbringen
bei der ursprünglichen Form des Reversionspendels einige S
keit hat. Bei einer von Bessel angegebenen Form des R
pendels fällt indes der Einflufs der Luft ganz aus den
fort[1]. Es ist das der Fall, wenn man dem Pendel in
beide Schneiden eine genau symmetrische Gestalt gibt. M
das in Fig. 39 mit hinreichender Annäherung erreichen,
über der Schneide S eine in der äufsern Form der un
gleiche Linse anbrächte, die indes hohl und überdies
leicht gearbeitet wäre. Durch diese symmetrische Form
lich erreicht, dafs der Schwerpunkt der verdrängten
genau in die Mitte der beiden Schneiden fällt, und dafs
heitsmoment der verdrängten Luft in Bezug auf beide
genau denselben Wert hat. Nennen wir dann M_1 die
verdrängten Luft, also deren Gewicht dividiert durch g, z_1 de
ihres Schwerpunktes von jeder der beiden Schneiden, und K_1 das
moment der verdrängten Luft, so wird nach den Bemerkungen d
Paragraphen die Schwingungsdauer um die Schneide S

---

[1] *Bessel*, Länge des einfachen Sekundenpendels. Abhandl. d
Akad. 1826. p. 97.

$$t = \pi \sqrt{\frac{M(z^2 + a^2) + kK_1}{g(Mz - M_1 z_1)}}$$

oder die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem gegebenen die gleiche Schwingungsdauer hat, ist

$$l = \frac{M(z^2 + a^2) + kK_1}{Mz - M_1 z_1}.$$

Lassen wir das Pendel um die andere Schneide schwingen, so wird

$$l = \frac{M(z'^2 + a^2) + kK_1}{Mz' - M_1 z_1}.$$

Multiplizieren wir beide Ausdrücke mit den Nennern und subtrahieren, so wird

$$Ml(z - z') = M(z^2 - z'^2)$$

$$l = z + z'.$$

In dem Falle gibt uns also der Abstand der beiden Schneiden die Länge des mathematischen Pendels, welches im luftleeren Raum dieselbe Schwingungsdauer hat, wie das Reversionspendel.

Eine volle Übereinstimmung der Schwingungsdauern ist nur schwierig zu erreichen; wenn man indes die Lage des Schwerpunktes des Pendels bestimmt, und die Schwingungsdauern so nahe gleich macht, dafs man annehmen darf, der Schwerpunkt der verdrängten Luft läge auch jetzt in der Mitte zwischen beiden Schneiden, und das Trägheitsmoment der verdrängten Luft habe für beide Aufhängungen denselben Wert, so läfst sich aus der Beobachtung der beiden Schwingungsdauern auch jetzt g ableiten, oder die Schwingungsdauern des mathematischen Pendels bestimmen, dessen Länge gleich ist dem Abstande der beiden Schneiden.

Sei die Schwingungsdauer um die Schneide $S = t_1$, um die Schneide $S^1 = t_2$, so ist

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{M(z^2 + a^2) + kK_1}{g(Mz - M_1 z_1)}}$$

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{M(z'^2 + a^2) + kK_1}{g(Mz' - M_1 z_1)}}.$$

Wir erhalten dann zunächst

$$g \frac{t_1^2}{\pi^2} (Mz - M_1 z_1) = Mz^2 + Ma^2 + kK_1$$

$$g \frac{t_2^2}{\pi^2} (Mz' - M_1 z_1) = Mz'^2 + Ma^2 + kK_1$$

und daraus

$$g = \pi^2 \frac{z^2 - z'^2}{t_1^2 z - t_2^2 z' - \frac{M_1}{M} z_1 (t_1^2 - t_2^2)}$$

und für die Schwingungsdauer des Pendels von der Länge $z + z_1$

$$t = \sqrt{\frac{t_1^2 z - t_2^2 z' - \frac{M_1}{M} z_1 (t_1^2 - t_2^2)}{z - z'}}.$$

Wie man sieht, mufs man in dem Falle nur das Gewicht der verdrängten Luft bestimmen. Da M_1 gegen M indes schon sehr klein ist, darf man, wenn t_1 und t_2 nahe gleich sind, das davon abhängige Korrektionsglied aufser Acht lassen.

Bei den letzteren Gleichungen ist zu beachten, dafs für t_1 und t_2 die auf unendlich kleine Schwingungen reducierten Schwingungsdauern zu nehmen sind.

Mit einem solchen Pendel erhielt Kater für die Länge eines Pendels, welches in einer Sekunde seine Schwingung vollführt, unter der Breite von Paris und im Niveau des Meeres

$$l = 0{,}9938606.$$

Daraus ergibt sich der Wert von g nach der Gleichung

$$1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}9938606}{g}}$$

$$g = \pi^2 \cdot 0{,}9938606 = 9{,}80904,$$

eine Zahl, welche mit der von Biot gefundenen fast genau übereinstimmt.

§ 31.

Anwendung des Pendels bei Uhren. Da die Schwingungen eines Pendels von gegebener Länge eine ganz bestimmte Dauer haben, so kann man sich derselben zu Zeitmessungen bedienen.

Fig. 40.



Deshalb findet das Pendel seine ausgedehnteste Anwendung bei den Uhren. Die Einrichtung der Uhren ist im wesentlichen folgende. Um eine Walze Q (Fig. 40) ist ein Faden geschlungen, an dessen Ende sich ein Gewicht P befindet, welches beim Herabsinken bewirkt, dafs sich die Walze dreht. Auf die Walze ist ein gezähntes Rad H mit schräg geschnittenen Zähnen aufgesetzt. An einer mit der Axe der Walze parallelen Drehungsaxe A ist ein Pendel ACB aufgehängt, welches durch seine Schwingungen einem Stift CD und einem mit dem Stift verbundenen Doppelhaken GE eine hin- und hergehende Bewegung erteilt. Die umgebogenen Enden des Doppelhakens greifen in die Zähne des Rades H. Bewegt sich nun das Pendel und hebt sich der Haken bei E, so sinkt das Gewicht und die Walze dreht sich; während dessen senkt sich jedoch die andere Seite des Doppelhakens, greift in die Zähne des Rades ein und hemmt die Drehung der Walze. Bei der folgenden Schwingung hebt sich nun diese Seite, die Walze dreht sich wieder, bis das Ende E neuerdings in das Rad eingreift, aber nicht in denselben, sondern in den folgenden Zahn des Rades. Für je zwei Oscillationen des Pendels dreht sich also die Walze um einen Zahn weiter. Die Walze dreht sich somit während gleicher Zeiten, die durch die Schwingungen des Pendels gegeben sind, um gleiche Winkel; und ist an ihrer Axe ein Zeiger befestigt, der sich vor einem Zifferblatte dreht, so

schreitet auch der Zeiger in gleichen Zeiten um gleiche Bögen fort. Hat das Rad z. B. 30 Zähne und vollführt das Pendel in der Sekunde eine Schwingung, so wird der Zeiger sich in einer Minute um das ganze Zifferblatt bewegen, und ist der Umkreis desselben in 60 Teile geteilt, so entspricht jeder Teilstrich einer Sekunde. Wie man nun mittels passend angebrachter Räderwerke die Bewegung der Zeiger ändern, Sekunden- und Minutenzeiger anbringen kann, ist leicht ersichtlich. Nur ist zu erwähnen, daſs die Stellung der Zähne und Haken derartig ist, daſs der Haken jedesmal, wenn er gehoben wird, zugleich einen Anstoſs erhält, wodurch die Bewegung des Pendels, welche sonst durch die Reibung aufhören würde, erhalten wird.

Um die Bewegung der Uhr zu regulieren, ist die Linse B an der Pendelstange verschiebbar angebracht; ein Heraufschieben beschleunigt, ein Herabziehen verzögert die Bewegung. Dadurch ist es möglich zu bewirken, daſs das Pendel gerade in der gewünschten Zeit eine Schwingung vollführt.

§ 32.

Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze. Es wird im Laufe unserer Untersuchungen häufig unsere Aufgabe sein, Kräfte zu messen, welche zwar den verschiedensten Ursprung haben, sich aber durch Anziehungen und Abstoſsungen äuſsern. Wir haben dann zwei Mittel, diese Kräfte zu messen: entweder halten wir der Kraft durch eine in entgegengesetzter Richtung wirkende an ihrem Angriffspunkte das Gleichgewicht; diese Methode gibt meist nur angenähert richtige Resultate; oder wir messen die Beschleunigung, welche sie einer bekannten Masse m erteilt. Bezeichnen wir diese Beschleunigung mit G, so ist nach § 11 und 12 die Kraft P gegeben durch

$$P = G \cdot m.$$

Zur Bestimmung der Beschleunigung ist nun das genaueste Mittel, ein Pendel unter dem Einflusse der Kraft schwingen zu lassen. Sind die Kräfte einer festen Richtung parallel, oder sind sie wie die Schwerkraft nach einem festen Centrum gerichtet, welches hinlänglich weit entfernt ist, so daſs man sie in Bezug auf ein kleines Pendel als parallel ansehen kann, so beobachtet man die Schwingungsdauer, welche dasselbe unter Wirkung dieser Kräfte annimmt. Nach § 25 ist dann diese Schwingungsdauer gleich

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{D}},$$

wenn K das Trägheitsmoment des Pendels und D das Drehungsmoment bedeutet, welches die wirksame Kraft dem Pendel in einer zur Richtung der Kraft senkrechten Lage erteilt. Die Beschleunigung, welche diese Kraft jener Masse erteilt, die in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe die Masse des Pendels ersetzt, ist dann

$$G = \frac{D}{K},$$

und da K die Masse ist, der jene Beschleunigung erteilt ist, so erhalten wir für die Gröſse der Kraft in gewöhnlichem Maſse, das heiſst in Druckeinheiten

$$P = GK = D,$$

so daſs also schon der Nenner des Ausdrucks unter dem Wurzelzeichen im

Ausdruck für die Schwingungsdauer uns die gesuchte Gröfse der Kraft gibt, indem wir den Ausdruck für t nach D auflösen

$$D = \frac{\pi^2 \cdot K}{t^2}.$$

Ändert sich die Gröfse der Kraft mit dem Abstande vom anziehenden Mittelpunkte, so können wir durch Annäherung oder Entfernung des Pendels von demselben auch das Gesetz ableiten, nach welchem die Kraft sich ändert.

Die Pendelgesetze finden noch weitere Anwendung; wir werden noch mehrfach schwingende Bewegungen von Körpern um eine bestimmte Gleichgewichtslage beobachten, deren Schwingungsdauer von der Gröfse der Amplitude unabhängig ist. Wir schliefsen daraus dann stets, dafs die Kraft, welche diese Schwingungen veranlafst, dem Ausschlagswinkel proportional ist, oder dafs bei einem Ausschlagswinkel α diese in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe angreifende Kraft gleich $F \cdot \alpha$ ist. Die Kraft F, welche das auf den schwingenden Körper wirkende Drehungsmoment gibt, wenn der Wert von α gleich 1 wird, also auch den in dieser Lage auf die Masse, welche die Masse des Körpers in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe ersetzt, wirkenden Druck bedeutet, erhalten wir dann ebenfalls aus der Beobachtung der Schwingungsdauer t. Ist K das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers, so ist gerade wie in den vorher besprochenen Fällen

$$F = \frac{\pi^2 K}{t^2}.$$

Es ergibt sich das aus der Überlegung, dafs die Kraft F in diesem Falle ganz an die Stelle des Gewichtes an dem unter der Wirkung der Schwere schwingenden Pendel tritt, indem ja bei diesem die Kraft bei dem Ausschlagswinkel α, so lange derselbe nur klein ist, gleich $Pz \cdot \alpha$ ist. Die Kraft F bewirkt also in dem jetzt betrachteten Falle die schwingende Bewegung, wie die Kraft Pz bei dem unter Wirkung der Schwere schwingenden Pendel; beide müssen also auf dieselbe Weise aus der beobachteten Schwingungsdauer abgeleitet werden.

Ebenso benutzen wir die Pendelgesetze in manchen Fällen zu einer experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente, wo die Formen oder die Verteilung der Massen der schwingenden Körper eine Berechnung derselben nicht zulassen. In welcher Weise das geschehen kann, möge kurz an einem Beispiele angedeutet werden. Man hänge an einem Metalldraht einen Stab in seiner Mitte so auf, dafs der Stab horizontal schwebt. Ist der Draht oben ganz fest eingeklemmt, so nimmt der Stab eine bestimmte Lage an; stöfst man ihn dann an, so vollführt er in horizontaler Ebene Schwingungen um seine Gleichgewichtslage, deren Dauer von der Gröfse der Schwingungen unabhängig ist. Es ergibt sich somit, dafs auf den Stab eine Kraft wirkt, welche der Ablenkung des Stabes von der Gleichgewichtslage proportional ist; dieselbe rührt, wie wir später nachweisen werden, daher, dafs der Draht um eine in ihm liegende Axe gedreht, dafs er tordiert ist. Bezeichnen wir diese Kraft, wenn die Ablenkung gleich eins ist, mit F und das Trägheitsmoment des Stabes und Drahtes in Bezug auf die Drehungsaxe mit K, so ist nach der vorhin gemachten Bemerkung

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{F}}.$$

ın K experimentell zu bestimmen, hängen wir etwa mit Hülfe einer ;e von ganz feinem Draht an den Stab an jeder Seite des Aufhänge- s und in gleichen Abständen r_1 von demselben ein Gewicht, dessen mit der der Drahtschlinge gleich M sei. Da jetzt das Trägheitsmoment hwingenden Masse ein anderes ist, so wird auch die Schwingungs- eine andere; bezeichnen wir das Trägheitsmoment nach dem Anhängen :wichte mit K_1, so wird die Schwingungsdauer sein

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K_1}{F}}.$$

'rägheitsmoment K_1 ist gleich dem frühern Trägheitsmoment K lem Trägheitsmoment der angehängten Gewichte. Bezeichnen wir rägheitsmoment jedes der angehängten Gewichte in Bezug auf eine den Schwerpunkt der Gewichte gehende vertikale Axe mit $M \cdot a^2$, das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Drehungsaxe des ntalen Pendels gleich $M(a^2 + r_1^2)$. Denn jedes der Gewichte hängt ›, dafs sein Schwerpunkt senkrecht unter dem Aufhängepunkt liegt; :rbindungslinie des Aufhängepunktes mit dem Schwerpunkt ist also .xe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment des Gewichtes gleich st. Da diese Axe dem Aufhängedraht parallel und im Abstande r_1 :rselben befindlich ist, so ist das Trägheitsmoment jedes der Gewichte ug auf den Aufhängedraht gleich $M(a^2 + r_1^2)$. Damit wird

$$K_1 = K + 2M(a^2 + r_1^2)$$

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K + 2M(a^2 + r_1^2)}{F}}.$$

ängen dieselben Gewichte in einen Abstand r_2 von der Drehungsaxe :obachten die Schwingungsdauer t_2, dann ist

$$t_2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K + 2M(a^2 + r_2^2)}{F}}.$$

ei beobachteten Schwingungsdauern liefern die Gleichungen

$$F \cdot t^2 = \pi^2 K$$

$$F \cdot t_1^2 = \pi^2(K + 2Ma^2 + 2Mr_1^2)$$

$$F \cdot t_2^2 = \pi^2(K + 2Ma^2 + 2Mr_2^2).$$

hieren wir von der zweiten die dritte Gleichung, so wird

$$F(t_1^2 - t_2^2) = \pi^2 2M(r_1^2 - r_2^2)$$

$$F = \pi^2 \frac{2M(r_1^2 - r_2^2)}{t_1^2 - t_2^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (A),$$

enn wir diesen Wert von F in die erste Gleichung setzen und nach ösen

$$K = t^2 \cdot \frac{2M(r_1^2 - r_2^2)}{t_1^2 - t_2^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (B).$$

Vir erhalten somit den Wert von K ausgedrückt in lauter bekannten n, da die Masse M jedes der angehängten Gewichte P gleich ist $\frac{P}{g}$.

Die Gleichung (A) zeigt gleichzeitig, dafs wir aus so geführten Beobachtungen auch direkt die Gröfse der bewegenden Kraft ableiten können, ohne dafs wir den Wert des Trägheitsmomentes K zu berechnen haben.

Man sieht demnach, wie das Pendel in der einen oder andern Form für die experimentelle Physik einer der wichtigsten Apparate ist; wir werden fast stets zur Messung von Kräften von demselben Gebrauch machen.

§ 33.

Centripetalkraft und Centrifugalkraft. Wir haben sowohl bei der fortschreitenden, als bei der drehenden Bewegung gesehen, dafs die Masse eines Körpers vermöge der Trägheit der Materie jeder Änderung des Bewegungszustandes ein Hindernis entgegensetzt, welches durch die Wirkung der Kraft überwunden werden mufs. Demgemäfs sahen wir, dafs die Beschleunigung, welche ein Körper erfährt, abhängig ist von dem Verhältnis der Kraft zur bewegten Masse. Bei den drehenden Bewegungen tritt die Trägheit der Materie in einer noch auffallenderen Weise in einer andern Richtung hervor.

Bei dieser Bewegung wird nämlich in jedem Augenblick die Richtung des beweglichen Körpers geändert, indem die augenblickliche Bewegungsrichtung stets mit der Tangente der Bahn zusammenfällt, in der sich der Körper bewegt. Vermöge der Trägheit hat dann der Körper das Bestreben, in der einmal angenommenen Bewegungsrichtung zu verharren.

Soll der Körper seine Bewegungsrichtung ändern, soll er in einer kreisförmigen Bahn verharren, so mufs auf ihn eine Kraft wirken, welche ihn dem Centrum der Bahn soviel nähert, als die Bahn selbst von der Tangente sich entfernt. Diese Kraft, welche bei jeder drehenden Bewegung vorhanden sein mufs, und die den Körper stets nach dem Mittelpunkt seiner Bahn hinzieht, heifst die Centripetalkraft.

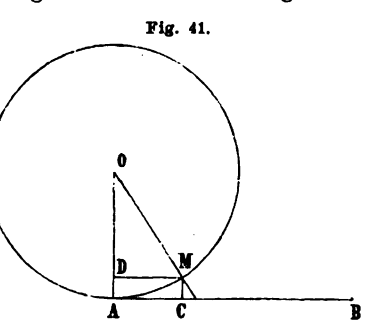
Der Centripetalkraft genau an Gröfse gleich und ihr entgegengesetzt ist die Centrifugalkraft. Dafs diese Kraft vorhanden sein mufs, und dafs infolge derselben der Körper auf den Mittelpunkt der Bahn einen genau ebensolchen Zug ausüben mufs, wie vom Mittelpunkt her auf ihn ausgeübt wird, das ist eine unmittelbare Folge des § 11 näher besprochenen Princips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Wir nehmen dieselbe auch bei jeder drehenden Bewegung wahr. Ist der im Kreise bewegte Körper an einem Faden befestigt, so ist es der Zusammenhang des Fadens, der ihn nach dem Mittelpunkt hinzieht, der Faden ist gespannt, ein Beweis, dafs der Körper einen ebenso starken Zug auf den Mittelpunkt ausübt, als der ist, welcher ihn aus der geradlinigen Bewegung ablenkt. Reifst der Faden, so bewegt sich der Körper einfach in der Tangente der Bahn weiter.

Die Centrifugalkraft ist also weiter nichts als der Widerstand, den der träge Körper der Änderung seiner Bewegungsrichtung entgegensetzt; hört die Centripetalkraft auf, so auch die Centrifugalkraft, indem der Körper sich dann in der Richtung seiner Bewegung von der Drehungsaxe entfernt.

Es ist leicht, aus den bisher gewonnenen Sätzen die Gröfse der Centrifugalkraft oder Centripetalkraft abzuleiten.

Es bewege sich ein Körper A mit der Masse m in einem Kreise um den Mittelpunkt O (Fig. 41), mit welchem er durch einen Faden verbunden ist. Er habe beim Beginn der Bewegung eine konstante nach AB gerichtete

schwindigkeit erhalten. Nach einer sehr kleinen Zeit t sei er in M ankommen; er hat den Bogen AM beschrieben, den wir so klein voraussetzen, dafs wir ihn mit der Sehne AM zusammenfallen lassen dürfen. Die ursprünglich dem Körper erteilte Geschwindigkeit hätte ihn nach C gebracht, r Zusammenhang des Fadens hat ihn derselben Zeit durch die Strecke $M = AD$ gezogen, er wirkt also wie ie Kraft, welche in derselben Zeit n Körper nach D gezogen hätte; M ist dann nach dem Satze vom rallelogramm der Bewegungen die agonale des aus AC und AD konuierten Rechteckes. Da wir AM als hr klein voraussetzen, können wir die ntipetralkraft während der Zeit als nstant und nach AO gerichtet anhmen, wir haben dann, wenn wir dieselbe mit F bezeichnen,



$$AD = \tfrac{1}{2} \frac{F}{m} t^2;$$

dererseits ist, wenn wir mit v die Geschwindigkeit des Körpers in seiner hn bezeichnen,

$$AM = v\, t.$$

Ferner nach einem bekannten Satze aus der Geometrie

$$AM^2 = 2R \cdot AD,$$

nn R den Radius des Kreises bedeutet. Setzen wir hierin für AM und D ihre Werte, so ist

$$v^2 t^2 = R \frac{F}{m} t^2$$

d daraus

$$F = \frac{m v^2}{R}.$$

Damit sich also der Körper im Kreise drehe, mufs ihn an jeder Stelle iner Bahn eine Kraft nach dem Mittelpunkte ziehen, die proportional ist r Masse des Körpers, dem Quadrate seiner Geschwindigkeit, und die umkehrt proportional ist dem Radius des Kreises, in welchem der Körper h bewegt.

Mit gleicher Kraft wirkt die Centrifugalkraft entgegen und spannt, enn der Körper an einem Faden befestigt ist, den Faden. Gleitet der örper in einer Rinne, so übt der Rand derselben auf ihn in jedem Augenlicke einen Druck aus gleich $\frac{m v^2}{R}$, und mit gleicher Kraft drückt der örper gegen den Rand der Rinne.

Man kann dem Ausdrucke für die Centrifugalkraft eine manchmal beiemere Form geben, indem man beachtet, dafs der Umfang des Kreises πR mit der Geschwindigkeit v in einer Zeit T durchlaufen wird, also

$$2\pi R = v\, T.$$

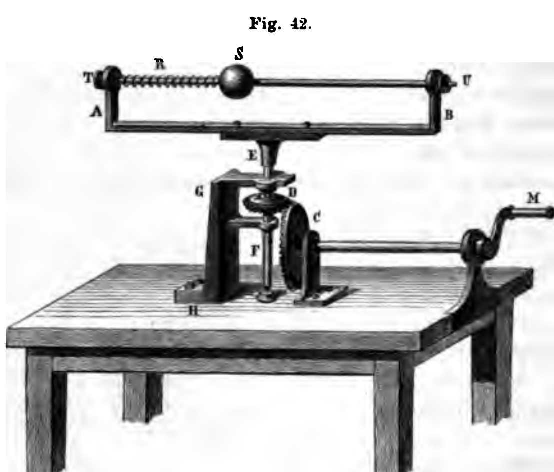
Setzen wir den hieraus sich ergebenden Ausdruck für v in die Gleichung F ein, so wird

$$F = \frac{4\pi^2 R \cdot m}{T^2}.$$

Man kann das Dasein der Centrifugalkraft durch eine Menge sehr einfacher Versuche nachweisen. Wenn man ein an einem Faden befestigtes, mit Wasser gefülltes Gefäfs sehr rasch im Kreise der Vertikalebene herumschleudert, so fällt kein Tropfen Wasser heraus, weil bei der raschen Bewegung das Wasser gegen den Boden des Gefäfses mit einer Kraft drückt, welche senkrecht gegen den Kreisumfang gerichtet und stärker ist als das Gewicht des Wassers.

Es gibt Apparate, mit denen man diese Kraft messen kann. Eine metallische Axe *EF* (Fig. 42), die vertikal auf einem festen Tische steht, kann mittels einer Kurbel *M*, deren Zahnrad *C* in ein an der Axe befestigtes Zahnrad *D* eingreift, in Rotation versetzt werden. Auf der Axe ist ein Rechteck *TABU* befestigt, dessen eine Seite *TU* aus einem cylindrischen Stabe besteht, der beliebig herausgenommen werden kann. Man kann auf diesen Stab eine durchbohrte Kugel *S* schieben, deren Gewicht gleich *P* sei, und zwischen die Kugel und die Seite *T* eine Feder *R* einsetzen, die mit einem Zeiger versehen ist, um den Druck zu bestimmen, welchen die Kugel auf sie ausübt.

Fig. 42.



Setzt man mittels der Kurbel den Apparat in rasche Rotation, so beschreibt die Kugel anfangs eine Spirale; bald aber drückt die Kugel gegen die Feder und drückt sie bis auf einen bestimmten Punkt zusammen. Dann beschreibt sie einen Kreis, und der auf die Feder ausgeübte Druck mifst die Centrifugalkraft. Man wird finden, dafs der Druck mit dem vorhin durch Rechnung bestimmten der gleiche ist, dafs

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{R}.$$

Dafs die Centrifugalkraft proportional dem Gewichte der rotierenden Körper ist, kann man an einem sehr hübschen Versuche sehen. Ersetzt man den Messingstab des vorigen Versuches durch eine geschlossene Glasröhre, in welcher Luft, Wasser, ein Stückchen Kork und eine Bleikugel eingeschlossen ist, so sieht man bei der Rotation des Apparates die Luft dem Centrum des Kreises am nächsten, das Stückchen Kork sich auf die dem Centrum zugewandte Seite des Wassers legen, und die Bleikugel sich bis ans Ende der Röhre bewegen, selbst wenn die Röhre gegen den Mittelpunkt des Kreises stark geneigt ist.

§ 34.

Erhaltung der Rotationsebene. In gleicher Weise, wie ein Körper bei der drehenden Bewegung der Änderung der Bewegungsrichtung in seiner

ahn einen gewissen Widerstand leistet, welcher sich in der Centrifugalraft äufsert, so strebt auch ein rotierender Körper in der Ebene, in welcher er otiert, zu verharren. Jeder Teil des Körpers beschreibt nämlich bei seiner ewegung einen ebenen Kreis, und in jedem Augenblicke besitzt derselbe ine nach der Tangente des Kreises gerichtete Geschwindigkeit. Wenn man un den rotierenden Körper so drehen will, dafs die Ebene, in der sich der Punkt desselben bewegt, mit ihrer ursprünglichen Lage einen Winkel ildet, so mufs ebenfalls die Richtung der Bewegung geändert werden.

Dazu bedarf es aber ebenso einer Kraft, wie zu der Änderung der ewegungsrichtung in der Rotationsebene. Wirken demnach keine äufseren räfte auf einen solchen rotierenden Körper ein, so bleibt er in seiner Lage, o dafs die von den einzelnen Punkten beschriebenen Kreise stets derselben bene parallel bleiben.

Man sieht dieses sehr deutlich an einem schmalen Rade oder einer chmalen Scheibe, welche sofort umfallen, wenn man sie ruhend auf dem ande vertikal aufstellen will, welche aber in der vertikalen Ebene fortollen, wenn man sie in rasche Drehung um eine horizontale Axe versetzt. asselbe zeigt sich in dem Beharren der ogenannten freien Axen rotierender Körper. reht sich nämlich der Körper um eine Axe, m welche die Masse derselben ganz symetrisch verteilt ist, so zwar, dafs die chwerpunkte aller einzelnen auf der Axe enkrechten Schichten auf der Axe liegen, ann übt die Centrifugalkraft nach allen ichtungen hin einen gleichen Zug auf die xe aus, ihre Wirkung hebt sich also auf. ine solche Axe, welche durch die Centriugalkraft gar keinen Zug erfährt, nennt an eine freie Axe. Dafs eine solche Axe hre Richtung im Raume beibehält, sieht an sehr deutlich an dem Bohnenbergerchen Apparate. Derselbe besteht aus drei n einander liegenden Ringen, in deren nnerstem eine Kugel in rasche Rotation ersetzt werden kann. Der äufserste Ring A (Fig. 43) ist fest vertikal aufgestellt. Der zweite Ring B kann sich in dem ersten um eine vertikale Axe frei drehen. Der dritte Ring C kann sich in dem zweiten um eine Axe frei drehen, welche mit der Drehungsaxe des zweiten Ringes einen rechten Winkel bildet, und die Kugel D endlich ist um eine auf dieser senkrechten Axe drehbar. An der Axe der Kugel ist eine kleine Rolle angebracht, um welche ein Faden vielfach geschlungen werden kann. Zieht man den Faden sehr rasch ab, während man den Ring festhält, so nimmt die Kugel eine sehr rasche Rotation um ihre Axe an.

Fig. 43.

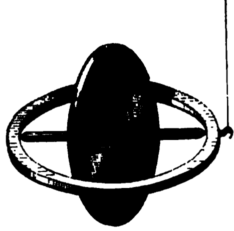


Man sieht, durch diese dreifache Aufhängung kann sich die Axe der Kugel ganz frei nach allen Richtungen drehen; rotiert die Kugel nicht, so bringt auch der leiseste Druck eine Drehung der Axe hervor. Hat man

aber die Kugel mittels raschen Abziehens der Schnur in schnelle]
versetzt, so mag man den Apparat drehen und wenden wie man v
Axe der Kugel bleibt sich immer parallel. Sehr deutlich sieht n
wenn man den Apparat auf der Centrifugalmaschine befestigt u
dann in Rotation versetzt; die Richtung der Drehungsaxe wird
nicht geändert.

Ganz dieselbe Erscheinung zeigt sich bei dem bekannten Kin
zeug, dem Kreisel. Wenn derselbe nicht rotiert, so fällt er auf di
gestellt sofort um, weil er sich dann im Zust
labilen Gleichgewichts befindet. Rotiert er
so fällt er nicht um, selbst wenn die Ax
die Vertikale geneigt ist, also der Kreis
die Schwerkraft umgeworfen würde, wenn
rotierte.

Fig. 44.



Wie grofs der Widerstand ist, den ein
der Körper einer Änderung der Rotationseb
gegensetzt, fühlt man sehr deutlich, wenn r
sucht, die Axe der rotierenden Kugel im
bergerschen Apparat zu drehen. Noch auffallender zeigt es sich a
Versuche, welcher den Mechanikus Fessel auf die Konstruktion
sondern Apparates, des Fes
Rotationsapparates, führte.

Fig. 45.



Wenn man eine an ihrer
mit einem starken Messingwu
sehene Scheibe auf einer Axe b
welche wie die Bohnenbe
Kugel in einem Ringe angebr
nun die Scheibe in sehr ras
tation versetzt und dann den
der in Fig. 44 bezeichneten V
einem Faden aufhängt, so si
und Scheibe nicht sofort herab,
bleibt frei schweben, weil bein
sinken eine Änderung der R
ebene eintreten würde, wel
Rotation entgegenwirkt, obw
Gewicht des Apparates we
Schwungscheibe ein ziemlich b
des ist.

Dagegen sieht man an
Apparate sowohl als am Kre
andere auf den ersten Blick höchst auffallende Erscheinung; die
dreht sich um den vertikalen Faden in einer der Rotation der Sc
ihrem Ringe entgegengesetzten Richtung, während ein langsames
sinken der Drehungsaxe stattfindet.

Zu allseitiger Darstellung dieser Erscheinungen dient der Fe
Rotationsapparat (Fig. 45). Die Scheibe mit dem Ringe von Fig
nach Art der Bohnenbergerschen Aufhängung in einem zweiten R
festigt, an welchem sich ein Stiel befindet, welcher in der Gabe

eine horizontale Axe drehbar befestigt wird. Die Gabel befindet sich auf einer vertikalen im Fuſs des Apparates drehbaren Axe. An der Verlängerung des Stieles können Gewichte angehängt werden, um die rotierende Scheibe ganz oder zum Teil zu äquilibrieren. Hängt die Scheibe ganz frei, und rotiert sie, so sieht man eine Drehung der Scheibe mit den Ringen um die vertikale Axe in dem eben bezeichneten Sinne; ist sie ganz äquilibriert, so hängt die Scheibe ganz ruhig, als wenn sie nicht rotierte; ist dagegen das Übergewicht auf der andern Seite des Stieles, so dreht sich die ganze Vorrichtung in einer der vorhin angegebenen entgegengesetzten Richtung um die vertikale Axe, also in der Richtung der Rotation des Rades.

Daſs alle diese Erscheinungen nur Folge der tangentialen Geschwindigkeit der einzelnen Teile der Scheibe sind, hat Poggendorf in sehr fasslicher Weise gleich nach dem Bekanntwerden des Fesselschen Apparates gezeigt.

Wird nämlich die Drehungsaxe der rotierenden Scheibe zuerst horizontal gehalten, wie Fig. 44 und die Scheibe in der Vertikalebene rotieren gelassen, so wird beim Loslassen der Scheibe, wenn sie nicht durch ein Gewicht im Gleichgewicht gehalten wird, zunächst die Schwere einwirken und die Vorrichtung ein wenig sinken machen.

Durch dieses Sinken tritt eine geringe Drehung der Scheibe um eine horizontale Axe ein, und dadurch wird die Bewegung der Teilchen der Scheibe vorn, wo sie aufsteigen, und hinten, wo sie hinuntersinken, gestört. Dieselben haben eine vertikale Geschwindigkeit, die Scheibe nimmt dagegen eine etwas geneigte Lage an. Die vertikalen Geschwindigkeiten der Teilchen treten daher vorn, wo sie aufsteigen, zur Rechten, hinten, wo sie absteigen, zur Linken aus der Scheibe heraus. Da nun die Teilchen der Scheibe ihnen nicht mehr ganz folgen können, so üben sie einen Zug senkrecht auf die Scheibe aus, vorn nach rechts hin, hinten nach links hin. Beide Wirkungen unterstützen sich, und die Folge davon ist eine Drehung der ganzen Vorrichtung um die vertikale Axe und zwar von oben gesehen umgekehrt, wie die Bewegung eines Uhrzeigers stattfindet.

Sobald aber diese Drehung der Vorrichtung um die vertikale Axe beginnt, wird auch die Bewegung der Teilchen unten, wo sie sich nach vorn, oben, wo sie sich nach hinten bewegen, gestört. Die augenblickliche Geschwindigkeit derselben tritt unten nach links und oben nach rechts aus der augenblicklichen Stellung der Scheibe hervor. Zerlegen wir sie in zwei Komponenten, eine in der Richtung der augenblicklichen Bewegung der Scheibe und eine darauf senkrechte, so sieht man sofort, wie dadurch an dem tiefsten Punkte des Scheibendurchmessers ein Zug nach links und am höchsten ein Zug nach rechts entsteht. Beide Kräfte zusammen müssen die Drehungsaxe der Scheibe ein wenig heben, also in der entgegengesetzten Richtung bewegen, in welcher die Schwere ursprünglich das Bestreben hatte, die Axe zu drehen.

Ist dagegen dem Gewichte der Vorrichtung durch ein gleiches Gegengewicht das Gleichgewicht gehalten, so fehlt der erste Impuls, der die Scheibe ein wenig dreht, die Wirkung der Schwere, deshalb tritt gar keine Bewegung ein.

Ist aber das Gegengewicht schwerer, so ist die Wirkung eine gerade entgegengesetzte, wie eine der vorigen ganz analoge Betrachtung unmittelbar ergibt.

Die Bewegung der Rotationsaxe des Kreisels auf einem Kegel um die Vertikalrichtung wird man sich leicht auf die gleiche Weise ableiten können.

§ 35.

Foucaults Pendelversuch. Ein schwingendes Pendel hat ebenso das Bestreben, stets in derselben Vertikalebene zu schwingen, indem auch an diesem die einzelnen Teile in ebenen Kurven, in Kreisbogen, sich bewegen. Wenn daher keine seitliche Einwirkung auf das Pendel stattfindet, so wird es stets in derselben Ebene schwingen.

Diese Eigenschaft des Pendels hat der französische Physiker Foucault benutzt, um einen experimentellen Beweis für die Axendrehung der Erde zu liefern. Man denke sich ein Pendel gerade über dem Pole der Erde, z. B. dem Nordpole, aufgehängt und das Pendel gerade in einem Meridian schwingen. Das Pendel bleibt sich mit seinen Schwingungen stets parallel, der Meridian aber, mit dem es anfänglich parallel hin und her sich bewegte, dreht sich unter dem Pendel in 24 Stunden vollständig im Kreise herum. Ein Beobachter mufs daher nach und nach die Richtung der Pendelschwingung von der des Meridians abweichen sehen und, da er die Drehung der Erde nicht wahrnimmt, glauben, dafs sich die Pendelebene in entgegengesetztem Sinne drehe. Es mufs daher den Anschein haben, als wenn sich die Pendelebene mit der Sonne drehe.

An andern Orten der Erde ist das Verhältnis nicht ganz so einfach, dort kann die Pendelebene nicht ganz ihre Lage beibehalten, wie unter dem Pole, da mit der Rotation der Erde die Richtung der Schwere sich ändert; in wie weit dort eine Drehung der Pendelebene eintreten mufs, gibt folgende Überlegung. Die Lage der Pendelebene in einem bestimmten Momente ist bestimmt durch die Richtung der Vertikalen und durch die Richtung der horizontalen Tangente, die wir an den tiefsten Punkt des von dem Pendel beschriebenen Kreisbogens legen, also etwa durch den Winkel, den diese mit dem Meridian bildet. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, das Pendel schwinge in dem betrachteten Moment in der durch den Meridian gelegten Vertikalebene, so würde OAC (Fig. 46) uns die Lage der Pendelebene darstellen, wenn A uns einen Ort, auf dem Parallel ABP, und O den Mittelpunkt der Erde bedeutet. Dreht sich nun die Erde um CO als Axe, so ändert sich die Richtung der Vertikalen stetig, und mit der Drehung der Vertikalen ändert sich die Lage der Pendelebene, da das Pendel immer um die augenblickliche Vertikale als die Gleichgewichtslage infolge der nach der Vertikalen gerichteten Wirkung der Schwere hin und her schwingen mufs. Hat sich die Erde so weit gedreht, dafs der Punkt A auf dem Parallel ABP bis B gekommen ist, so hat sich die Vertikale um den Winkel AOB gedreht, eine Drehung, die wir indes nicht wahrnehmen, da wir uns mit der Erde drehen.

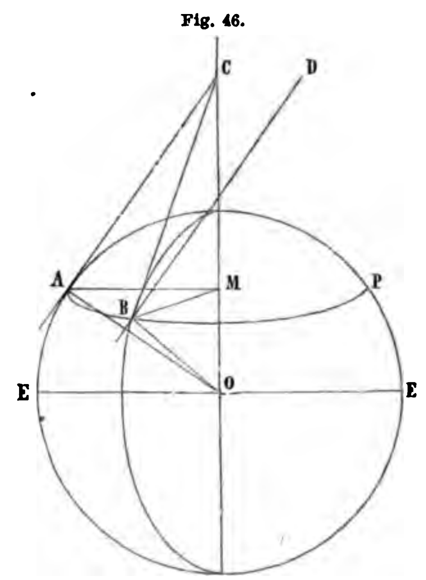
Auf die andere Richtung dagegen, welche uns die Lage des Pendels bestimmt, resp. auf die horizontale Komponente seiner Bewegung wirkt gar keine Kraft ein, so dafs die horizontale Richtung, das heifst die an den tiefsten Punkt des Pendelbogens gelegte horizontale Tangente im Raume immer dieselbe Richtung beibehalten mufs. Denn ein Verlassen dieser Richtung wäre nur möglich, wenn auf das schwingende Pendel in der

en Ebene irgend eine der horizontalen parallele Kraft einwirkte. leshalb im Punkte B die zweite Richtung, welche die Lage der ne bestimmt, die an den tiefsten Punkt des Pendelbogens gelegte e Tangente BD der ursprünglichen Richtung AC parallel sein. n ursprünglich voraus, das Pendel schwinge in der durch den gelegten Vertikalebene. Da nun diese Ebene, resp. die Richtung ians sich gedreht hat, so muſs die an den untersten Punkt des ens gelegte horizontale Tangente mit der Richtung des Meridians B einen Winkel β bilden, der, wenn φ die geographische Breite r Winkel AB ist, den der Punkt A auf seinem Parallelkreis n hat, wie sich leicht zeigen läſst, gegeben ist durch

$$\beta = \alpha \cdot \sin \varphi.$$

r Ausdruck für die Gröſse des Winkels β ergibt sich unmittelbar § 15 bewiesenen Satze über die Zusammensetzung und Zerlegung ungen. Wir können nämlich darnach die um die Erdaxe OC statt-Drehung der Erde in zwei r senkrechte Komponenten und zwar in die beiden Kom- die wir auch eben gesondert haben. Die beiden Kom- sind die Drehung um eine nkrechte Axe und um AO Die erstere Drehung bringt zale in die Richtung BO, gt die Ebene AOC in die O. Die zweite Drehung um BO dreht dann die Ebene ge ABO in die Lage CBO. el CBD, den die Pendel- BO mit der Meridianebene let, ist demnach gleich die- n Komponente der Drehung. 5 ist die Komponente einer um eine Axe, welche mit enen Drehungsaxe den Win- ldet, gleich der gegebenen multipliziert mit $\cos \psi$. Die Axe AO bildet nun, wenn wir die sche Breite AE des Beobachtungsortes mit φ bezeichnen, mit der Drehungsaxe den Winkel $90 - \varphi$. Einer Drehung α um die entspricht also als Komponente der Drehung um die Axe AO der

Fig. 46.



$$\beta = \alpha \cdot \cos(90 - \varphi) = \alpha \cdot \sin \varphi.$$

der Winkel der scheinbaren Drehung der Pendelebene ist gleich ukte des Winkels, um den sich die Erde in der Zeit gedreht hat, us der Breite.

Pole ist $\varphi = 90^0$, $\sin \varphi = 1$, $\beta = \alpha$; am Pole dreht sich die ne ebenso rasch als die Erde, am Äquator ist $\varphi = 0$, $\sin \varphi = 0$, ort dreht sich die Pendelebene gar nicht, wie sich auch unmittel-

bar daraus erkennen läſst, daſs am Äquator alle an den Meridian gezoge Tangenten der Erdaxe und somit einander parallel sind.

Für Berlin ist $\beta = \alpha \cdot \sin 52^0\ 30' = 0{,}793\,35\ \alpha$.

Für Bonn $\beta = \alpha \cdot \sin 50^0\ 43'\ 45'' = 0{,}774\,16\ \alpha$.

In 24 Stunden dreht sich somit, da α dann gleich 360^0 ist, das Pen

zu Berlin um $285^0\ 36'$,

zu Bonn um $278^0\ 41'\ 51''$,

oder zu einer ganzen Umdrehung braucht das Pendel

in Berlin 30 Stunden 15 Minuten

und

in Bonn 31 Stunden 6 Minuten.

Genau ausgeführte Versuche haben wirklich diese von der Theorie forderten Zahlen geliefert und haben somit einen experimentellen Be für die Axendrehung der Erde gegeben.

Am bequemsten werden die Versuche in hohen Räumen ausgefü Man befestigt an einem langen feinen Draht ein schweres Gewicht und si um den Punkt, auf welchen das Pendel zeigt, wenn es vertikal herabhä als Mittelpunkt einen geteilten Kreis. Man sieht, wie nach und nach Pendel auf immer andere Teilstriche zeigt, indem sich seine Schwingu ebene scheinbar mit der Sonne dreht.

Drittes Kapitel.

Von der allgemeinen Gravitation.

§ 36.

Allgemeine Anziehung. Kepplers Gesetze. In den beiden vor Kapiteln haben wir mehrfach gesehen, daſs alle Körper auf der Erde Kräften angegriffen werden, die wir ihr Gewicht nannten, und welche jeder Stelle senkrecht gegen den Horizont wirken. Es hat demnach Anschein, als wenn die ganze Masse der Erde auf die an ihrer Oberfl befindlichen Körper eine Anziehung ausübe, welche überall merklich g den Mittelpunkt der Erde gerichtet ist, und welche bis zu irgend e Höhe über dem Boden wirksam ist. Durch Induktion schlieſsen wir da daſs sich diese Anziehung über jene Grenzen ausdehnt, welche wir errei können, daſs sie sich bis zu den Sternen erstreckt, aber mit der Entfern an Gröſse abnehmend.

Andererseits dürfen wir mit groſser Wahrscheinlichkeit anneh daſs alle Gestirne ähnliche Erscheinungen darbieten, daſs es auf allen gegen ihren Mittelpunkt gerichtete Schwere gebe, die bis zu einer gew Entfernung auf alle anderen Himmelskörper wirkt. Diese Schlüsse w es, welche Newton dahin führten, anzunehmen, daſs alle Gestirne sich ziehen, daſs ihre Bewegungen durch die wechselseitige Einwirkung ders auf einander bestimmt seien, und daſs das ganze Weltall durch K

:egiert werde, die aus einer einzigen Quelle fliefsen, aus der Anziehung der Materie.

Ist dem so, so müssen die Bewegungen der Gestirne äufserst verwickelter Natur sein, weil ihre Zahl äufserst grofs ist, und alle auf einander einwirken. Indes ist es leicht ersichtlich, dafs sich das Problem mit einer ersten Annäherung einfacher stellt. Die Himmelskörper teilen sich in zwei Klassen; die eine umfafst die Fixsterne, welche sich in so grofsen Entfernungen von der Sonne und Erde befinden, dafs man ihren Einflufs vernachlässigen kann; die andern stehen sich näher, sie wirken einer auf den andern ein und bilden eine abgeschlossene, von Fixsternen freie Gruppe; es sind dies die Sonne nebst ihren Planeten. Wir haben uns zunächst nur mit der Wechselwirkung dieser auf einander zu befassen. Vergleichen wir nun die einzelnen Körper dieser Gruppe mit einander, so erkennen wir sofort, dafs die Sonne wegen ihrer überwiegenden Gröfse in dem System auch einen überwiegenden Einflufs haben mufs, derart, dafs ein Planet wie unsere Erde von der Sonne sehr stark angezogen werden mufs, von den übrigen so unbedeutend, dafs wir auch deren Einflufs zunächst vernachlässigen dürfen. Wir betrachten daher die Sonne als den einzigen anziehenden Mittelpunkt in unserem System und nehmen an, dafs die übrigen Planeten unabhängig von einander sich nach denselben Gesetzen bewegen, jeder so, als sei er allein der Anziehung der Sonne unterworfen. Wir haben dann, um die Gesetze der Anziehungskraft zu erhalten, nur die Aufgabe, die Bewegung der einzelnen Planeten um die als fest betrachtete Sonne zu untersuchen, und aus dieser nach den bisher entwickelten Gesetzen auf diejenigen zurückzuschliefsen, nach welchen die Kraft wirksam ist.

Die Gesetze, nach denen sich die einzelnen Planeten um die Sonne bewegen, sind im Anfange des 17. Jahrhunderts von dem grofsen deutschen Astronomen Keppler aus den sorgfältigen und langjährigen Beobachtungen Tycho de Brahes abgeleitet worden und werden daher nach ihm die Kepplerchen Gesetze genannt[1]). Es sind folgende drei:

1. Die Planeten bewegen sich in elliptischen Bahnen um die Sonne, welche in dem einen Brennpunkte der Ellipsen steht.

2. Die von dem Radius vector jedes Planeten beschriebenen Flächenräume verhalten sich wie die Zeiten, in denen sie beschrieben sind.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände von der Sonne.

Auf diese Gesetze gründete Newton den Nachweis von der Existenz der zwischen verschiedenen Massen thätigen, anziehenden Kraft und die Entwicklung der Gesetze, nach welchen dieselbe sich ändert.

§ 37.

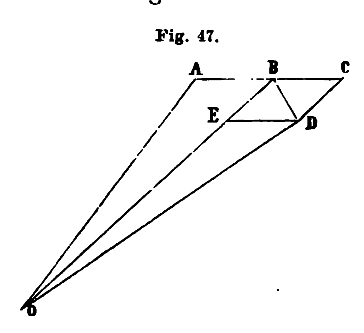
Die Anziehung ist gegen die Sonne gerichtet. Sei O (Fig. 47) das Centrum der Sonne, und A das eines Planeten, in einem bestimmten Augenblicke. Während einer sehr kleinen Zeit beschreibt nun letzterer das

---

[1]) Man sehe *Poggendorff,* Geschichte der Physik. Leipzig 1879, p. 161 ff.

Stück AB seiner Bahn. Wenn nun keine äufsere Kraft auf ihn einwirkte, so würde er in einer der ersten gleichen und ihr folgenden Zeit das gleiche Stück BC in der Richtung seiner Bewegung zurücklegen. Anstatt dessen legt jedoch der Punkt A in der auf die erste folgenden und ihr gleichen Zeit den Weg BD zurück. Man mufs daraus schliefsen, dafs auf ihn eine Kraft einwirkt, welche seine Bewegungsrichtung ändert. Um die Richtung dieser Kraft zu erhalten, bedenken wir, dafs nach dem zweiten Kepplerschen Gesetze die Fläche

Fig. 47.



$$ABO = BDO = CBO$$

sein mufs. Soll nun aber das Dreieck BDO gleich dem Dreieck CBO sein, welches gleich ABO ist, weil $AB = BC$ ist, und die Spitzen der Dreiecke zusammenfallen, so müssen die Spitzen C und D der beiden Dreiecke BDO und BCO auf einer mit BO parallelen Linie liegen, da sie die Seite BO gemeinsam haben. Konstruieren wir nun das Parallelogramm $BEDC$, so sehen wir, dafs auf den Planeten eine Kraft wirken mufs, welche ihn zwingt den Raum BE zu durchlaufen, während er vermöge seiner anfänglichen Geschwindigkeit sich nach BC bewegt haben würde. Diese Kraft ist aber nach dem Mittelpunkte O gerichtet. Es ist also bewiesen, dafs die Planeten, da sie sich in einer krummen Linie bewegen, einer stetig wirkenden Kraft unterworfen sind, und dafs aus dem zweiten Kepplerschen Gesetze, nach welchem die von den Radien vectoren in gleichen Zeiten beschriebenen Flächenräume gleich sind, hervorgeht, daß diese Kraft nach dem Centrum der Sonne gerichtet sein mufs. Das ist der erste Teil der Newtonschen Entwicklung.

§ 38.

Entwicklung des Anziehungsgesetzes. Das erste Kepplersche Gesetz bestimmt die Gestalt der Planetenbahnen, es erklärt sie für Ellipsen, deren Excentricitäten verschieden sind. Nehmen wir nun als einen bestimmten Fall an, dafs die Excentricität gleich Null sei, dafs also die elliptische Bahn in eine Kreisbahn übergehe. In Wirklichkeit ist das zwar für keinen einzigen Planeten der Fall; da jedoch die Excentricität der Planetenbahnen immer sehr klein ist, so wird unsere Annahme nicht weit von der Wahrheit abweichen, und wir werden durch unsere Entwicklungen eine erste Annäherung erhalten. Den gleichen Weg schlug Newton ein.

Im Falle der Planet sich in einer kreisförmigen Bahn bewegt, in deren Mittelpunkt sich die Sonne befindet, müssen die einzelnen Bogen, welche der Planet in gleichen Zeiten durchläuft, gleich sein, da diese Gleichheit nach dem zweiten Kepplerschen Gesetze für die von den Radien beschriebenen Räume, die Sectoren bestehen mufs. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Planet sich in seiner Bahn bewegt, ist demnach eine gleichförmige während der ganzen Umlaufszeit. Wir haben somit hier einen Fall der Kreisbewegung, wie wir ihn in dem Paragraphen über die Centripetalkraft und Centrifugalkraft betrachtet haben.

Für die Centripetalkraft hatten wir den Ausdruck

$$F = \frac{m \cdot v^2}{R},$$

oder für die von der Centripetalkraft hervorgebrachte Beschleunigung

$$\frac{F}{m} = G = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

worin R den Radius des von dem bewegten Körper beschriebenen Kreises und T die Umlaufszeit bedeutet. Nehmen wir für R den Radius der Planetenbahn und für T seine Umlaufszeit, so haben wir also hier den Ausdruck für die Beschleunigung, welche der Planet gegen die Sonne erhält, also die Anziehung der Sonne auf die Einheit der Masse des Planeten, in dem Abstande R von der Sonne.

Für die verschiedenen Planeten in den Abständen R, R', R'' von der Sonne erhalten wir aus den Umlaufszeiten T, T', T'' für die Gröfse der anziehenden Kraft der Sonne auf die Einheit der Masse in den Entfernungen R, R', R'' die Ausdrücke

$$G = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \quad G' = \frac{4\pi^2 R'}{T'^2}, \quad G'' = \frac{4\pi^2 R''}{T''^2}.$$

Nach dem dritten Kepplerschen Gesetze verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen, so dafs wir haben

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{T'^2}{R'^3} = \frac{T''^2}{R''^3} = K,$$

also $$T^2 = K \cdot R^3, \quad T'^2 = K \cdot R'^3, \quad T''^2 = K \cdot R''^3.$$

Setzen wir diese Werte in unsere Ausdrücke für G, $G' \cdots$ ein, so erhalten wir

$$G = \frac{4\pi^2}{KR^2}, \quad G' = \frac{4\pi^2}{KR'^2}, \quad G'' = \frac{4\pi^2}{KR''^2},$$

oder in Worten: die von der Sonne in verschiedenen Entfernungen den Planeten erteilten gegen die Sonne gerichteten Beschleunigungen, welche die auf die Einheit der Massen ausgeübte Anziehungskraft messen, sind dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportional.

Wollen wir aus der Beschleunigung die anziehende Kraft F erhalten, welche die Sonne auf die verschiedenen Planeten ausübt, so haben wir $F = m \cdot G$, also die Beschleunigung G mit der Masse m zu multiplicieren. Es wird dann

$$F = m \cdot G = \frac{m}{R^2} \cdot \varphi,$$

wenn wir mit φ die Anziehung der ganzen Sonnenmasse auf die Einheit der Planetenmasse in der Einheit des Abstandes bezeichnen. Da nun diese Anziehung gleich ist der Summe der Anziehungen der einzelnen Massenteilchen, so ist sie proportional der gesamten Masse M der Sonne, so dafs wir setzen können

$$\varphi = M \cdot f$$

und dann allgemein

$$F = \frac{m \cdot M}{R^2} \cdot f.$$

Das Gesetz der Massenanziehung können wir daher ganz allgemein ausdrücken: „Die Anziehung zweier Körper auf einander ist proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes.“

Wir haben bisher die der Wirklichkeit nicht entsprechende Annahme gemacht, dafs die Planetenbahnen Kreise seien; es entsprach das unserer Absicht, durch eine angenäherte Methode zu zeigen, wie Newton die Gesetze der Attraktion entwickelte. In der theoretischen Mechanik werden diese Probleme jedoch ohne diese Beschränkung abgehandelt; man gelangt dann genau zu denselben Resultaten, dafs auf die Planeten eine gegen die Sonne gerichtete Kraft wirke, die mit dem Quadrate ihres Abstandes von der Sonne abnimmt.

Nachdem man die Gesetze erkannt hat, denen die Attraktionskraft folgt, liegt es nahe, sich die Frage vorzulegen, wodurch es dahin gekommen, dafs die Planeten sich in diesen Bahnen bewegen. Es ist das eine rein mathematische Aufgabe, wie aus Folgendem ersichtlich ist. Wären Sonne und Erde z. B. anfänglich ohne Bewegung sich im Raume in einem gewissen Abstande gegenübergestellt, so würden beide Gestirne infolge der Anziehung sich gegen einander bewegt haben, bis sie sich berührt hätten. Hatte aber die Erde anfänglich eine Geschwindigkeit in anderer Richtung als in der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte erhalten, so mufste sie sich unter dem doppelten Einflufs dieser Anfangsgeschwindigkeit und der Anziehung der Sonne in einer krummlinigen Bahn bewegen. Die Rechnung zeigt nun, dafs diese Bahn jedenfalls ein Kegelschnitt sein mufste und zwar, je nach dem anfänglichen Abstande der beiden Körper und der Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen, ein Kreis, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Einmal auf dieser Bahn bewegt, mufs das Gestirn dieselbe unaufhörlich durchlaufen, entweder wenn die Kurve geschlossen ist, seinen Weg immer wieder zurücklegend, wie es bei den Planeten der Fall ist, oder ohne Wiederkehr fortschreitend, wenn die Kurve eine nicht geschlossene ist. Letzteres ist für einige Kometen wahrscheinlich.

Dieses ist jedoch noch nicht die exakte Lösung des Problems der Astronomie; man kann die Gestirne in ihrer Bewegung nicht als unabhängig von einander betrachten, denn jedes derselben wird in jedem Augenblicke von der Sonne und allen andern angezogen. Deshalb sind die Bahnen der Planeten nicht vollkommene Ellipsen, als welche Keppler sie ansah, sondern sehr verwickelte Kurven, welche infolge der Störungen der andern Planeten, bald an der einen bald an der andern Seite von der Ellipse abweichen. Dadurch wird das allgemeine Problem der Bewegung der Gestirne äufserst verwickelt, und es bedarf zu seiner Lösung schwieriger mathematischer Entwicklungen und exakter Beobachtungen. Erstere liefert die Mechanik des Himmels, letztere die beobachtende Astronomie.

Wir haben in den beiden letzten Paragraphen die zwischen den Gestirnen wirksame Kraft als eine Anziehung der Materie bezeichnet; mit dieser Bezeichnung haben wir bereits den Boden der Thatsachen verlassen und uns auf das Gebiet der Hypothese begeben. Die Thatsachen beweisen uns nur, dafs zwischen den Gestirnen ein Antrieb zur Wirksamkeit kommt, welcher die Planeten gegen die Sonne treibt, und dafs dieser Antrieb den Massen der Planeten direkt, den Quadraten ihrer Abstände umgekehrt pro-

tional ist. Nach unserer Definition des Wortes Kraft, als die Ursache es Antriebes, können wir ebenso sagen, dafs zwischen den Weltkörpern e Kraft thätig ist. Sowie wir aber als die Quelle dieser Kraft eine durch Raum wirkende Anziehung der Materie bezeichnen, machen wir zur riedigung unseres Kausalitätsbedürfnisses, zur Beantwortung der Frage, her rührt diese Kraft, eine Hypothese. Ob Newton diese Hypothese te, läfst sich nicht mit Sicherheit behaupten, sicher ist, dafs diese Hypose zuerst von Roger Cotes in der Vorrede zu der von demselben noch Lebzeiten Newtons veranstalteten Ausgabe der Philosophiae naturalis ncipia mathematica deutlich ausgesprochen wurde.

Bis vor wenigen Jahren hat man sich mit dieser Hypothese ziemlich gemein begnügt. In neuester Zeit sucht man indes die zwischen zwei fernten Massen thätige Kraft in anderer Weise zu erklären, indem man von ausgeht, dafs die Annahme einer durch nichts weiter vermittelten ziehung in die Ferne unserem Kausalitätsbedürfnisse nicht genüge, oder mit deren Worten, dafs eine solche unvermittelte Wirkung in die Ferne für s nicht begreiflich sei. Man hat deshalb ein Zwischenmittel angenommen, lches die von den einzelnen Massen ausgehenden Antriebe übermittelt, d hat als solches vorzugsweise den Äther angesehen, auf dessen Existenz sogenannten leeren Raume wir aus den Lichterscheinungen schliefsen ssen. Man hat weiter verschiedene zum Teil als abenteuerliche zu bechnende Vorgänge ersonnen, durch welche die Antriebe und deren Übertelung zwischen den Massen zustande kommen sollen[1]). Wir können f die verschiedenen Erklärungsversuche hier nicht eingehen, kein einziger selben ist haltbar, entweder sind die Hypothesen, auf denen die Errungsversuche beruhen, selbst ebenso unbegreiflich als die Wirkung in Ferne, welche sie erklären sollen, oder sie stehen mit anderweitig ernten Principien oder Gesetzen im Widerspruch.

Nur wollen wir hier sofort schon bemerken, dafs alle diese Erklärungssuche eigentlich müfsig sind, so lange wir in der Auffassung der Naturcheinungen an der atomistischen Konstitution der Materie festhalten. m Beginne des nächsten Abschnittes an werden wir nämlich sehen, dafs r in einer Erklärung der Naturerscheinungen am weitesten kommen, oder an die Sätze der Einleitung anzuknüpfen, dafs wir die weitaus gröfste hl von Naturerscheinungen aus einer einzigen Hypothese ableiten können, nn wir annehmen, dafs die Materie aus einzelnen Teilchen, den Atomen er Molekülen besteht, welche, ohne sich gegenseitig zu berühren, neben ander gelagert sind. Damit sind wir genötigt Kräfte anzunehmen, welche ischen diesen Teilchen thätig sind, ohne dafs wir ein Zwischenmittel anhmen können, welches die Wirkungen von einem Molekül auf das andere ermittelt. Zwar sind die Abstände der Moleküle für uns unmefsbar klein. des eine unvermittelte Fernewirkung ist für kleine Entfernungen gerade schwer oder so leicht begreiflich als für grofse Entfernungen. Klein d grofs sind überhaupt nur relative Begriffe. Zudem wissen wir nicht, nicht der Abstand der Moleküle im Verhältnis zur Gröfse derselben ein

---

[1]) Eine ziemlich vollständige Übersicht über die verschiedenen Versuche r Erklärung der Fernewirkung gibt Dr. *Isenkrahe* in seinem Buche: Das Rätsel r Schwerkraft. Braunschweig bei Vieweg 1879.

ebenso grofser ist, als der Abstand der Weltkörper im Verhältnis zur Gröfse dieser. Nur in einer solchen Hypothese zur Erklärung der Fernewirkung können wir daher einen Fortschritt erblicken, welche gleichzeitig die sogenannten Molekularkräfte überflüssig macht, welche uns also gestattet, die Materie als ein nicht aus diskreten Teilchen bestehendes Kontinuum aufzufassen. Da vorläufig dazu noch keine Aussicht vorhanden ist, halten wir an der Hypothese der Fernewirkung fest[1]).

Ob wir indes eine Fernewirkung annehmen oder nicht, das sogenannte Attraktionsgesetz, das Gesetz, nach welchem der zwischen zwei Massen vorhandene Antrieb von der Gröfse und dem Abstande der Massen bedingt wird, steht fest, und nur dieses Gesetz ist es, welches unsern weiteren Untersuchungen zu Grunde liegt.

§ 39.

Identität der Schwere und der allgemeinen Anziehung. Machen wir es uns jetzt zur Aufgabe, den Nachweis zu liefern, dafs die Ursache, welche auf der Erde die Körper fallen macht, dieselbe ist wie jene, welche die eben betrachteten Bewegungen regelt. Auch dieses zuerst nachgewiesen zu haben ist Newtons Verdienst.

Die Erde besitzt einen Trabanten, den Mond, dessen Centrum im Mittel 60 Erdradien von dem Mittelpunkte der Erde entfernt ist. Astronomisch gesprochen ist dieser Abstand sehr gering, und daher kommt es, dafs die Anziehung der Erde auf den Mond viel gröfser ist als die Anziehung der Sonne, so zwar, dafs man annehmen darf, der Mond sei nur der Anziehung der Erde unterworfen. Es ist dieses allerdings nicht genau, aber eine ähnliche Annäherung an die Wirklichkeit wie bei unserer vorigen Annahme, dafs die Planetenbahnen Kreise seien. Der Mond wird deshalb um die Erde, letztere als ruhend betrachtet, eine Ellipse beschreiben. Nehmen wir nun überdies an, dafs die Mondbahn ein Kreis sei, was bei ihrer geringen Excentricität nur wenig von der Wahrheit abweicht, sowie die Erde und der Mond seien vollkommene Kugeln. Nach allen diesen Annahmen können wir zwar keine genauen numerischen Daten erwarten, jedoch für unsern Zweck hinreichende, da alle diese Annahmen nur sehr wenig von der Wahrheit abweichen.

Die Anziehung, welche der Mond von der Erde erfährt, können wir aus der centripetalen Beschleunigung berechnen, welche der Mond von der Erde erfährt; diese Beschleunigung ist gleich der Kraft, welche die Masseneinheit des Mondes von der ganzen Erde erfährt. Bezeichnen wir die Umlaufszeit des Mondes mit T, den Radius der Mondbahn mit r, so ist die centripetale Beschleunigung

$$G = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Der Radius der Mondbahn ist nun, wie erwähnt, gleich 60 Erdradien bezeichnen wir letztern mit R, so wird

$$G = \frac{2\pi R \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi}{T^2}.$$

[1]) Wir werden im 4. Bande bei Besprechung der Gesetze der elektrischen Anziehung Gelegenheit nehmen nochmals auf diese Frage zurückzukommen.

In diesem Ausdrucke ist $2\pi R$ gleich dem Umfange der Erde, gleich)000000 Meter; die Umlaufszeit T des Mondes ist gleich 27 Tage, Stunden, 43 Minuten = 39 343 · 60 Sekunden. Demnach wird G

$$G = \frac{40\,000\,000 \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi}{(39\,343 \cdot 60)^2} = \frac{40\,000\,000\,\pi}{(39\,343)^2 \cdot 30}$$

$$G = 0{,}002706 \text{ Meter.}$$

Diese Zahl gibt uns die Beschleunigung, welche der Mond durch die nziehung der Erde in jeder Sekunde gegen den Mittelpunkt der Erde hin :hält, also auch die Anziehung in Krafteinheiten, in Kilogrammen, welche ie an der Stelle des Mondes befindliche Masseneinheit von der Erde erhält.

Ein an der Erdoberfläche befindlicher Körper erhält nun die Be- :hleunigung 9,81 Meter, oder was dasselbe ist, die Erde zieht an ihrer rdoberfläche die Masseneinheit mit einer Kraft von 9,81 Kilogrammen an. it deshalb die Schwerkraft mit der allgemeinen Gravitation dieselbe Kraft, › würden die in beiden Fällen auf die Masseneinheiten wirkenden Kräfte ch umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Abstände derselben von dem unkte der Erde, von welchem wir uns die Anziehung der Erde ausgehend enken können.

Um diese Vergleichung durchführen zu können, müssen wir deshalb mächst untersuchen, von welchem Punkte der Erde aus die auf aufserhalb ›r Erde befindliche Massen ausgeübte Anziehung ausgeht, von wo aus wir e Abstände der zu vergleichenden Masseneinheiten zu rechnen haben.

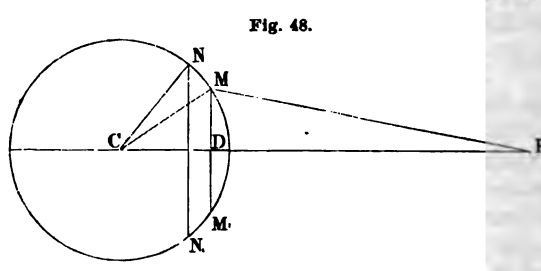
Befindet sich die angezogene Masse von der Erde so weit entfernt, ıfs wir die Verbindungslinien aller Punkte der Erde mit dieser Masse als nander parallel ansehen können, so lehrt uns schon der Satz vom Mittel- mkt der parallelen Kräfte, dafs die Erde und die Masse sich gerade so ıziehen müssen, als ginge die gesamte Anziehung von dem Mittelpunkte ›r Erde aus. Denn da an allen Punkten der Erde in dem Falle parallele ›gen die angezogene Masse gerichtete Kräfte angreifen, so befindet sich ie Erde jener Masse gegenüber gerade wie eine auf der Erde befindliche :hwere Kugel. Wie nun letztere von der Erde gerade so angezogen wird, ls wäre ihr ganzes Gewicht im Schwerpunkt, welcher bei einer homogenen [ugel der Mittelpunkt ist, vereinigt, so ist auch die Anziehung der ent- ernten Masse auf die Erde und der Erde auf die entfernte Masse gerade o, als wenn die ganze anziehende Masse der Erde in deren Mittelpunkt ereinigt wäre.

Als Abstand der an der Stelle des Mondes befindlichen angezogenen Masseneinheit von der Erde müssen wir deshalb den Abstand der Mittel- punkte des Mondes und der Erde oder 60 Erdradien einsetzen.

Aber ebenso wie auf entfernte Massen wirkt eine Kugel auch auf solche, die sich in ihrer Nähe befinden, gerade so, als wenn die ganze an- ziehende Masse der Kugel in ihrem Schwerpunkte, also bei einer homogenen Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Zunächst erkennt man leicht, lafs die Anziehung einer Kugel gegen den Mittelpunkt derselben gerichtet sein mufs. Denn stellt der Kreis (Fig. 48) den Durchschnitt einer Kugel nach einem gröfsten Kreise vor, welche anziehend auf irgend einen Punkt ' wirkt, so sieht man sofort, dafs alle anziehenden Punkte der Kugel ganz ymmetrisch um die Verbindungslinie PC des Punktes P mit dem Mittel-

punkte verteilt sind. Jedem Punkte M oberhalb PC ent
so weit von P entfernter Punkt unterhalb PC. Zerlegen
M und M_1 gerichteten Anziehungen in ihre Komponent
und senkrecht zu PC, so heben die letzteren sich auf, da
und M
sind.
ben i
die
punkt
poner
also
zieht
telpu
richt

Fig. 48.



Um die Anziehung der Kugel auf eine im P
Masse m, deren Abstand vom Mittelpunkt CP gleich
denken wir uns die Kugel in lauter einzelne sehr d
deren Dicke gleich δ sei; stelle jener Kreis den Durch
Schale vor. Die Dichtigkeit der Schale, das heifst die
enthaltene Masse sei gleich σ. Führen wir nun durch
einander sehr nahe zu PC senkrechte Schnitte MM_1 un
dieselben aus der Schale eine Zone heraus, deren Vol
dukte aus dem Kreisumfang MM_1, dem Bogen MN
Schale ist, wenn wir eben MN und δ so klein voraus
MM_1 von dem in der Mitte der Schale mitten zwisch
Schnitte nur unendlich wenig verschieden ist. Das
ist demnach

$$2\pi MD \cdot MN \cdot \delta,$$

und die in dieser Zone enthaltene Masse erhalten wir,
mit σ multiplizieren. Nennen wir nun die Anziehung
heit gleiche Massen in der Entfernungseinheit auf ei
erhalten wir für die Anziehung der Kugelzone auf
Masse m nach dem im vorigen Paragraphen entwickelt

$$f \cdot \frac{2\pi \cdot MD \cdot MN \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{MP^2}$$

und die allein übrig bleibende in PC fallende Kompone
Ausdruck mit cos CPM multiplicieren,

$$f \cdot \frac{2\pi \cdot MD \cdot MN \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{MP^2} \cdot \cos CP$$

Bezeichnen wir nun den Radius der Kugelschale
stand des Punktes P von der Zone MP mit e, den W
die Breite der Zone im Winkelmafs oder MCN mit d

$$MD = r \cdot \sin \vartheta, \quad MN = r \cdot d\vartheta$$

$$\cos CPM = \frac{DP}{e} = \frac{a - r \cdot \cos \vartheta}{e}$$

Zur Bestimmung des Zählers im Ausdruck für $\cos CPM$ haben wir

$$MP^2 = MC^2 + CP^2 - 2MC \cdot CP \cdot \cos\vartheta = r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos\vartheta$$

$$r \cdot \cos\vartheta = \frac{r^2 + a^2 - e^2}{2a}$$

$$a - r \cdot \cos\vartheta = \frac{a^2 + e^2 - r^2}{2a}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in den für die Anziehung der Kugelzone erhaltenen ein, so wird derselbe

$$f \cdot \frac{2\pi \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot r\, d\vartheta \cdot \sigma \cdot m}{e^2} \cdot \frac{a^2 + e^2 - r^2}{2a \cdot e},$$

oder, indem wir passender ordnen,

$$f \cdot \frac{\pi r^2 \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a} \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta \cdot \frac{a^2 + e^2 - r^2}{e^3}.$$

Um die Anziehung der ganzen Kugelschale auf m zu erhalten, haben wir für alle die Kugel zusammensetzenden Zonen obigen Ausdruck zu bilden und alle diese Ausdrücke zu addieren. Wir erhalten diese Werte für die einzelnen Zonen, indem wir für ϑ nach und nach alle Werte von $0 - \pi$ und gleichzeitig den jeder Zone entsprechenden Wert von e einsetzen. Mit Hülfe unseres Wertes für e können wir bequemer den Winkel ϑ eliminieren und die Breite der einzelnen Zonen durch e ausdrücken. Nennen wir nämlich die Länge von e, wenn wir von dieser Zone zur nächstfolgenden übergehen, deren Grenze in N liegt, $e + de$, so haben wir nach E 1 und E 5 aus

$$e^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\vartheta,$$

da auf der rechten Seite nur ϑ veränderlich ist,

$$2e\, de = 2ar\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

und daraus

$$\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{e}{ar}\, de.$$

Setzen wir diesen Wert in unsern Ausdruck ein, so erhalten wir für die Anziehung der ganzen Kugelzone

$$f \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Lassen wir hierin e nach und nach alle der Kugelschale entsprechenden Werte annehmen, also e von $a - r$ bis $a + r$ sich ändern, so gibt uns die Summe der unendlich vielen Ausdrücke, die den einzelnen zwischen diesen Grenzen enthaltenen Werten von e entsprechen, die Anziehung der ganzen Kugelschale.

Die Anziehung der ganzen Kugelschale ist somit das Integral

$$\int_{a-r}^{a+r} f \frac{\pi r \delta \sigma m}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de,$$

oder, da wir den nicht von e abhängigen Faktor vor das Integralzeichen

schreiben können,

$$f\frac{\pi r\delta\sigma m}{a^2}\int\limits_{a-r}^{a+r}\left(1+\frac{a^2-r^2}{e^2}\right)de.$$

Das Integral zerfällt in zwei, von denen das erste nach E 1 und E VIII

$$\int\limits_{a-r}^{a+r}de=(a+r)-(a-r)=2r,$$

das zweite nach denselben Regeln, da $\frac{de}{e^2}=-d\frac{1}{e}$

$$\int\limits_{a-r}^{a+r}(a^2-r^2)\frac{de}{e^2}=-(a^2-r^2)\left(\frac{1}{a+r}-\frac{1}{a-r}\right)=2r.$$

Die Summe der beiden Integrale ist somit gleich $4r$ und damit der Ausdruck für die Anziehung der ganzen Kugelschale

$$f\cdot\frac{4r^2\pi\cdot\delta\cdot\sigma m}{a^2}.$$

In diesem Ausdrucke ist $4r^2\pi$ die Oberfläche der mit dem Radius r beschriebenen Kugel, $4r^2\pi\delta$ somit das Volumen und $4r^2\pi\delta\cdot\sigma$ die Masse der Kugelschale. Bezeichnen wir diese Masse mit M, so erhalten wir für die Anziehung der Kugelschale auf die im Abstande a von ihrem Mittelpunkte befindliche Masse m

$$f\cdot\frac{M\cdot m}{a^2},$$

oder die Kugelschale zieht die Masse m gerade so an, als wenn die gesamte Masse derselben in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Was nun für diese Kugelschale gilt, dasselbe gilt für alle, in welche wir uns die Kugel zerlegt gedacht haben, selbst dann, wenn die einzelnen Schalen eine verschiedene Dichtigkeit haben. Wir erhalten deshalb ganz allgemein den Satz, dafs die Anziehung einer homogenen oder einer aus konzentrischen Schalen zusammengesetzten Kugel, bei der nur die einzelnen Schalen überall dieselbe Dichtigkeit haben, nach aufsen gerade so wirkt, als wäre die ganze Masse derselben im Mittelpunkt vereinigt.

Zur Vergleichung der Anziehung, welche der Mond von der Erde erhält, mit der Schwere auf der Erde, müssen wir also auch für die auf der Erde befindlichen Gegenstände als anziehenden Punkt den Mittelpunkt der Erde ansehen, als Abstand der Masseneinheit auf der Oberfläche von der anziehenden Masse der Erde somit den Radius der Erde einsetzen.

Für die auf die Masseneinheit des Mondes wirkende Anziehung erhielten wir nun 0,002 706, für die auf der Erdoberfläche wirkende 9,81; ist deshalb die Schwere mit der allgemeinen Massenanziehung identisch, so müssen sich diese Zahlen umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernung dieser beiden Massen vom Mittelpunkt der Erde, oder es mufs

$$g=9{,}81=3600\cdot G=3600\cdot 0{,}002\,706$$

sein. Führen wir die angedeutete Multiplikation aus, so erhalten wir aus

er Anziehung des Mondes

$$g = 9{,}742,$$

ine Zahl, die so nahe mit der aus der Pendelbewegung gefundenen überinstimmt, dafs unter Berücksichtigung der gemachten nicht ganz genauen nnahmen dadurch der sicherste Beweis geführt ist, dafs die Schwere mit er allgemeinen Anziehung identisch ist.

Dieser Satz, dafs die Schwere mit der allgemeinen Gravitation identisch it, und dafs die Erde auf alle auf ihr befindlichen Gegenstände gerade so irkt, als wäre ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt, führt unmittelar zu der am Schlufs von § 29 erwähnten Folgerung, dafs ein Pendel ı verschiedener Höhe über der Erdoberfläche eine verschiedene Schwingungsauer haben, oder dafs g in verschiedenen Höhen verschieden grofs sein ıufs. In einer Höhe h über der Erdoberfläche mufs der Wert von g nach em Gesetze der Massenattraktion sich ergeben aus der Gleichung

$$g : g_0 = R^2 : (R + h)^2$$
$$g\,(R + h)^2 = g_0\, R^2,$$

enn g_0 die Beschleunigung an der Erdoberfläche oder im Niveau des leeres bedeutet; es ist somit

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2},$$

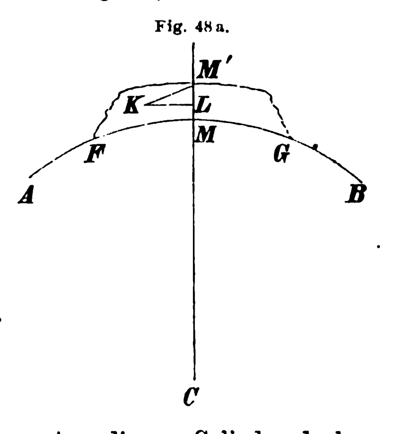
der mit hinreichend grofser Annäherung, da h gegen R immer sehr klein ist,

$$g = g_0\left(1 - 2\frac{h}{R}\right); \quad g_0 = g\left(1 + 2\frac{h}{R}\right),$$

in Ausdruck, der uns gestattet, aus den in verschiedenen Höhen über der rdoberfläche oder dem Meeresniveau beobachteten Werten von g den Wert on g_0 für das Meeresniveau zu berechnen.

Poisson hat darauf aufmerksam gemacht[1]), dafs diese Korrektion des Vertes g auf das Meeresniveau nur dann zulässig ist, wenn man sich in inem isolierten Punkte in der Höhe h iber dem Meeresniveau befindet, nicht aber, renn der Punkt auf einem ausgedehnten Festlande in der Höhe h gegeben ist. In diesem Falle wird nämlich die Beschleunigung g' gleich der soeben berechneten vermehrt um die Anziehung des Festlandes. Dieselbe läfst sich in folgender Weise berechnen. Sei (Fig. 48a) C der Mittelpunkt der Erde, AMB das Meeresniveau, $FM'G$ ein sich über demselben befindendes Festland und M' ein Punkt auf demselben in der Höhe h über M. Wir betrachten dann das Festland als einen um die Vertikale CM' gelegten Cylinder on der Höhe h und dem Durchmesser $2\,c$. Aus diesem Cylinder denken ir uns an irgend einer Stelle einen unendlich dünnen Kreisring geschnitten,

Fig. 48 a.



1) Poisson, Traité de mécanique Bd. I. § 255.

dessen Mittelpunkt auf der Axe CM' liegt, dessen Radius $KL = y$, dessen Breite gleich dy ist, und dessen Abstand von der Oberfläche $LM' = z$, dessen Dicke dz ist. Das Volumen des Ringes ist dann

$$2\pi\, y\, dy\, dz.$$

Ist σ' die Dichte des Festlandes, also die Masse der Volumeinheit, so wird gerade wie vorhin die gegen C gerichtete Anziehung dieses Ringes auf die in M' befindliche Masse m

$$f\,\frac{2\pi\,\sigma' m\, y\, dy\, dz}{KM'^2} \cos KM'L.$$

Nun ist

$$KM'^2 = y^2 + z^2;\quad \cos KM'L = \frac{LM'}{KM'} = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\,.$$

Damit wird die Anziehung des Ringes

$$f\,2\pi\sigma' m\,\frac{y\, z\, dy\, dz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Die Anziehung des Festlandes ist die Summe der Anziehungen aller dasselbe zusammensetzenden Ringe, die wir erhalten, wenn wir in dem letzten Ausdrucke für y und z alle dem Festlande entsprechenden Werte einsetzen. Zur Bildung dieser Summe berechnen wir zunächst die Anziehung einer Platte von der Dicke dz, welche in der Tiefe $LM' = z$ unter M' liegt; diese ist die Summe der Anziehungen aller Kreisringe, deren Radius zwischen $y = 0$ und $y = c$ ist, somit das nach y genommene Integral von $y = 0$ bis $y = c$

$$2\pi\, f\sigma' m\, z\, dz \int_0^c \frac{y\, dy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Dasselbe ist, da nach E IV und E 1

$$\frac{y\, dy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = d\left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\right),$$

$$2\pi\, f\sigma' m\, z\, dz\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{c^2+z^2}}\right).$$

Die Anziehung des Festlandes ist dann die Anziehung aller Platten, die zwischen $z = 0$ und $z = h$ liegen, also das Integral des letztern Ausdruckes von $z = 0$ bis $z = h$. Dieses ist auf Grund derselben Regeln

$$\varphi = 2\pi\, f\sigma' m\left(h + c - \sqrt{c^2+h^2}\right).$$

Ist die horizontale Ausdehnung des Festlandes gegen die Höhe h sehr grofs, so können wir unter dem Wurzelzeichen h^2 gegen c^2 vernachlässigen und erhalten

$$\varphi = 2\pi\, f\sigma' m\, h.$$

Die Beschleunigung, welche die Masse infolge dieser Anziehung erhält, ist

$$\gamma = \frac{\varphi}{m} = 2\pi\, f\sigma' h.$$

Somit wird

$$g' = g + \gamma = g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) + 2\pi f \sigma' h.$$

Ist nun σ die Masse der Volumeinheit unserer Erde, dieselbe als gleichmäfsig dicht vorausgesetzt, so ist die Masse der Erde

$$\tfrac{4}{3} R^3 \pi \sigma,$$

somit die auf die Masseneinheit an der Oberfläche wirkende Anziehung oder die derselben erteilte Beschleunigung

$$g_0 = f \frac{\tfrac{4}{3} R^3 \pi \sigma}{R^2} = \tfrac{4}{3}\pi f \sigma R \cdot$$

Damit wird

$$\frac{\gamma}{g_0} = \frac{2\pi f \sigma' h}{\tfrac{4}{3}\pi f \sigma R} = \frac{3\sigma' h}{2\sigma R}$$

oder

$$g' = g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R} + \frac{3\sigma' h}{2\sigma R}\right)$$

und mit hinreichender Genauigkeit

$$g_0 = g' \left(1 + \frac{2h}{R} - \frac{3\sigma' h}{2\sigma R}\right).$$

Die in diesem Falle anzubringende Korrektion ist also eine erheblich kleinere, als wenn man sich in einem isolierten Punkte in der Höhe h über der Erde befindet.

Ist ein Punkt in der Höhe h' über dem Festlande gegeben, so erhalten wir die Anziehung des Festlandes auf denselben, indem wir beachten, dafs die nächste Scheibe, deren Anziehung auf denselben wirkt, sich nicht im Abstande 0, sondern im Abstande h' von demselben befindet. Wir haben dann nur das zuletzt gebildete Integral nicht von $z = 0$ bis $z = h$, sondern von $z = h'$ bis $z = h + h'$ zu nehmen. Dasselbe wird

$$\varphi' = 2\pi f \sigma' m \left(h + h' - h' + \sqrt{c^2 + h'^2} - \sqrt{c^2 + (h + h')^2}\right).$$

Ist nun h' ebenso wie h gegen c klein, so wird auch jetzt

$$\varphi' = 2\pi f \sigma' m h.$$

Die Anziehung des als Cylinder betrachteten Festlandes ist auf Punkte, welche nicht weit über demselben liegen, von dem Abstande dieser Punkte unabhängig. Die Beschleunigung g'', welche ein Punkt in dieser Höhe erhält, ist dann

$$g'' = g_0 \left(1 - \frac{2(h + h')}{R}\right) + 2\pi f \sigma' h$$

$$g'' = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3\sigma' h}{2\sigma R} - \frac{2h'}{R}\right) = g' - g_0 \frac{2h'}{R}$$

oder

$$\frac{g'}{g''} = \frac{1}{1 - \frac{g_0}{g'} \frac{2h'}{R}} = 1 + \frac{g_0}{g'} \frac{2h'}{R} \cdot$$

Jolly hat diese Zunahme der Anziehung direkt beobachtet[1]). In einem Turm zu München, der von drei Seiten frei stand, wurde 25 Meter über dem Boden eine empfindliche Wage aufgestellt, an der man bei einer Belastung von 5 Kilo auf jeder Seite noch 0,01 Milligramm ablesen konnte. Von jeder Wagschale führte ein Draht, geschützt durch eine Röhre von Zinkblech, in den Turm hinab. An den unteren Enden der Drähte waren ebenfalls Wagschalen aufgehängt. Der Abstand der unteren und oberen Schalen ergab sich zu $21{,}005^m$.

Wiegt man einen Körper in dem oberen Schalenpaar ab und bringt ihn dann in die untere Schale, während die ihn äquilibrierenden Gewichte in der oberen Schale beobachtet werden, so nimmt das Gewicht des Körpers in dem Verhältnis der Beschleunigungszunahme $\frac{g'}{g''}$ zu, während das Gewicht der vorher ihn oben äquilibrierenden Gewichtsstücke ungeändert bleibt. Man mufs daher in die obere Wagschale, um das Gleichgewicht wieder herzustellen, der Gewichtszunahme des nach unten gebrachten Körpers entsprechend, Gewichte hinzulegen. Ist m die Masse des Körpers, so ist sein Gewicht oben $Q'' = mg''$, unten $Q' = mg'$, somit

$$\frac{Q'}{Q''} - 1 = \frac{g'}{g_0} \frac{2h'}{R}; \quad Q' - Q'' = \frac{g'}{g_0} \frac{2h'}{R} Q''.$$

Diese Differenz $Q' - Q''$ ist also oben hinzuzufügen.

Als abzuwägender Körper wurde eine mit Quecksilber gefüllte Glasflasche angewandt. Um den später zu besprechenden Einflufs des Gewichtes der verdrängten Luft auszuschliefsen, wurden zunächst vier Glaskolben von gleichem Volumen und gleichem Gewicht hergestellt. Zwei der Kolben wurden mit Quecksilber gleichen Gewichtes gefüllt, und alle Kolben an der Glasbläserlampe zugeschmolzen. Dann wurden zunächst die beiden gefüllten Kolben auf die oberen, die beiden leeren auf die unteren Wagschalen gesetzt, und durch Zulegen der erforderlichen Ausgleichgewichte scharf das Gleichgewicht hergestellt. Dann wurden an der einen Seite der leere Kolben oben, der mit Quecksilber gefüllte unten hingesetzt, somit das Quecksilber dem Mittelpunkte der Erde um $21{,}005^m$ genähert. Es ergab sich, dafs zur Herstellung des Gleichgewichtes oben $31{,}686^{mg}$ hinzugefügt werden mufsten, oder dafs $Q' - Q'' = 31{,}686^{mg}$.

Das Gewicht des Quecksilbers oben war

$$Q'' = 5\,009\,450^{mg}.$$

Der Erdradius R in der Breite von München $48^0\ 8'$ n. Br. ist

$$R = 6\,365\,722^m,$$

somit mufs nach der Theorie

$$Q' - Q'' = \frac{g'}{g_0} 2 \cdot 21{,}005 \frac{5\,009\,450}{6\,365\,722} = \frac{g'}{g_0} 33{,}059^{mg}$$

sein. München liegt auf einer Hochebene von 515^m Höhe; nehmen wir für die Dichte σ' etwa die Hälfte der mittleren Dichte der Erde, so würde $\frac{g'}{g_0} = 0{,}99989$, somit

$$Q' - Q'' = 33{,}055.$$

[1]) *Jolly*, Abhandlungen der Münchner Akademie. Bd. XIV. II. Abt.

Der theoretische Wert der Gewichtsdifferenz ist also etwas gröfser als der beobachtete. Jolly glaubt, dafs der Grund dieser Abweichung der ist, dafs in der Umgebung des Turmes der Boden etwas höher war als der Boden des Turmes, so dafs von der Umgebung ein kleiner nach oben gerichteter Zug ausging.

§ 40.

Verschiedenheit von g in verschiedenen Breiten. Ist die Beschleunigung g eine Folge der Anziehung der Erdmasse auf die an der Oberfläche befindlichen Körper, so mufs der Wert derselben an verschiedenen Punkten der Erde verschieden sein. Denn die Erde dreht sich in 24 Stunden um ihre Axe, und jeder Punkt beschreibt in dieser Zeit einen Kreis, dessen Radius gleich ist dem senkrechten Abstand desselben von der Erdaxe. Die bei der drehenden Bewegung auftretende Centrifugalkraft sucht daher alle Punkte von der Erde zu entfernen. Da aber diese Radien und somit die Kreise um so kleiner werden, je mehr wir uns den Polen nähern, so wird auch die Rotationsgeschwindigkeit und mit ihr die Centrifugalbeschleunigung im quadratischen Verhältnisse kleiner. Die Centrifugalkraft wirkt aber auch nur unter dem Äquator der Schwere gerade entgegen, an allen andern Orten bildet ihre Richtung, da sie senkrecht zur Erdaxe ist, mit der Richtung der nach dem Mittelpunkt der Erde gehenden Anziehung einen Winkel, der gleich ist der Breite des Ortes. Nur die in die Richtung der Schwere fallende Komponente, welche gleich dem Produkte aus der Centrifugalkraft in den Cosinus der Breite ist, wirkt an diesen Orten der Schwere entgegen. Es mufs deshalb die Beschleunigung der Körper durch die Schwere zunehmen, so wie wir uns vom Äquator zu den Polen entfernen.

Andererseits aber ist, wie uns geodätische Messungen lehren, die Erde nicht eine Kugel, sondern ein an den Polen abgeplattetes Ellipsoid, so zwar, dafs die Abplattung, das Verhältnis der Differenz zwischen Äquatorial- und Polarradius zum Äquatorialradius $= {}^1/_{299}$ ist. Daraus folgt aber, dafs wir dem Mittelpunkt der Erde näher kommen, wenn wir uns vom Äquator aus zu den Polen hin bewegen. Es mufs also auch aus diesem Grunde die Beschleunigung des freien Falles zunehmen, da, wie wir vorhin gezeigt haben, die Erde alle auf ihr befindlichen Körper so anzieht, als wäre die gesamte anziehende Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt.

Mit diesen Forderungen der Theorie ist die Beobachtung im Einklang, sie zeigt uns, dafs die Beschleunigung vom Äquator zu den Polen hin zunimmt, und dafs sie stärker zunimmt, als sie es allein wegen der Abnahme der Centrifugalbeschleunigung thun müfste. Ja mehr noch, die theoretische Mechanik gibt uns an, in welcher Weise wegen der Abplattung die Beschleunigung wachsen mufs, und gibt uns so ein Mittel an die Hand, aus der beobachteten Beschleunigungsänderung die Abplattung theoretisch zu berechnen. Der so erhaltene Wert stimmt sehr nahe mit dem aus geodätischen Messungen abgeleiteten überein.

Die Änderungen der Gröfse g hat man aus den Änderungen der Länge des Sekundenpendels bestimmt. Man hat

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}};$$

setzen wir $t = 1$, so wird

$$g = \pi^2 \cdot l.$$

Es genügt also, die Länge des Sekundenpendels an verschiedenen Orten zu messen, um daraus den Wert für g zu erhalten.

Nun ist nach den Messungen von Sabine reduciert auf das Meeresniveau

Breite.	Länge des Sekundenpendels.	g.
0^0	$0^m,990938$	$9^m,78009$
45^0	$0^m,993509$	$0^m,80552$
90^0	$0^m,996080$	$9^m,83089.$

Diese Werte für g sowie alle an verschiedenen Orten beobachteten lassen sich wiedergeben durch

$$g = 9^m,78009 + 0,05080 \cdot \sin^2 \varphi,$$

wenn wir mit φ die Breite des Ortes bezeichnen, an welcher die Beschleunigung gleich g ist.

In welcher Weise g sich ändern müfste, wenn nur die Centrifugalbeschleunigung es afficierte, läfst sich leicht berechnen. Die Centrifugalbeschleunigung am Äquator ist

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{2\pi \cdot 40000000}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} = 0^m,03368.$$

Der Radius der Kreise, in welchem sich die nicht unter dem Äquator liegenden Punkte bewegen, ist der senkrechte Abstand der Punkte von der Drehungsaxe der Erde. Nennen wir daher die Breite eines Ortes φ, so ist er $R \cos \varphi$. Die Centrifugalbeschleunigung ist also für einen Ort von der Breite φ gleich $0^m,03368 \cos \varphi$. Die in die Richtung der Schwere fallende und ihr entgegenwirkende Komponente ist demnach $0^m,03368 \cos^2 \varphi$. Nennen wir G die Beschleunigung durch die Schwere, wenn die Centrifugalkraft nicht vorhanden wäre, so ist die wirklich stattfindende Beschleunigung g

$$g = G - 0,03368 \cos^2 \varphi.$$

Nun ist für den Äquator, wo $\varphi = 0$ ist, nach Sabine

$$G = 9,78009 + 0,03368.$$

Vorausgesetzt, dafs nur die verschiedene Centrifugalkraft die Beschleunigung ändert, mufs dies aber auch die Beschleunigung durch die Schwere an allen Orten der Erde sein, demnach allgemein die um die Centrifugalbeschleunigung verminderte und zu beobachtende Beschleunigung g

$$g = 9^m,78009 + 0^m,03368 - 0,03368 \cos^2 \varphi$$
$$g = 9^m,78009 + 0^m,03368 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Nach unserer obigen aus der Beobachtung abgeleiteten Formel ist der Koefficient von $\sin^2 \varphi$ gröfser, so dafs also die Beschleunigung g in der That stärker zunimmt, als sie es nur der Abnahme der Centrifugalkraft wegen thun würde.

Um aus der Beschleunigungsänderung die Abplattung zu berechnen, dient das Clairautsche Theorem[1], nach welchem die Summe des Quotienten, aus der Beschleunigungsdifferenz am Pol und Äquator und der Beschleunigung am Äquator, und der Abplattung gleich dem Zweiundeinhalbfachen des Quotienten aus der Centrifugalbeschleunigung und der Beschleunigung durch die Schwere am Äquator ist, oder

$$\frac{\Delta g}{g_0} + e = 2{,}5\,\frac{c}{g_0},$$

wenn Δg den Unterschied der Beschleunigung an dem Pole und am Äquator, g_0 die Beschleunigung am Äquator, e die Abplattung und c die an dem Äquator stattfindende Centrifugalbeschleunigung bedeutet. Wir erhalten daraus für die Abplattung

$$e = 2{,}5\,\frac{c}{g_0} - \frac{\Delta g}{g_0}$$

oder, wenn wir die eben erhaltenen Zahlenwerte einsetzen,

$$e = 2{,}5\,\frac{0{,}03368}{9{,}78009} - \frac{0{,}05080}{9{,}78009} = 0{,}003415 = \frac{1}{292}.$$

Man sieht, dafs dieser aus den Pendelschwingungen unter Annahme, dafs die nicht kugelförmige Anordnung der Erdmasse die Beschleunigung ändere, berechnete Wert für die Abplattung sehr nahe mit dem durch geodätische Messungen erhaltenen übereinstimmt. Der Unterschied kann nicht auffallen, wenn man einerseits die Schwierigkeit der Messungen erwägt und andererseits bedenkt, dafs die besondere Bodenbeschaffenheit eines Ortes auf die Pendelschwingungen von Einflufs ist.

§ 41.

Versuche von Cavendish. Dafs die Bodenbeschaffenheit auf die Bewegung des Pendels von Einflufs ist, folgt direkt aus dem experimentellen Nachweis von Cavendish und Maskelyne, dafs die einzelnen Körper auf der Erde anziehend auf einander wirken. Cavendish zeigte, dafs eine grofse Bleimasse eine metallene Kugel anzieht, Maskelyne bewies, dafs das Pendel in der Nähe grofser Gebirge aus der Vertikalen abgelenkt wurde.

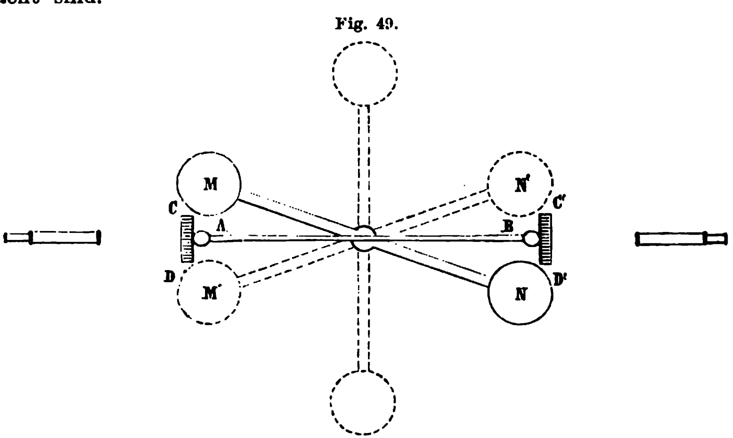
Beide Anziehungen sind gemessen und durch Vergleichung mit der Anziehung der Erde dann die Masse der Erde bestimmt. Beginnen wir mit den Versuchen von Cavendish, welcher dieselben mit folgendem von Michell konstruiertem Apparate anstellte.

Ein leichter und gleichmäfsig gearbeiteter Hebel von Tannenholz AB (Fig. 49) ist in seiner Mitte an einem sehr feinen Metalldrahte horizontal aufgehängt, welcher an der Decke eines verschlossenen Zimmers befestigt ist. An seinen Enden trägt er zwei ganz gleiche Kugeln A und B und an diesen zwei mit einer Teilung versehene Elfenbeinblättchen CD und $C'D'$.

[1]) *Clairaut,* Théorie de la figure de la terre. Paris 1743. Das Theorem ergibt sich aus der Untersuchung, welche Gestalt die Erde annehmen mufste unter der Voraussetzung, dafs die Erde früher eine flüssige Masse gewesen sei, und unter der Voraussetzung, dafs nicht die ganze Masse der Erde homogen, sondern dafs die Erde aus konzentrischen homogenen Schalen bestehe.

Faden und Hebel sind von einem hölzernen Gehäuse umgeben, um die Luft-strömungen abzuhalten. Die Seiten desselben bei A und B sind von Spiegel-glas, um die Teilungen CD und $C'D'$ beobachten zu können. Die Beobach-tungen der Teilungen geschehen mittels zweier mit Fadenkreuz versehener Fernrohre, welche den Teilungen gegenüber in der Mauer des Zimmers an-gebracht sind.

Fig. 49.



Untersuchen wir, ehe wir mit der Beschreibung des Apparates fahren, die Bedingungen, unter welchen dieser Hebel im Gleichgewicht. Wir werden dazu einige Lehren über die Elasticität der Körper benu müssen, welche wir in dem folgenden Abschnitte kennen lernen wer deren Richtigkeit wir demnach hier annehmen. Wenn wir den Hebel aus seiner Gleichgewichtslage ablenken, indem wir ihn um den Faden Axe drehen, so erteilen wir dadurch auch dem Faden eine Drehung sich selbst, eine Torsion. Der Faden sucht, sich selbst überlassen, wieder aufzudrehen und übt dadurch ein Drehungsmoment auf den H aus, den er wieder in seine Gleichgewichtslage zurückbringen will. Ne wir nun f die Kraft, welche wir in dem Abstande 1 von dem Fade einem Hebel anbringen müssen, um ihn in der abgelenkten Lage zu erh in welcher das Ende des Hebels von der Länge 1 um einen Bogen vo Länge 1 gedreht ist, so zeigt der Versuch, dafs man eine Kraft $f \cdot$ bringen mufs, um den Hebel um einen Bogen von der Länge A gedr erhalten. Die Torsionskraft des Fadens ist also proportional der Dr welche wir dem Faden erteilt haben. In dem Apparate von Cavendi also die Kraft, mit welcher die Torsion des Fadens, den um einen mit Radius 1 beschriebenen Bogen von der Länge A gedrehten Hebel zu führt, gleich einer im Abstande 1 von der Mitte angebrachten Kraft oder gleich einer Kraft $\frac{fA}{l}$ an dem Mittelpunkte der Kugel A angebr wenn wir die halbe Länge AB mit l bezeichnen.

Um die Kraft f zu messen, haben wir nur den Hebel in Beweg setzen. Wir sehen dann, dafs er in der Horizontalebene Oscillation führt, welche alle eine gleiche Zeit dauern. Auf diese Oscillat ohne weiteres unser Ausdruck für die Schwingungsdauer eines Pe

anwenden, da wir hier wie dort eine Kraft haben, welche nach den gleichen Gesetzen wirkt, deren Drehungsmoment um so kleiner wird, je näher der Hebel der Gleichgewichtslage kommt. Die das horizontale Pendel bewegende Kraft f greift im Abstande 1 von der Drehungsaxe an; in diesem Abstande ersetzt eine Masse $2ml^2$ die beiden im Abstande l befindlichen Kugeln, deren jede die Masse m hat. Wenn wir die Masse des Stabes als sehr klein vernachlässigen[1], wird somit nach § 32 die Schwingungsdauer t des Pendels:

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{2ml^2}{f}}.$$

Setzen wir anstatt $m = \frac{p}{g}$, worin p das Gewicht jeder Kugel bedeutet, und lösen unsere Gleichung nach f auf, so wird

$$f = \frac{2\pi^2 p \cdot l^2}{g \cdot t^2}.$$

Sind demnach p und l bekannt, so bedarf es, um die Gröfse der Kraft f zu messen, nur den Hebel in Schwingungen zu versetzen und die Schwingungsdauer zu beobachten. Kennt man f, so kann man leicht die Gröfse der Kraft erhalten, die an A anzubringen ist, um den Hebel im Gleichgewicht zu halten, wenn man ihn um irgend einen Bogen aus seiner ursprünglichen Lage, in welcher der Draht ohne Torsion ist, gedreht hat. Sei er z. B. so gedreht, dafs statt des Teilstriches o der Teilung CD oder $C'D'$ der Teilstrich n in der Visierlinie des Fernrohrs einsteht; ist der Abstand zweier Teilstriche gleich α, so ist der Bogen A, welchen der um die Länge 1 von der Axe entfernte Punkt durchlaufen hat,

$$A = \frac{n\alpha}{l}$$

und die an A anzubringende der Torsionskraft gleiche Kraft

$$\frac{f \cdot A}{l} = \frac{fn\alpha}{l^2},$$

oder, indem wir für f den eben gefundenen Wert einsetzen,

$$\frac{fn\alpha}{l^2} = \frac{2\pi^2\alpha}{g} \cdot \frac{pn}{t^2}.$$

Wir können diese Kraft halbieren und die eine Hälfte in A, die andere in B so angreifen lassen, dafs sie der Torsionskraft des Fadens gerade so entgegenwirken wie die eine im Punkte A angebrachte Kraft f; auch dann ist das System im Gleichgewicht. Bezeichnen wir jede dieser Hälften mit F, so ist

$$F = \frac{\pi^2\alpha}{g} \cdot \frac{pn}{t^2}.$$

In dem Apparate von Cavendish war die Konstante $\frac{\pi^2\alpha}{g} = \frac{1}{818}$, so dafs demnach

$$F = \frac{1}{818} \cdot \frac{pn}{t^2}.$$

[1]) Genauer würde man in der § 32 angedeuteten Weise das Trägheitsmoment des ganzen Horizontalpendels bestimmen. Den vollständigen Beweis für die Richtigkeit der oben durchgeführten Rechnung liefert § 51.

Wenn also durch Drehung des Hebels dem Faden eine Torsion erteilt ist, so wird durch die Torsionskraft dem System ein Drehungsmoment erteilt, welches es in die Gleichgewichtslage zurückzudrehen strebt, und welches gleich ist dem Drehungsmomente, welches zwei Kräfte ihm erteilen würden, deren eine an A, deren andere an B angebracht ist, und deren jede die Gröfse $F = \frac{1}{818} \cdot \frac{pn}{t^2}$ besitzt. Kennt man daher das Gewicht p und hat die Anzahl Teilstriche n, um welche das System gedreht ist, mittels der Fernrohre beobachtet und früher die Schwingungsdauer t bestimmt, so kann man diese Kräfte durch Rechnung erhalten.

Es befinden sich an dem Apparate von Cavendish zwei grofse Bleikugeln M und N, jede 158 Kilogramm schwer. Dieselben sind an den Enden eines drehbaren Stabes befestigt, der von aufsen gedreht wird, ohne dafs der Beobachter in das zu den Versuchen bestimmte Zimmer eintritt. Man kann den Stab senkrecht zu AB stellen und ihm die Lage MN und $M'N'$ geben, die symmetrisch sind zu der Gleichgewichtslage von AB, und in denen der Stab festgestellt werden kann. Sind die Kugeln in der ersten Lage, so afficieren sie den Hebel nicht; beide Kugeln ziehen sowohl A als B ganz gleichmäfsig an und können ihnen daher keine Bewegung erteilen. Der Beobachter liest die Stellung der Teilung ab und notiert sie als die Gleichgewichtslage des Hebels. Darauf bringt man die Kugel in die Lage MN. Jetzt zieht M die Kugel A und N die Kugel B an; der Hebel dreht sich und erreicht eine zweite Gleichgewichtslage, wenn die Anziehung von M auf A und N auf B gleich ist den Kräften F, mit denen die Torsionskraft des Fadens den Hebel zurückzudrehen sucht. Man beobachtet mit Hülfe der Fernrohre die Anzahl n der Teilstriche, um welche die Kugeln A und B abgelenkt sind, und berechnet dann die beiden Kräfte F oder die diesen gleichen Anziehungen der grofsen Kugeln auf A und B mittels der Formel

$$F = \frac{1}{818} \cdot \frac{pn}{t^2} \cdot$$

Zur Zeit, als man die Kugeln in die Lage MN gebracht hatte, war der Abstand der Mittelpunkte von A und M oder B und N gleich D. Ist in der neuen Lage das Gleichgewicht eingetreten, so ist der Abstand dann $D' = D - n\alpha$. Ist D' bestimmt, so kennen wir die zwischen den Kugeln thätigen anziehenden Kräfte F und den Abstand D' der Schwerpunkte der Kugeln, in dem diese Kräfte wirksam sind. Darauf macht man noch eine zweite Messung, indem man die Kugeln in die Lage $M'N'$ bringt, und nimmt schliefslich aus den in beiden Fällen berechneten Werten von F und den beobachteten Abständen D' das Mittel, um dann folgendermafsen aus diesen Daten das Gesamtgewicht P' der Erde und ihre mittlere Dichtigkeit zu berechnen.

Da die Anziehung der Kugel M auf A im Abstande D' gleich F ist, so würde sie in einem der Einheit gleichen Abstande $F \cdot D'^2$ sein; nennen wir andererseits die Anziehung der Gewichtseinheit auf die Kugel A in der Abstandseinheit φ, so ist die dem Gewichte P der Kugel M proportionale Anziehung der ganzen Kugel M gleich $P \cdot \varphi$. Wir haben demnach

$$F \cdot D'^2 = P \cdot \varphi.$$

Die Anziehung der Erde auf die Kugel A ist an der Oberfläche der Erde, also im Abstande R von dem anziehenden Mittelpunkt gleich dem Gewichte p dieser Kugel. Nennen wir P' das Gewicht der Erde und geben φ dieselbe Bedeutung wie vorhin, so haben wir ebenfalls

$$p \cdot R^2 = P' \cdot \varphi$$

und erhalten aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{F}{p} = \frac{P \cdot R^2}{P' \cdot D'^2},$$

und wenn wir den für F vorhin erhaltenen Wert einsetzen,

$$\frac{F}{p} = \frac{1}{818} \cdot \frac{n}{t^2} = \frac{P \cdot R^2}{P' \cdot D'^2}.$$

In dieser Gleichung sind n, t, D' durch die Beobachtung gegeben, P ist das Gewicht der Kugel $M = 158$ Kilogr., R ist der Radius der Erde, man hat daher in lauter bekannten Gröfsen für das Gewicht P' der Erde

$$P' = \frac{818 \cdot P \cdot R^2 \cdot t^2}{n \cdot D'^2}.$$

Bezeichnen wir die mittlere Dichtigkeit der Erde mit d, so ist P' gleich dem Produkte aus dem Volumen der Erde und der mittlern Dichtigkeit

$$P' = \tfrac{4}{3} \pi R^3 d$$

und demnach schliefslich

$$d = \frac{613{,}5 \cdot P t^2}{\pi R n D'^2}.$$

Wir müssen in Bezug auf die Versuche noch einen Umstand hinzufügen, den wir, um den Gang der Entwickelungen nicht zu unterbrechen, übergangen haben. Wir sahen, dafs wir, um n zu erhalten, zweimal den Stand der Teilungen CD, $C'D'$ beobachten mufsten, einmal in der Gleichgewichtslage des Stabes AB vor der Einwirkung der Kugeln, dann in der durch die Anziehung der Kugeln bedingten Gleichgewichtslage. Cavendish fand nun, dafs der Stab AB niemals in Ruhe war, sondern stets um die Gleichgewichtslage, welche er hätte einnehmen müssen, Schwingungen vollführte. Man konnte daher die Stellung des Stabes in der Gleichgewichtslage nicht direkt bestimmen, sondern nur, indem man das Mittel aus den äufsersten Lagen nahm, welche er bei diesen Schwingungen zur Rechten und Linken der Gleichgewichtslage erreichte.

Cavendish wandte zu seinen Versuchen zwei Drähte an. Bei Anwendung des ersten, sehr feinen, war die beobachtete Schwingungsdauer $t = 14$ Minuten und die Zahl n der Teilstriche, um welche der Stab nach Einwirkung der Kugeln abgelenkt wurde, $n = 16$. In dem zweiten Fälle, bei sehr viel dickerem Drahte, war $t = 7$ Minuten, $n = 5{,}7$. Mit beiden Drähten erhielt er für d den gleichen Wert

$$d = 5{,}48.$$

Die mittlere Dichtigkeit der Erde ist demnach $5\frac{1}{2}$ mal gröfser als die des Wassers.

In späterer Zeit wurden die Versuche zunächst von Reich in Freiberg wiederholt im Jahre 1837. Er fand in der letzten Berechnung dieser Ver-

suche im Jahre 1851 denselben Wert wie Cavendish $d = 5{,}49$. Später unternahm Baily zu London im Auftrage der königlichen Astronomischen Gesellschaft eine grofse Reihe von Versuchen und erhielt nach Korrektion einiger Fehler als Mittel aus mehr als 2000 Versuchen $d = 5{,}67$, also etwas gröfser wie Cavendish. Darauf bestimmte Reich 1852 nochmals den Wert von d und fand ihn gleich 5,5832. Cornu und Baille erhielten nach derselben Methode bei zwei Versuchsreihen einmal den Wert 5,56, das andere Mal 5,55.

Jolly hat das Verfahren von Cavendish in der Weise modificiert, dafs er direkt die Wage benutzte, um die Anziehung einer grofsen Masse auf eine andere zu messen. Unter der einen Wagschale der in § 39 beschriebenen Wage, auf dem Boden des Turmes wurde aus passend geformten Bleibarren eine Bleikugel von 1^{m} Durchmesser aufgebaut, so dafs der Mittelpunkt der Kugel vertikal unter dem Aufhängedraht der Wagschale sich befand. Es wurde dann genau wie in § 39 verfahren, es wurde die mit Quecksilber gefüllte Glaskugel oben abgewogen, dann die Kugel nach unten gebracht, so dafs sich ihr Mittelpunkt vertikal über dem Mittelpunkte der Bleikugel befand, und nun das Zulagegewicht bestimmt, welches erforderlich war, um die Wage wieder ins Gleichgewicht zu bringen. Dieses Zulagegewicht war gröfser als in dem § 39 betrachteten Falle, weil jetzt aufser der Vermehrung der Schwere die Anziehung der Bleikugel auf das Quecksilber zur Wirksamkeit kam. Ist r der Radius der Bleikugel, δ deren Dichtigkeit, a der Abstand des Mittelpunktes des Quecksilbers von dem Mittelpunkte der Bleikugel, so ist die Beschleunigung, welche das Quecksilber gegen den Mittelpunkt der Bleikugel erfährt,

$$\gamma_1 = \tfrac{4}{3}\,\pi f r^3 \delta\,\frac{1}{a^2}\,.$$

Für die Beschleunigung, welche das Quecksilber von der Erde erhält erhielten wir § 39

$$g' = \tfrac{4}{3}\pi f d R\left(1 - 2\,\frac{h}{R} + \frac{3\sigma' h}{2 d R}\right),$$

wenn wir jetzt entsprechend der in diesem Paragraphen gewählten Bezeichnung die mittlere Dichtigkeit der Erde mit d bezeichnen. Wie wir sahen ist der in der Klammer stehende Ausdruck, wenn wir $\sigma' = 0{,}5\,d$ setzen gleich 0,99989, wir können dafür ohne weiteres 1 setzen, da in den hi[er] zu berechnenden Decimalen der Unterschied ganz ohne Einflufs ist. Dan[n] wird

$$\frac{\gamma_1}{g'} = \frac{r^3\delta}{R d a^2} = \frac{q}{Q}\,,$$

wenn wir mit q das nach Anbringen der Bleikugel erforderliche Zulag[e]gewicht, mit Q das Gewicht des Quecksilbers bezeichnen. Damit wird

$$d = \delta\,\frac{r^3 Q}{R a^2 q}\,.$$

Die Versuche ergaben, dafs nach Anbringen der Bleikugel zur H[erstellu]ng des Gleichgewichtes $0{,}589^{\mathrm{mg}}$ mehr erforderlich waren als oh[ne] ... es ist somit

$$q = 0{,}589^{\mathrm{mg}}.$$

Wie wir § 39 bereits angaben, war

$$Q = 5009450^{\text{mg}}$$
$$R = 6365722^{\text{m}}.$$

Den Durchmesser der Bleikugel ergaben direkte Messungen zu $0,995^{\text{m}}$, somit ist

$$r = 0,4975.$$

Der Abstand a des Mittelpunktes der Quecksilberkugel von dem Mittelpunkte der Bleikugel ist gleich r plus dem Halbmesser der Quecksilberkugel plus dem Abstande der beiden Oberflächen. Ersterer war $0,0445^{\text{m}}$, letzterer $0,0266^{\text{m}}$; es ist somit

$$a = 0,5686^{\text{m}}.$$

Zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit δ der Bleikugel wurde das Gewicht der aus 115 Stücken zusammengesetzten Kugel bestimmt und durch das Volumen der Kugel dividiert. Es ergab sich in dieser Weise

$$\delta = 11,186.$$

Durch Einsetzen dieser Zahlenwerte ergibt sich

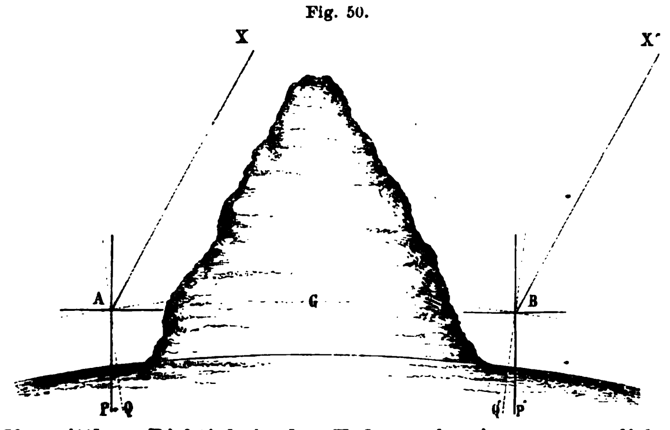
$$d = 5,692$$

mit einer Unsicherheit von $\pm$ 0,068, so dafs nach diesen Versuchen die mittlere Dichtigkeit der Erde mindestens 5,624 und höchstens 5,760 wäre. Der von Jolly erhaltene Wert ist dem von Baily erhaltenen fast gleich; als Mittel aller Versuche würde sich rund 5,6 ergeben.

§ 42.

Versuche von Maskelyne. Es gibt noch eine zweite Methode, um die Anziehung der einzelnen Teile der Erde auf Körper zu messen und

Fig. 50.



daraus die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen, nämlich die Beobachtung der Ablenkung des Lotes durch grofse Gebirgsmassen. Die ersten Versuche derart wurden von Bouguer gemacht; sie wiesen jedoch nur nach, dafs das Lot wirklich abgelenkt wird, ohne dafs sie messend ver-

folgt werden konnten. Dieses gelang zuerst Maskelyne, der an der Bergkette Shehallien in Portshire in Schottland mit grofser Sorgfalt eine Reihe von Messungen ausführte. Der Shehallien ist ein isolierter von West nach Ost sich erstreckender Gebirgszug, dessen geognostische Zusammensetzung bekannt ist, und der eine einfache Form hat. Man konnte daher sein Volumen, sein Gewicht und die Lage seines Schwerpunktes berechnen. Maskelyne wählte nun zwei Stationen A und B (Fig. 50), die nördlich und südlich von dem Berge in einer durch den Schwerpunkt desselben gehenden Ebene und auf demselben Meridiane lagen. Zunächst wurde die Polhöhe beider Orte bestimmt. Wenn der Gebirgszug nicht vorhanden gewesen wäre, so hätten die beiden Lote AP und BP' einen Winkel mit einander gebildet, der gleich der Breitendifferenz der beiden Orte ist. Die Anziehung der zwischen beiden Orten liegenden Gebirgsmassen bewirkt nun, dafs die Richtung der Lote AQ und BQ' wird, oder dafs die Richtung der Horizontalen gegen den Berg hin sich erhebt und die Polhöhe in B vermehrt, in A vermindert ist. Man mifst daher die Polhöhe und leitet daraus für jede Station die Ablenkung des Lotes her, indem man von dem Unterschiede der Polhöhen die vorher bestimmte Breitendifferenz abzieht.

Fig. 51.

Wirkt nun an einer der Stationen (Fig. 51) z. B. A die Anziehung der Erde nach AO mit einer Kraft gleich $\frac{P'\varphi}{R^2}$, so wirkt daneben die Anziehung des Berges in der Richtung AG, die wir als horizontal voraussetzen, mit einer Kraft gleich $\frac{P\cdot\varphi}{D^2}$, wenn wir mit P das Gewicht des Berges und mit D den Abstand seines Schwerpunktes vom Orte A bezeichnen. Das Lot ist demnach von zwei auf einander senkrechten Kräften angegriffen, es wird sich in die Richtung des Resultierenden AC stellen und mit OA einen Winkel α bilden, der gleich ist der beobachteten Ablenkung des Lotes. Man hat daher

$$\frac{P'\varphi}{R^2} : \frac{P\varphi}{D^2} = AB : CB, \quad \frac{CB}{AB} = \text{tang}\,\alpha$$

und daher

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\frac{P}{D^2}}{\frac{P'}{R^2}} = \frac{PR^2}{P'D^2}.$$

Setzen wir wieder

$$P' = \tfrac{4}{3} R^3 \pi d,$$

so wird

$$d = \frac{0{,}75\,P}{\pi R\cdot D^2}\cdot\frac{1}{\text{tang}\,\alpha}.$$

Maskelyne erhielt aus dem von Hutton bestimmten Gewicht P des Berges und dem Abstande D des Schwerpunktes vom Pendel für d eine Zahl, die nahe gleich 5 war, ein Resultat, welches die Versuche von Cavendish und Reich bestätigt, da auf diese Weise nicht die Genauigkeit erreicht werden kann, wie nach der vorigen Methode.

§ 43.

Methode von Airy. Noch eine dritte Methode gibt es, um den Nach-eis der Massenanziehung an den einzelnen Teilen der Erde zu liefern und ie Dichtigkeit der Erde zu bestimmen, welche der englische Astronom Airy ngewandt hat. Dieselbe beruht darauf, dafs der Wert der Beschleunigung in anderer wird, wenn man unter die Erdoberfläche hinabsteigt. Um zu ibersehen, in welcher Weise diese Veränderung von g stattfindet, denken rir uns die Erde zerlegt in eine Kugelschale von der Dicke x, der Tiefe ler durchsunkenen Schicht, und eine Kugel vom Radius $R_1 = R - x$.

Auf einen an der Oberfläche befindlichen Körper wirkt nun sowohl die Anziehung der innern Kugel als auch der Kugelschale gerade so, als wäre lie Masse beider im Mittelpunkte vereinigt, also so, als befände sich die Masse M_1 der innern Kugel und die Masse M_2 der Schale im Abstande R von dem angezogenen Körper.

Anders jedoch, wenn wir uns auf die Oberfläche der Kugel mit dem Radius R_1 begeben, also die Schicht x hinabsteigen. Die Kugel mit dem Radius R_1 wirkt nach dem Anziehungsgesetz, da der Körper sich aufserhalb lerselben befindet, so, als wäre ihre ganze Masse M_1 im Mittelpunkte, also in ler Entfernung R_1 vom angezogenen Körper vereinigt. Die Anziehung der Kugelschale x mufs aber eine andere sein, da der Körper sich im Innern derselben befindet. Wir können nun leicht nachweisen, dafs eine Hohlkugel auf einen in ihrem Innern befindlichen Körper gar keine Anziehung ausübt, wenn lie Schale aus homogenen konzentrischen Schichten besteht; und daraus folgt lann, dafs in der Tiefe x unter der Erdoberfläche auf den Körper nur die Masse ler innern Kugel aus der ihrem Radius gleichen Entfernung R_1 einwirkt.

Stelle, um diesen Nachweis zu führen, der Kreis (Fig. 52) einen Durchschnitt durch eine dünne Schicht der Kugelschale vor, und der Punkt P liege im Innern derselben, im Abstande a vom Mittelpunkte. Legen wir nun gerade wie in § 39 durch die Kugelschale zwei zu CP senkrechte unendlich nahe Schnitte MM_1 und NN_1, so erhalten wir für die Anziehung dieser Kugelzone auf den Punkt P, indem wir genau dieselbe Entwicklung wie in § 39 anwenden, auch identisch denselben Ausdruck, nämlich, unter Benutzung derselben Zeichen,

Fig. 52.

$$f \cdot \frac{\varkappa \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma m}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Um die Anziehung der ganzen Kugelschale zu erhalten, müssen wir auch in diesem Ausdrucke für e alle möglichen Werte einsetzen und die Summe aller einzelnen Ausdrücke bilden. Die äufsersten Werte, welche e annehmen kann, sind aber hier nicht $a - r$ und $a + r$, sondern $PO = r - a$ und $PQ = r + a$. Summieren wir nun genau so wie im § 39, so wird damit die Summe jetzt

$$\int_{r-a}^{r+a}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de = (r + a) - (r - a) + \left(\frac{a^2 - r^2}{r - a} - \frac{a^2 - r^2}{r + a}\right) = 0.$$

Da diese Summe gleich Null ist, so folgt also, dafs eine solche Schicht auf einen in ihrem Innern liegenden Punkt gar keine Anziehung ausübt, und damit, dafs überhaupt eine aus konzentrischen homogenen Schichten bestehende Kugelschale einen in ihrem Innern liegenden Punkt gar nicht anzieht.

Es folgt somit, dafs der in der Tiefe x unter der Erdoberfläche befindliche Körper nur von der innern Kugel, deren Radius $R_1 = R - x$ ist, angezogen wird. Suchen wir nun zunächst, wie sich die Beschleunigungen in der Tiefe und an der Erdoberfläche verhalten müssen.

Die Beschleunigung, welche die innere Kugel an ihrer Oberfläche erteilt, sei g_1. Die Beschleunigung an der Erdoberfläche ist dann gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die innere Kugel an der Erdoberfläche, also im Abstande R von dem anziehenden Mittelpunkte erteilt, und welche die Kugelschale von der Dicke $x = R - R_1$ an ihrer Oberfläche erteilt.

Die Beschleunigung g'_1, welche die innere Kugel an der Erdoberfläche erteilt, ist nach dem Anziehungsgesetz

$$g'_1 = g_1 \cdot \frac{R_1^2}{R^2}.$$

Bezeichnen wir die Beschleunigung an der Erdoberfläche wie immer mit g, so gibt uns die Differenz

$$g - g'_1$$

die Anziehung, welche die äufsere Schale allein auf einen an ihrer äufsern Oberfläche befindlichen Körper ausübt.

Die Anziehungen der äufsern Schale sowohl als des innern Kernes geschehen so, als wären die ganzen Massen in ihrem Mittelpunkte vereinigt; sie sind daher proportional diesen Massen selbst oder den Produkten aus deren Volumen V und V_1 und ihren Dichtigkeiten D und D_1. Wir haben demnach

$$g - g'_1 : g'_1 = VD : V_1 D_1$$

und, indem wir für g'_1 seinen Wert einsetzen,

$$\frac{g - g_1 \frac{R_1^2}{R^2}}{g_1 \frac{R_1^2}{R^2}} = \frac{VD}{V_1 D_1} = \frac{\frac{4}{3}(R^3 - R_1^3)\pi D}{\frac{4}{3} R_1^3 \pi D_1} = \frac{R^3 - R_1^3}{R_1^3} \cdot \frac{D}{D_1}$$

$$\frac{g R^2 - g_1 R_1^2}{g_1 R_1^2} = \frac{R^3 - R_1^3}{R_1^3} \cdot \frac{D}{D_1},$$

ein Ausdruck, den man leicht auf die Form

$$\frac{g}{g_1} = \frac{R_1^2}{R^2} + \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 R_1} \cdot \frac{D}{D_1} = \frac{R_1^2}{R^2}\left\{1 + \left(\frac{R^3}{R_1^3} - 1\right)\frac{D}{D_1}\right\}$$

bringen kann, und der zu erkennen gibt, dafs das Verhältnis der Beschleunigung an der Oberfläche und in der Tiefe abhängig ist von dem Verhältnis der Dichten der äufsern Schale und in der Tiefe. Derselbe zeigt aber gleichzeitig, dafs wenn man g_1, R_1 und D beobachtet, D_1 sich berechnen läfst.

Hierauf gestützt, stellte Airy zwei Pendel auf, eines an der Erdoberfläche, eines auf dem Boden des Bergwerkes von Harton in einer Tiefe von 383 Meter. Jedes war, wie bei den Bordaschen Versuchen, vor einer

astronomischen Uhr aufgehängt. Man beobachtete die Oscillationen mittels der Methode der Koincidenzen und bestimmte ihre Dauer durch die Angaben der Uhr. Wenn nun aber die Veränderung der Schwere die Dauer einer Oscillation des Pendels verändert, so ist klar, dafs sie auch den Gang der Uhr ändert. Es war deshalb notwendig, den Gang der untern Uhr mit dem der obern zu vergleichen; das geschah mittels elektrischer Signale, welche sich augenblicklich fortpflanzten, und durch die man die Zeitangabe der untern Uhr korrigierte.

Die Beobachtung ergab, dafs die Beschleunigung durch die Schwere auf dem Boden des Bergwerkes $\frac{1}{19190}$ gröfser war, oder dafs

$$\frac{g_1}{g} = 1{,}000052$$

war, ein Resultat, aus welchem sich ergibt, dafs D_1 bedeutend gröfser sein mufs als D. Denn wäre das nicht der Fall, so müfste die Schwere in der Tiefe kleiner werden, wäre etwa $D = D_1$, so ergibt sich

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R_1}{R};$$

die Schwere müfste in demselben Verhältnisse abnehmen, als der Radius der innern Kugel kleiner ist wie der Radius der Erde.

Indem man den Inhalt des Bodens über dem Schachte untersucht, erhält man die mittlere Dichtigkeit der Schale in der Nähe des Ortes, wo die Versuche angestellt wurden. Dieselbe ergab sich zu 2,75. Airy setzt nun diese Dichtigkeit als die mittlere Dichtigkeit der Kugelschale ein, was man ohne merklichen Fehler thun darf, wenn auch die Kugelschale nicht vollständig homogen ist, da die nähern Massen vorwiegend einwirken. Die Bestimmungen Airys ergaben ferner, dafs, die Tiefe des Hartoner Schachtes gleich 1 gesetzt,

$$R = 16621{,}7 \text{ und deshalb } R_1 = 16620{,}7.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung für D_1 ein, so erhält man

$$D_1 = 6{,}566,$$

so dafs also die Dichtigkeit des innern Kernes, oder da die Masse der obern Schale gegen die des innern Kernes verschwindend klein ist, die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr 6,5 mal so grofs als die des Wassers wäre.

Gegen die Berechnung Airys hat Haughton den Einwurf gemacht, dafs Airy die Dichtigkeit der Erdrinde erheblich zu hoch genommen habe, da der gröfsere Teil des Harton-Schachtes unter dem Niveau des Meeres liege, er leitet deshalb als mittlere zur Berechnung in Betracht zu ziehende Dichtigkeit der Erdrinde die Zahl 2,059 ab. Mit dieser Zahl ergibt sich

$$D_1 = 5{,}480,$$

also dem mit der Drehwage und dem von Jolly gefundenen Werte sehr nahe gleich.

Nehmen wir für die Dichtigkeit der Erde das Mittel aus den gefundenen Zahlen oder rund 5,6, so sind wir dadurch schliefslich imstande, die Anziehungen zu berechnen, welche zwei der Einheit gleiche Massen auf einander aus der Einheit der Entfernung ausüben. Bezeichnen wir die

Masse der Erde mit M, so gibt uns das Anziehungsgesetz für die Zahl g die Gleichung

$$g = f \cdot \frac{M}{R^2},$$

worin f wie früher die Anziehung der beiden Masseneinheiten aus der Entfernungseinheit bedeutet; demnach ist

$$f = g \cdot \frac{R^2}{M},$$

oder, indem wir für M seinen Wert setzen,

$$f = g \cdot \frac{R^2}{\frac{4}{3} R^3 \pi \cdot d} = 0{,}75 \cdot g \cdot \frac{1}{R \pi d}.$$

Hierin ist d die Masse der Volumeinheit, somit wenn wir die Länge in Metern einführen, die Masse eines Kubikmeters. Da das Kubikmeter 1000 Kubikdecimeter hat und wir die Dichtigkeit der Erde gleich 5,6 setzen, so wird $d = \frac{5600}{g}$; $R\pi$ ist der halbe Umfang der Erde, somit gleich 20 000 000. Für g setzen wir den der Breite 45^0 entsprechenden Wert unter der Voraussetzung, dafs die Erde nicht rotiert, dann wird mit $g = 9{,}82236$

$$f = \frac{0{,}75 \cdot g^2}{R\pi \cdot 5600} = 0{,}000\,000\,000\,646 = 6{,}46 \cdot 10^{-10}.$$

Die Zahl gibt uns in Metern die Beschleunigung, welche zwei Massen von je g Kilogramm im Abstande von 1 Meter einander erteilen, oder in Kilogrammen den Zug, den diese Massen auf einander ausüben.

§ 44.

Ebbe und Flut. Eine wichtige Erscheinung an unserer Erdoberfläche, hervorgehend aus der allgemeinen Massenanziehung und zwar aus der Anziehung des Mondes und der Sonne, ist das täglich zweimalige Steigen und Fallen des Wassers in den grofsen Meeren. Wir müssen uns hier begnügen, die Erscheinung in ihren Grundzügen zu erklären.

Die Anziehung, welche der Mond auf die verschiedenen Punkte der Erde ausübt, ist verschieden, da dieselben von dem Monde verschieden entfernt sind. Ziehen wir z. B. durch den Mittelpunkt der Erde eine gerade Linie gegen den Mond, so ist der Mittelpunkt der Erde von dem des Mondes um 60, der Punkt, in welchem die dem Monde zugewandte Erdhälfte von der Geraden getroffen wird, um 59, der entsprechende Punkt auf der abgewandten Erdhälfte 61 Erdradien entfernt. Nennen wir die Anziehung des Mondes auf die Masseneinheit in der Entfernungseinheit f, den Abstand des Erdmittelpunktes vom Monde d und den Radius der Erde R, so erhalten wir für die Anziehung auf jene drei Punkte respektive

$$\frac{f}{d^2} \cdot \cdot \frac{f}{(d-R)^2} \cdot \cdot \cdot \frac{f}{(d+R)^2}$$

und als die Differenzen zwischen den beiden letzten und der ersten Gröfse

$$\pm \frac{2f \cdot R}{d^3},$$

wenn wir die Glieder der Differenzen, in denen höhere Potenzen von d als die dritte vorkommen, vernachlässigen. Um diese Gröfse wird also der dem Monde zugewandte Punkt der Erdoberfläche stärker, der vom Monde abgewandte Punkt schwächer angezogen als der Mittelpunkt der Erde.

Wäre die ganze Erde fest, kein Punkt derselben gegen die anderen verschiebbar, so würden diese Differenzen durch die festen Verbindungen so übertragen werden, dafs dadurch nur ein Zug auf den Mittelpunkt der Erde entstände. Nun ist aber ein grofser Teil der Erde mit Wasser bedeckt, dessen einzelne Teile gegen einander und gegen die festen Teile der Erde frei beweglich sind. Das Wasser wird daher infolge dieser verschiedenen Anziehungen eine Bewegung annehmen müssen, und zwar wird es, wenn jene Linie zum Beispiel die Erdoberfläche an beiden Punkten im Meere schneidet, sich an beiden Punkten erheben und dafür an den zwischenliegenden fallen müssen. Da nämlich an der dem Monde zugewandten Seite das Wasser stärker, an der vom Monde abgewandten Seite schwächer angezogen wird als der Mittelpunkt der Erde, so ist das gerade so, als wenn an beiden Punkten eine der Schwere entgegengesetzte Kraft von der Gröfse jener Differenz angebracht wäre, wie sich leicht durch folgende Betrachtung anschaulich machen läfst

Man habe drei Punkte A, C, B; die Punkte A und B werden jeder durch eine Kraft gleich 10, um ein Zahlenbeispiel zu wählen, gegen C hingezogen. Nun seien ferner an den drei Punkten nach gleicher Richtung, z. B. nach rechts hin, folgende Kräfte angebracht: an B die Kraft 3, an C die Kraft 2 und an A die Kraft 1. Diese Punkte befinden sich gewissermafsen in denselben Verhältnissen wie unsere vorhin betrachteten Punkte auf der Erde. In dem Verhältnis der drei Punkte zu einander wird nun nichts geändert, wenn wir von jedem derselben die nach rechts hin ziehende Kraft 2 fortnehmen. Dadurch ist der Punkt C wieder wie anfangs von keiner Kraft afficiert. Am Punkte B bleibt aber die Kraft 1 nach rechts hin, also vom Punkt C fortziehend übrig. An A zog ursprünglich die Kraft 10 gegen C nach rechts, es trat dann noch die Kraft 1 hinzu, später aber nahmen wir die Kraft 2 wieder fort; es bleibt also nur die Kraft 9 nach C hinziehend übrig, oder da wir uns statt der Kraft 9 die Kraft 10 nach C hin und die Kraft 1 von C fortziehend denken können, so folgt, dafs durch Anbringen jener Kräfte auch bei A gleichsam eine von C fortziehende Kraft entsteht, welche gleich ist der Differenz der von C und A nach rechts hin wirkenden Kräfte.

So also auch bei der Erde. Durch Anziehung des Mondes entsteht an den unter dem Monde und den ihm gegenüber an der andern Seite der Erde liegenden Punkten gleichsam eine das Wasser vom Mittelpunkte der Erde fortziehende Kraft.

Das Wasser mufs also dort steigen und dafür an den mitten zwischen beiden liegenden Punkten der Erde fallen. Dadurch müssen also zwei, an diametral gegenüberliegenden Stellen der Erde sich bildende Flutwellen entstehen, deren jede, da die Erde sich in 24 Stunden von Westen nach Osten um ihre Axe dreht, die Erde in 24 Stunden von Osten nach Westen umkreisen mufs.

In den Meeren mufs also täglich zweimal Flut und Ebbe entstehen, da sie jeden Tag den Mond einmal im Zenith, einmal im Nadir haben.

Wegen der Eigenbewegung des Mondes in seiner Bahn jedoch, wodurch der Durchgang durch einen bestimmten Meridian täglich um 50 Minuten verzögert wird, verzögert sich auch der Eintritt von Ebbe und Flut jeden Tag um ebensoviel.

Ebenso wie der Mond erzeugt auch die Sonne Ebbe und Flut, jedoch viel schwächer, wie man sofort erkennt, wenn man in unsern Ausdruck $\frac{2fR}{d^3}$, der uns die von dem Mittelpunkte fortziehende Kraft angibt, die der Sonne entsprechenden Gröfsen einsetzt. Bezeichnet M die Masse der Sonne und m die Masse des Mondes, so haben wir statt f der Anziehung des Mondes in der Abstandseinheit $f \cdot \frac{M}{m}$ zu setzen, und anstatt d die Entfernung der Sonne von der Erde $d' = 400\,d$, da die Sonne 400mal weiter von uns entfernt ist als der Mond. Die Masse der Sonne M ist 355 000mal gröfser als die Erde und die der Erde gleich 88 m, also 88mal gröfser als die des Mondes. Wir haben demnach für die Differenz der Sonnenanziehung

$$\frac{2fR \cdot 355\,000 \cdot 88}{d^3 \cdot 400^3},$$

also ungefähr die Hälfte des Unterschiedes der Mondanziehung auf die entsprechenden Punkte der Erde. Die Sonnenflut wird daher auch nur die halbe Höhe der Mondflut haben. Durch die vereinte Wirkung von Sonne und Mond wird nun die Fluthöhe entweder vergröfsert oder verkleinert. Stehen Sonne und Mond an der gleichen Seite der Erde, zur Zeit des Neumondes, oder an der entgegengesetzten, zur Zeit des Vollmondes, so verstärken sie die Fluten, es treten die sogenannten Springfluten ein. Zur Zeit der Quadraturen, also des ersten und letzten Viertels tritt Sonnenflut und Mondebbe an der gleichen Stelle auf und umgekehrt; die Fluten sind dann als Nippfluten die kleinsten.

Durch die verschiedenen Tiefen des Meeres und die Konfiguration des Festlandes wird der Verlauf der Fluten sowie das Gesetz ihrer Änderung ein äufserst verwickeltes, welches jedoch La Place in grofser Vollständigkeit gelöst hat. Wir müssen uns hier begnügen, darauf hingewiesen zu haben.

Litteratur des ersten Abschnittes.

Die bisher vorgetragenen Lehren sind gröfstenteils so vielfach behandelt und in vortrefflichen Werken zusammengestellt, dafs eine Angabe der Originalquellen teils zu weit führen würde, teils nur ein geschichtliches Interesse hat. Wir verweisen daher in Betreff der genauern Kenntnis der einzelnen Lehren auf die vielen vorzüglichen Lehrbücher der Mechanik, von denen wir folgende namhaft machen.

1. *Brix, A. F.*, Lehrbuch der Statik fester Körper. Berlin, 1849.
2. *Broch, O. J.*, Lehrbuch der Mechanik. Berlin und Christiania, 1854.
3. *Burg, A.*, Kompendium der populären Mechanik und Maschinenlehre. 2. A. Wien, 1849.
4. *Delaunay, Ch.*, Cours de Mécanique rationelle. 2. éd. Paris, 1857.
5. *Duhamel*, Lehrbuch der analytischen Mechanik. Deutsch v. Dr. *O. Schlömilch*. 2. A. Leipzig, 1858.

6. *C. G. J. Jacobi*, Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von *Clebsch.* Berlin, 1866.
7. *Jolly*, *Ph.*, Principien der Mechanik. Stuttgart, 1852.
8. *Möbius*, *A. F.*, Lehrbuch der Statik. Leipzig, 1837.
9. *Poinsot*, *L.*, Eléments de statique. 9. éd. Paris, 1848.
10. *Poisson*, *S. D.*, Traité de Mécanique. 2. éd. Paris, 1833.
11. *Redtenbacher*, Principien der Mechanik und des Maschinenbaues. Mannheim, 1852.
12. *Jullien*, *M.*, Problèmes de Mécanique rationelle. Paris, 1855.
13. *Schell*, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig, 1870.

Des geschichtlichen Interesses wegen sei es jedoch gestattet, die Autoren und Quellen vorzuführen, von denen die verschiedenen wichtigsten Lehren zuerst vorgetragen sind. Daran schliefsen wir dann eine Angabe der Litteratur der neueren Gegenstände, besonders der Lehren über Erhaltung der Rotations- und Schwingungsebene, die in neuerer Zeit durch den *Foucault*schen Versuch die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben, sowie über die Bestimmungen von g und der Dichtigkeit der Erde.

Zum ersten Kapitel bemerken wir, dafs die Fallgesetze von *Galilei* erkannt und in seinen:

„Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali. Leiden, 1638."

vollständig vorgetragen sind.

Die allgemeinen Folgerungen aus diesen Gesetzen zog zuerst *Isaak Newton.* Er legte sie in seinem Werke:

„Philosophiae naturalis principia mathematica. Lond., 1687."

der Behandlung der Lehre von den Bewegungen und Kräften zu Grunde. Die drei Principien, welche er anwandte, sind

1) das Princip der Trägheit, nur äufsere Kräfte ändern den Bewegungszustand eines Körpers,

2) dafs die Änderung der Bewegung proportional sei der wirkenden Kraft,

3) das von uns § 11 erläuterte Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Unsere im § 11 aus der Gleichung für die Bewegung einer konstant wirkenden Kraft abgeleiteten Gleichungen $Mv = Pt$ und $\frac{1}{2} Mv^2 = Ps$, wurden die erstere von *Cartesius* in seinen Principiis philosophiae abgeleitet und dabei das Produkt Mv als das Mafs der bewegenden Kraft aufgestellt; die zweite entwickelte *Leibnitz* und glaubte seinerseits das Produkt Mv^2 als Mafs der bewegenden Kraft dem *Cartes*ischen gegenüberstellen zu müssen:

„Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum. Acta eruditorum. Leipzig, 1686, März."

Daran knüpfte sich ein langer Streit, der vorzugsweise in den Actis eruditorum geführt wurde.

D'Alembert wies dann 1743 in seinem Traité de dynamique nach, wie der ganze Streit nur ein Wortstreit sei und durch eine präcisere Begriffsfassung erledigt werde.

Die im zweiten Kapitel vorgetragenen Sätze über die statischen Momente und den Schwerpunkt rühren ursprünglich schon von Archimedes her:

„Archimedes von Syracus vorhandene Werke aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen versehen von *Ernst Nizze.* Stralsund, 1824."

Theoretische Beweise für das Hebelgesetz gaben zuerst *Cartesius* und *Newton*, ersterer im Tractatus de mechanica in den opusculis postumis Amstellod. 1701. Letzterer in den Principiis liber I. Leges motus, lex III.

Die Theorie der Wage wurde zuerst vollständig entwickelt von *Leonhard Euler* in den Kommentarien der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Petersburg. Tom. X.

Die Pendelgesetze wurden zum Teil schon von *Galilei* entwickelt, nämlich, dafs Pendel von gleicher Länge in gleichen Zeiten ihre Schwingungen vollführen, auch wenn die Gewichte ungleich sind, und dafs bei ungleich langen Pendellängen sich die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten.

Huyghens baute dann in seinem Werke:

„Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae. Paris, 1673."

die Theorie weiter aus und fügte die Sätze hinzu, dafs nur unendlich kleine Schwingungen genau isochron sind, und dafs die Dauer eines Hin- und Herganges des Pendels sich zur Dauer des freien Falles durch die doppelte Pendellänge verhalte wie die Peripherien eines Kreises zu seinem Durchmesser, also

$$t : 2\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi : 1,$$

woraus dann die Zeitdauer einer Schwingung, wie wir sie gefafst haben, die einmalige Zurücklegung des Bogens hervorgeht.

Von *Huyghens* rührt die Unterscheidung des einfachen und zusammengesetzten Pendels und die Zurückführung des letztern auf das erstere her, wie wir sie vorgetragen haben.

Die erste Bestimmung von g mittels des Pendels machte *Huyghens*, er fand g = 15 Fufs und 1 Zoll.

Die von uns mitgeteilte Methode von *Borda* befindet sich in

„Base du Système Métrique etc. redigée par M. Delambre. Tome III. pag. 337. Paris, 1810."

und mit Berücksichtigung des Gewichtes des Fadens

„Biot et Arago: Recueil d'observations géodésiques astronomiques et physiques exécutées par Ordre du Bureau des Longitudes. Paris, 1821."

Die zweite Methode wurde vorgeschlagen von *Bohnenberger* in seiner Astronomie. Tübingen, 1811.

Die Ausführung von Kapt. *Kater* ist beschrieben

„Philosophical transactions of the Royal Society of London for the year 1818, p. 33 ff."

Die Gesetze der Centrifugalkraft entwickelte *Huyghens* zuerst a. a. O., und ausführlicher finden sie sich mit Beweisen in den opusculis postumis, Leyden, 1703, in einer Abhandlung de vi centrifuga, p. 401 sq.

Auf die Erhaltung der Rotationsebene machte *Bohnenberger* bei Bekanntmachung seines Apparates aufmerksam. *Gilbert*, Annalen, Bd. 60, p. 60.

In neuerer Zeit ist die Litteratur über diesen Gegenstand sehr bedeutend angeschwollen, seit *Foucault* diese Eigenschaft der rotierenden Körper zum Beweise der Axendrehung der Erde vorschlug. Man sehe unter andern außer in den Werken über Mechanik, über die freien Axen

Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Liouville Journal de mathématiques 1851. (*Poinsot*, neue Theorie der Drehung der Körper, übersetzt von *Schellbach*. Berlin, 1851.)

L. Foucault, Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la terre fondée sur la fixeté du plan de rotation. Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. XXXV, p. 421. Paris, 1852. Ferner C. R. XXXV. p. 424, p. 602.

Person, L'appareil de *Bohnenberger* peut servir à constater la rotation de la terre. C. R. XXXV. p. 417, 549 und 753.

J. Plücker, Über die Fesselsche Rotationsmaschine, Poggendorffs Ann. Bd. 90.

J. C. Poggendorff, Noch ein Wort über die Fesselsche Rotationsmaschine. Poggend. Annal. Bd. 90, p. 348. (Die von uns mitgeteilte Erklärung.)

G. Magnus, Verbesserte Konstruktion eines Apparates zur Erläuterung verschiedener Erscheinungen bei rotierenden Körpern. Poggend. Ann. Bd. 91.

Der Foucaultsche Pendelversuch wurde zuerst mitgeteilt in der Abhandlung von *Foucault*:

L. Foucault, Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule. C. R. XXXII. p. 135, auch Poggend. Ann. 82.

Seitdem sind eine Menge von Mitteilungen erschienen, welche teils Wiederholungen des Versuches darstellen, teils dazu dienen, das Gesetz, nach welchem sich die Dauer der Drehung unter verschiedenen Breiten ändert, zu bestimmen.

Eine vollständige Zusammenstellung der Litteratur über diesen und den vorigen Gegenstand findet sich in den Berichten über die Fortschritte der Physik dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin in den Jah

1850, 1851, Berlin 1855, 1852, Berlin 1855, 1853, Berlin 1856 u. s. f., in dem Abschnitt über Mechanik, Foucaultsche Versuche.

Die im dritten Kapitel vorgetragenen Lehren über die allgemeine Attraktion hat *Newton* in dem bereits erwähnten Werke Principia etc. entwickelt.

Die drei *Kepplerschen* Gesetze, auf welche *Newton* seine Entwicklungen stützte, teilte *Keppler* mit, die beiden ersten 1609 in seiner Astronomia nova αἰτιολογητός, sive physica coelestis tradita commentariis de motu stellae Martis, Pragae 1609; das dritte, welches er am 15. Mai 1618 auffand, in Epitome astronomiae Copernicanae, Lincii 1618.

Die Verschiedenheit von g an verschiedenen Orten der Erde behauptete *Newton* zuerst, und der französische Astronom *Richer* zeigte 1670, daſs das Sekundenpendel in Cayenne unter 5° *N. B.* 1,25 Linien kürzer sei als in Paris.

Die genauern Messungen von g sind zusammengestellt in *Gehlers* Physikalischem Wörterbuch 2. Auflage von *Brandes, Munk, Pfaff, Littrow, Gmelin, Horner*. Bd. III. Artikel Erde p. 891 ff. Neuere Messungen unter andern von *Peters* findet man in den astronomischen Nachrichten Jahrgang 1880, von *Bruhns* in den Publikationen des königl. Preuſsischen geodätischen Instituts, Arbeiten im Jahre 1870, Leipzig bei Engelmann 1871. Man sehe auch die Besprechung der neuern Pendelmessungen von *Helmert* in der Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft Bd. XI, Heft 1.

Cavendish, Versuche über die Dichtigkeit der Erde sind mitgeteilt in den Philosophical Transactions LXXXVIII, auch Gilbert Annalen Bd. II.

Reich, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mit der Drehwage. Freiberg, 1838.

Baily, Experiments with the Torsion Rod for determining the mean density of the Earth. Vol. XIV. of the Mem. of the Royal Astron. Society. London, 1843. Unter demselben Titel auch besonders erschienen.

Reich, Abhandlungen der mathematisch-physik. Klasse der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1. Bd. 1852.

Cornu und *Baille* C. R. LXXVI. p. 954.

Jolly, Abhandl. der Münchener Akad. Bd. XIV. II. Abtl.

Maskelyne und *Hutton*, Philosoph. Transact. 1775 und 1778.

Airy, Philosoph. Transact. 1856.

Die Erklärung von Ebbe und Flut gab zuerst *Newton* in seinen Principiis phil. nat. lib. I. prop. 66 und lib. III. prop. 24. 36. 37.

Vollständig ausgeführt ist sie von *Laplace*, Mécanique céléste livre IV. u. XIII.

Man sehe *Gehlers* Physik. Wörterbuch 2. Auflage Bd. III. Artikel „Ebbe und Flut".

Zweiter Abschnitt.

Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Teilen.

Erstes Kapitel.

Von den festen Körpern.

§ 45.

Beschaffenheit der Materie. Bei unsern bisherigen Untersuchungen über die Wirkung von Kräften auf die Körper haben wir die letztern als absolut starr angesehen, indem wir nur die Bewegungen ins Auge gefafst haben, welche die Körper als solche unter der Wirkung der Kräfte annehmen. Untersuchen wir die Einwirkung der Kräfte auf die Körper aber genauer, so finden wir auch dann, wenn die Körper keine Bewegung annehmen, dafs dieselben durch die auf sie einwirkenden Kräfte Veränderungen erfahren. Wir sehen, dafs die festen Körper verlängert oder verkürzt und gebogen werden können, wir sehen Bewegungen in einer Flüssigkeitsmasse eintreten, kurz wir sehen, dafs die einzelnen Teile eines Körpers gegen einander verschiebbar sind.

Die Erscheinungen dieser Art, das übersieht man unmittelbar, werden aufser von den äufsern wirksamen Kräften wesentlich bedingt sein von der innern Struktur der Körper, oder was dasselbe ist, von der innern Struktur dessen, was die Körper bildet, der Materie. Ehe wir deshalb zur Untersuchung dieser Erscheinungen übergehen, wird es vorteilhaft sein zu untersuchen, ob wir nicht schon von anderer Seite her über diese Struktur der Materie einigen Aufschlufs erhalten können, der uns die Untersuchung der an den Körpern beobachteten physikalischen Erscheinungen erleichtert.

Die erste Erfahrung, welche wir in Betreff der Struktur der Körper machen, ist die Teilbarkeit derselben; es gibt keinen Körper, der nicht in Teile zerlegt, der nicht zerstückt werden kann. Diese Teilbarkeit geht so weit, dafs es nicht möglich ist, eine Grenze derselben zu erreichen oder zu bestimmen. Um sich davon zu überzeugen, genügt es an ein Beispiel zu erinnern; ein wenig Moschus verbreitet in dem Raume, in dem es aufbewahrt wird, einen sehr starken Geruch, weil es fortdauernd in denselben einen Teil seiner Substanz zerstreut; dennoch kann es lange Zeit in dem Raume gelassen werden, ohne dafs sich sein Gewicht vermindert, denn die Teilchen, welche es ausstöfst, sind so klein, dafs sie sich jeder Messung entziehen. Bei dieser grofsen Teilbarkeit kann man zwei Annahmen über die Konstitution der Materie machen; man kann annehmen, die Materie sei bis ins Unendliche teilbar, oder man komme bei fortgesetzter Teilung

schliefslich auf Teilchen, welche nicht weiter geteilt werden können, auf Atome. Macht man die letztere Annahme, so mufs die Materie aus diesen kleinsten Teilchen aufgebaut sein, die im Innern als solche existieren, sie mufs ein Aggregat dieser einzelnen Teile, dieser Atome sein, die in mehr oder weniger grofsen Abständen neben einander gelagert sind, ohne sich zu berühren, die sich anziehen oder abstofsen können, welche sich einander festhalten, wie in den festen Körpern, oder gegen einander beweglich bleiben, wie in den flüssigen oder gasförmigen Körpern.

Macht man dagegen die erstere Annahme, ist die Materie, wenn auch nur ideell, bis ins Unendliche teilbar, so können in der Materie keine discreten Teilchen als solche existieren, sondern jedes Teilchen ist nur ein Teil des Ganzen. Daraus folgt dann, dafs nach dieser Anschauungsweise die Materie den Raum eines Körpers kontinuierlich erfüllen mufs, natürlich Spalten und Poren in demselben ausgenommen. Denn sobald man innerhalb der Materie eine Diskontinuität zugibt, hat eben das für sich bestehende Teilchen eine selbständige Existenz, es ist der Baustein, aus welchem die Materie zusammengesetzt ist.

Schon die hierin gegebene Fragestellung beweist, dafs es sich hier um die Wahl einer von zwei möglichen Hypothesen über die Struktur der Materie handelt, somit auch, dafs wir bei der Entscheidung der Frage mit aller der Vorsicht verfahren müssen, welche bei der Bildung von Hypothesen angewandt werden mufs. Wir haben nach den in der Einleitung aufgestellten Principien die Hypothese zu wählen, welche die von der Struktur der Materie abhängigen Erscheinungen am einfachsten und ohne weitere Hülfshypothesen verständlich macht; die Erfahrungen der Chemie sind es, welche wir zunächst ins Auge zu fassen haben.

Wir können diese Erfahrungen in folgenden wenigen Sätzen zusammenfassen.

1. Zwei verschiedene Materien können sich zu einer dritten neuen, deren Eigenschaften von denen ihrer Bestandteile wesentlich verschieden sind, verbinden; so der brennbare Wasserstoff und der die Verbrennung unterhaltende Sauerstoff zu dem nicht brennbaren Wasser; das magnetische Metall Eisen und der brennbare Schwefel zu dem nicht magnetischen, nicht metallischen Schwefeleisen.

2. Bei dem Übergange des Gemenges zweier Materien in die Verbindung findet stets eine Änderung des Wärmezustandes, in den meisten Fällen eine Wärmeentwicklung statt. Wasserstoff und Sauerstoff verbinden sich in passenden Verhältnissen gemischt unter heftiger Explosion, und die Flamme des so mit Sauerstoff gemischten Wasserstoffs, des Knallgases, erzeugt eine der höchsten erreichbaren Temperaturen. Bei der Herstellung des Schwefeleisens kommt die ganze Masse in ein lebhaftes Glühen.

3. Die Mengenverhältnisse der einzelnen Materien, welche in eine Verbindung eingehen, sind immer dieselben. Wasserstoff und Sauerstoff treten zu Wasser immer nur in dem Verhältnis zusammen, dafs auf je ein Gewichtsteil Wasserstoff acht Gewichtsteile Sauerstoff kommen, Schwefel und Eisen zu Schwefeleisen nur so, dafs zu je einem Gewichtsteil Schwefel 1,75 Gewichtsteil Eisen treten, und so in allen Fällen.

Zwei Materien können sich in verschiedenen Verhältnissen zu neuen Materien verbinden; so kann Wasserstoff mit Sauerstoff aufser zu Wasser

noch zu einem zweiten Körper zusammentreten, zu Wasserstoffdioxyd; die Menge des Sauerstoffs, die dann zum Wasserstoff tritt, ist gerade die doppelte der im Wasser vorhandenen, auf je ein Gewichtsteil Wasserstoff kommen 16 Gewichtsteile Sauerstoff. Eine zahlreiche Reihe von Verbindungen bildet z. B. der Stickstoff mit dem Sauerstoff, die Verbindungen sind Stickoxydul, Stickoxyd, Salpetrigsäureanhydrid, Stickstofftetroxyd und Salpetersäureanhydrid. Die Gewichtsmengen Sauerstoff, welche zu je einem Gewicht Stickstoff getreten, verhalten sich in diesen Verbindungen der Reihe nach wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Im Stickoxydul tritt zur Gewichtseinheit Stickstoff $\frac{8}{14}$ Gewicht Sauerstoff, in den folgenden das Doppelte, Dreifache und so fort. Ähnlich ist es bei anderen Körpern; so liefert das Metall Mangan eine Reihe von Verbindungen, dieselben enthalten:

1) Manganoxydul . .	auf 1	Gewichtsteil	Mangan	$\frac{8}{27,5}$ ·	Sauerstoff
2) Mangansuperoxyd	„ 1	„	„	$2 \cdot \frac{8}{27,5}$	„
3) Mangansesquioxyd	„ 2	„	„	$3 \cdot \frac{8}{27,5}$	„
4) Übermangansäure	„ 2	„	„	$7 \cdot \frac{8}{27,5}$	„
5) Manganoxyduloxyd	„ 3	„	„	$4 \cdot \frac{8}{27,5}$	„

Diese und eine Menge ähnlicher Erfahrungen fafst die Chemie unter dem Gesetze der multiplen Proportionen zusammen, wonach verschiedene Verbindungen je zweier Materien dadurch entstehen, dafs die einzelnen Bestandteile nach bestimmten Gewichtsmengen oder nach einfachen Vielfachen dieser Gewichtsmengen zusammentreten.

Bezeichnen wir, um die Sauerstoffmengen und die Manganmengen, welche in den verschiedenen Verbindungen zusammentreten, durch die kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken, 55 Gewichtseinheiten Mangan mit Mn, und 16 Gewichtseinheiten Sauerstoff mit O, so können wir die sämtlichen Manganverbindungen darstellen durch

$$Mn\,O,\ Mn\,O_2,\ Mn_2\,O_3,\ Mn_2\,O_7,\ Mn_3\,O_4.$$

Ebenso können wir auch die Verbindungen des Stickstoffs mit dem Sauerstoff darstellen; bezeichnen wir die Gewichtsmenge 14 des Stickstoffs mit N, so sind die fünf Stickstoffverbindungen

$$N_2\,O,\ NO,\ N_2\,O_3,\ NO_2,\ N_2\,O_5,$$

worin auch hier das Zeichen O die Gewichtsmenge 16 Sauerstoff bezeichnet. Schliefslich lassen sich ebenso die Wasserstoffverbindungen als $H_2\,O$ und $H_2\,O_2$ bezeichnen, wenn die Gewichtsmenge 1 Wasserstoff mit H bezeichnet wird.

Bezeichnen wir ganz allgemein jene Gewichtsmenge irgend einer Materie, welche selbst oder von der ein Vielfaches mit 16 Gewichtsteilen Sauerstoff oder mit einem Vielfachen derselben zusammentritt, mit A, so können wir jede Sauerstoffverbindung darstellen durch die Formel

$$mA + n \cdot O,$$

worin m und n stets ganze und zwar nicht grofse Zahlen sind.

Diese Gewichtsmengen A sind die Mischungsgewichte der einzelnen Materien in Bezug auf Sauerstoff; die Chemie bezeichnet dieselben durch die Anfangsbuchstaben der lateinischen Namen der Elemente.

5. Die so bestimmten Mischungsgewichte haben aber noch eine weitere Bedeutung. Die verschiedenen Materien verbinden sich nicht nur mit dem Sauerstoff, sondern auch unter einander nach den beiden angegebenen Gesetzen, dem Gesetze der festen Verhältnisse und dem der multiplen Proportionen. Die Untersuchung der Gewichtsmengen, nach welchen die verschiedenen Materien zusammentreten, zeigt dann, dafs dieselben Zahlen, welche die Mischungsgewichte für die Sauerstoffverbindungen angeben, auch gelten für die Verbindung der Körper unter einander. Bedeutet S die Gewichtsmenge 32 Schwefel, so sind die Verbindungen des Schwefels mit Sauerstoff wieder $mS + nO$. Die Verbindungen des Schwefels mit Wasserstoff sind dann $mS + nH$, mit Mangan $mS + nMn$. Bedeutet das Zeichen Cl die Gewichtsmenge 35,5 Chlor, so sind die Sauerstoffverbindungen des Chlor gegeben durch $mCl + nO$. Die Verbindung des Chlors mit dem Wasserstoff ist dann HCl, die Verbindungen des Chlors mit Schwefel wieder $mCl + nS$, die des Chlors mit Mangan $mCl + nMn$, wo immer m und n ganze nicht grofse Zahlen sind. Kurz sind A und B die Mischungsgewichte irgend zweier Materien für die Sauerstoffverbindungen, so sind immer mit derselben Bedeutung von m und n, $mA + nB$ die Verbindungen dieser beiden Körper. Auch dann, wenn 3, 4 und mehrere Elemente zusammentreten, bleibt immer dieselbe Beziehung bestehen, sind A, B, C, D die Mischungsgewichte von vier Materien, so sind alle ihre Verbindungen dargestellt durch

$$m \cdot A + nB + pC + qD,$$

worin m, n, p, q ganze nicht grofse Zahlen sind.

Gehen wir dazu über, diese Erfahrungen der Chemie mit den beiden möglichen Hypothesen über die Struktur der Materie zusammenzustellen. Jene derselben haben wir als die für uns wahrscheinliche zu wählen, welche die oben experimentell gefundenen Gesetze am ungezwungensten aus sich entwickeln läfst, welche, einmal aufgestellt, dieselben als notwendige Folgerungen erkennen läfst.

Die Wahl kann uns in diesem Falle nicht schwer fallen. Ist die Materie etwas den Raum stetig Erfüllendes und nicht ein Aggregat selbständig existierender in gewissen Abständen neben einander gelagerter Atome, so ist der Vorgang der Verbindung selbst ein höchst dunkler. Die einzige Möglichkeit ist dann, dafs die Materien sich gegenseitig durchdringen; nehmen wir das aber an, warum durchdringen sich die Materien nur in ganz bestimmten, unveränderlichen Verhältnissen? Wir sehen z. B., dafs die Gewichtsmenge 14 Stickstoff mit 8, 16, 24 ·· Sauerstoff sich verbinden kann, dafs also diese Menge Stickstoff mehr wie 8 Sauerstoff aufnehmen kann, warum nun gerade nur die doppelte, dreifache etc. Menge? Besonders aber warum durchdringen sich die verschiedenen Materien gerade in dem Verhältnis, in welchem sie mit dem Sauerstoff zusammentreten? Alle diese Gesetze folgen aus dieser Hypothese über die Konstitution der Materie nicht, jedes derselben verlangt, um mit derselben in Einklang gebracht zu werden, eine neue der Materie beizulegende Eigenschaft; so die Eigenschaft,

dafs eine Materie in die andere eindringen kann, die Eigenschaft, eine ganz bestimmte Menge eingedrungener Materie, aber auch dur doppelte, dreifache Menge gesättigt zu werden u. s. f.; kurz man sieht dieser Thatsachen bedarf zu ihrem Verständnis eine besondere Eigen der Materie, die wir ihr aber lediglich infolge der beobachteten Tha beilegen. Das aber ist gerade das Charakteristische einer schlechten these, dafs sie allein nicht hinreicht, die mit ihr in Verbindung steh Thatsachen zu erklären, dafs jede neue Thatsache eine neue Hülfshyp verlangt.

Wie anders zeigt sich dagegen die zweite Hypothese; nehmen w dafs die Materie aus Atomen bestehe, so ergeben sich die beobac Thatsachen und die aus ihnen abgeleiteten Sätze als so unmittelbare F dafs man sofort diese Erscheinungen als im Wesen der Materie beg erkennt.

Zunächst ergibt sich unmittelbar, worin die Verbindung zweier K besteht, und worin sie sich von dem Gemenge unterscheidet. In de menge sind die einzelnen Materien ungeändert, jede mit ihren cha ristischen Eigenschaften enthalten, die atomistische Hypothese sag dafs der Grund der ist, dafs in einem solchen Gemenge die Atome de zelnen Materien neben einander, jedes für sich existierend, bestehen. wandelt sich das Gemenge in eine Verbindung, so treten die Atom einzelnen Materien zusammen, sie lagern sich fest an einander und exis nur mehr als verbundene Moleküle. Im Wasser existiert nicht meh Wasserstoffatom oder das Sauerstoffatom, sondern jedes Sauerstoffat mit zwei Wasserstoffatomen unauflöslich verbunden, und die Verbi dieser Atome bildet das Atom Wasser.

1) Im Augenblicke, wo diese Atome zusammentreten, mufs jed eine sehr lebhafte Bewegung derselben eintreten, indem Atom an anprallt und nun die Atome als Atomgruppen oder Moleküle weiter exist wir sehen die lebhafte Bewegung in den Wärmeerscheinungen, welch chemische Verbindung begleitet.

2) Da in der Verbindung die Atome der einzelnen Materien nicht als solche existieren, so müssen die Eigenschaften der Verbindunge andere sein als diejenigen der Materien, aus welchen sie sich bilden. da die Materie aus den Atomen aufgebaut ist, sind auch die Atom Träger der Eigenschaften, die wir an der Materie wahrnehmen; die der Verbindung sind aber ganz andere als jene der getrennten Materi müssen deshalb auch ihre Eigenschaften und somit auch die der Verbi ganz andere sein als die der Bestandteile.

3) Die Atome der einzelnen Materien haben eine unveränderliche und ein festbestimmtes Gewicht, welches für die verschiedenen Ma verschieden ist. Wenn nun in einer Verbindung je ein Atom der Materie sich an je ein Atom der andern anlegt, oder wenn sich je *m* der einen an je *n* Atome der andern anlegen, so ist damit auch da hältnis der Gewichte, in welchem die Materien in eine Verbindun gehen, ein ganz festes und bestimmtes; es mufs entweder das Verl der Gewichte der einzelnen Atome selbst, oder das Verhältnis der Ge von *m* Atomen der einen zu *n* Atomen der andern Materie sein. D perimentell bewiesene Gesetz der Verbindung nach festen Verhältnis

der thatsächliche Ausdruck dieser aus der Struktur der Materie gezogenen Folgerungen.

4) Ebenso folgt unmittelbar das Gesetz der multiplen Proportionen. In einer Verbindung können die Materien Atom für Atom zusammentreten, es können aber auch mit je einem Atom der einen 2, 3, 4 · · n Atome der andern zusammentreten oder auch 2, 3 · · · m Atome der einen mit n Atomen der andern, wo aber m und n, da die Atome nicht teilbar sind, immer ganze Zahlen sein müssen. Das ist aber das Gesetz der multiplen Proportionen, nach dem jede Verbindung zweier Materien nach Vielfachen der Mischungsgewichte derselben erfolgt.

5) Sind aber die Mengenverhältnisse, in welchen die Materien zusammentreten, die Gewichtsverhältnisse ihrer Atome, so folgt schliefslich auch, dafs dieselben Verhältniszahlen, die für die Verbindungen einer Gruppe mafsgebend sind, es für alle sein müssen. Denn sind A und B die Gewichtsmengen zweier Materien, welche sich mit der Menge C einer dritten zu den Verbindungen AC und BC verbinden, so können, da A und B uns die Gewichte der Atome dieser beiden Materien repräsentieren, sie selbst auch nur in den Verhältnissen mA und nB zusammentreten. Das fünfte der vorhin abgeleiteten Gesetze zeigt, dafs es in der That sich so verhält.

Schon diese Erfahrungen zeigen also die bedeutende Überlegenheit der atomistischen Hypothese; sie zeigen, dafs dieselbe jene Eigenschaften besitzt, welche wir von einer Hypothese fordern, wenn wir sie in den Naturwissenschaften zulassen, nämlich dafs sie einen einfachen obersten Grundsatz bilde, aus welchem die mit ihr verknüpften Thatsachen unmittelbar folgen.

Die Erscheinungen der chemischen Verbindungen sind indes immer noch ein einseitiges Gebiet, und es genügt nicht, um eine Hypothese zuzulassen, welche eine so allgemeine Bedeutung hat, dafs sie sich auf einem solchen bewähre, sie mufs sich auch auf anderen Gebieten, die von der Beschaffenheit der Materie bedingt sind, als ebenso stichhaltig bewähren. Wenden wir uns zu solchen, und zwar zunächst zu den Erscheinungen der chemischen Zersetzung.

Wenn wir einen zusammengesetzten Körper, z. B. Wasser, chemisch zerlegen, so erhalten wir aus ihm immer die Bestandteile, welche wir zu seiner Zusammensetzung verwandten, also immer Sauerstoff und Wasserstoff genau in den zur Zusammensetzung des Wassers erforderlichen Gewichtsverhältnissen, immer auf einen Gewichtsteil Wasserstoff acht Gewichtsteile Sauerstoff. Diese Thatsache ist nur verständlich, wenn wir das Wasser nicht als einen Körper betrachten, aus welchem unter gewissen Umständen Wasserstoff und Sauerstoff entstehen kann, sondern wenn wir annehmen, dafs diese Bestandteile wirklich als solche und zwar in den angegebenen Gewichtsverhältnissen im Wasser vorhanden sind. Dann aber müssen diese beiden Stoffe, wenn auch noch so innig verbunden, so doch räumlich getrennt sein. Wenn wir nun die Teilung des Wassers immer weiter fortgesetzt denken, so müssen wir schliefslich auf Wasserteilchen kommen, deren nochmalige Teilung die Bestandteile des Wassers von einander trennt, deren nochmalige Zerlegung also bewirkt, dafs die geteilte Substanz aufhört, als solche, wie sie war, zu existieren. Diese letzten Teilchen sind es, die wir Atome nennen.

Man sieht, dafs wir den Gesetzen der chemischen Zerlegung zufolge auf das Dasein der Atome geführt wurden, durch den aus jenen Gesetzen gezogenen Schlufs, dafs in den Verbindungen die Bestandteile, wenn auch nicht mehr isoliert, so doch noch als solche existieren. Dieser Schlufs, der vielleicht auf den ersten Blick nicht ganz exakt erscheinen mag, wird durch einige andere chemische Thatsachen zur unabweisbaren Notwendigkeit.

Die organische Chemie lehrt uns verschiedene Körper kennen, welche bei genau gleicher Zusammensetzung sich doch ganz verschieden verhalten, es sind die sogenannten isomeren Körper im weitesten Sinne des Wortes. Unter diesen isomeren Körpern gibt es eine Gruppe, die metameren, welche bei ganz identischer elementarer Zusammensetzung unter ganz gleicher Behandlungsweise dennoch ganz verschiedene Zersetzungsprodukte liefern.

So gibt es z. B. zwei Verbindungen, welche nach der Formel $C_6 H_{12} O_2$ zusammengesetzt sind, das valeriansaure Methyl, welches aus der Einwirkung von Valeriansäure auf Holzgeist entsteht, und das buttersaure Äthyl, entstanden aus der Einwirkung von Buttersäure auf Weingeist; in beiden sind mit 72 Gewichtsteilen Kohlenstoff 12 Gewichtsteile Wasserstoff und 32 Gewichtsteile Sauerstoff verbunden. Beim Einwirken von Ätzkali auf diese beiden, genau aus den gleichen Elementen bestehenden Substanzen ist das Resultat aber sehr verschieden; die eine liefert nach dem Schema

$$\left.\begin{matrix} C_5 H_9 O \\ C H_3 \end{matrix}\right\} O + \left.\begin{matrix} K \\ H \end{matrix}\right\} O = \left.\begin{matrix} C_5 H_9 O \\ K \end{matrix}\right\} O + \left.\begin{matrix} C H_3 \\ H \end{matrix}\right\} O$$

valeriansaures Kali und Methylalkohol, die andere nach dem Schema

$$\left.\begin{matrix} C_4 H_7 O \\ C_2 H_5 \end{matrix}\right\} O + \left.\begin{matrix} K \\ H \end{matrix}\right\} O = \left.\begin{matrix} C_4 H_7 O \\ K \end{matrix}\right\} O + \left.\begin{matrix} C_2 H_5 \\ H \end{matrix}\right\} O$$

buttersaures Kali und Äthylalkohol.

Aus einem Körper von genau gleicher Zusammensetzung treten also bei genau gleicher Behandlung ganz verschiedene Körper hervor. Diese Thatsache ist unbegreiflich, wenn wir nicht annehmen, dafs in der auf verschiedenen Wegen dargestellten Verbindung $C_6 H_{12} O_2$ bereits die Bestandteile der Körper, in die sie zerfallen können, also einmal die Atomgruppen $C_5 H_9 O$ und $C H_3$, das andere Mal die Atomgruppen $C_4 H_7 O$ und $C_2 H_5$ wirklich als solche vorhanden sind. Dann aber müssen sie räumlich getrennt sein; und eine fortgesetzte Teilung mufs auf Elemente führen, deren weitere Zerteilung die Substanz in ihre Bestandteile auflöst, auf Atome.

Diese Deduktion[1]) aus den Gesetzen der Zerlegung der Körper bezieht sich allerdings zunächst nur auf die zusammengesetzten Körper, wir werden sie aber auf die sogenannten einfachen Körper ausdehnen müssen. Denn zunächst sind wir nicht berechtigt, diese Körper, welche uns zu zerlegen noch nicht gelungen ist, wirklich als einfache Körper zu betrachten, dann aber besteht zwischen ihnen und den nachweisbar zusammengesetzten Substanzen nicht ein solcher Unterschied, dafs wir annehmen dürfen, sie seien von wesentlich verschiedener Natur. Zudem aber lehrt uns auch über diese die Chemie Thatsachen kennen, welche nicht zu verstehen sind ohne die Annahme von Atomen.

---

[1]) *Kopp*, Lehrbuch der physikalischen u. theoretischen Chemie als 1. Bd. des Lehrb. d. Chemie v. *Graham-Otto*. 2. Aufl.

Die Chemie zeigt uns nämlich eine Reihe von einfachen Körpern in verschiedenen, den sogenannten allotropen Modifikationen, in denen dieselben Körper ganz verschiedene Eigenschaften haben, ohne daſs zu ihnen etwas hinzugetreten oder etwas von ihnen fortgenommen wäre. So kommt die Kohle krystallinisch in zwei ganz verschiedenen Formen vor, als Diamant und als Graphit; beide Formen sind reiner Kohlenstoff, denn die Verbrennung gleicher Gewichtsmengen beider liefert genau die gleiche Menge Kohlensäure. Trotzdem sind die beiden Körper ganz und gar verschieden. Der Diamant ist ein klarer durchsichtiger Körper, härter wie irgend ein anderer, der Graphit schwarz undurchsichtig und so weich, daſs er auf dem Papiere abfärbt; er ist das Material unserer Bleistifte. Der Schwefel ist in einer ganzen Reihe verschiedener Formen bekannt[1]), er kommt vor als Rhombenoktaeder krystallisiert, und in klinorhombischen Prismen, bald ist er hart, bald weich wie Kautschuk, bald ist er in Schwefelkohlenstoff löslich, bald unlöslich, der eine ist hellgelb, der andere durchsichtig und braun. Es ist in allen Formen nichts als Schwefel, denn verbrennen wir ihn, in welcher Form es sei, wir bekommen aus allen Formen nichts als schweflige Säure, und bei Verbrennung gleicher Gewichte immer dieselbe Menge.

Ähnliches gilt vom Selen, welches als metallisches und als glasartiges, vom Arsen, welches als metallisches und graphitartiges vorkommt, vom Phosphor u. s. f.

In der Natur findet sich der Schwefel in Rhombenoktaedern krystallisiert, und in diese Form lassen sich alle übrigen durch gewisse Manipulationen zurückführen. Bei dieser Überführung zeigt sich aber dann im Augenblicke der Verwandlung eine plötzliche spontane Erwärmung, wie Regnault gezeigt hat[2]). Aus dem metallischen Selen erhält man das amorphe glasartige, indem man es schmilzt und dann tropfenweise in kaltes Wasser fallen läſst oder auf einem kalten Bleche ausgieſst, überhaupt es rasch erkaltet. Erwärmt man dann das amorphe Selen auf 94°C., so geht es plötzlich in metallisches über. Dabei zeigt es dann eine sehr beträchtliche Wärmeentwicklung, die, wie Hittorf[3]) zuerst gezeigt hat, das Selen auf eine Temperatur von über 200° erwärmt. Gleichzeitig tritt dabei eine ganz beträchtliche Verdichtung ein, indem das specifische Gewicht von 4,28 auf 4,80 steigt.

Diese Thatsachen führen uns unabweislich darauf, auch für die einfachen Körper die atomistische Hypothese zu wählen; denn ist die Materie ein Kontinuum, so können wir es absolut nicht verstehen, wie ein und dieselbe Materie sich verschieden verhalten kann; besteht sie aber aus Atomen, so sind die verschiedenen Zustände leicht erklärlich. Die Atome müssen in den Körpern eine gewisse Gruppierung haben, und die physikalischen Eigenschaften, Durchsichtigkeit, Härte, Dichtigkeit werden nicht nur von der Beschaffenheit, sondern auch von der Gruppierung der Atome abhängen. Die allotropen Zustände sind dann nichts als verschiedene Lagerung der Atome.

Werden die Substanzen aus einer Modifikation in die andere übergeführt, so muſs eine Bewegung der Atome eintreten, wir haben sie wahr-

[1]) Man sehe über diese verschiedenen Modifikationen: *Graham-Otto*, Lehrb. der Chemie. Bd. II.

[2]) *Regnault*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. I.

[3]) *Hittorf*, Poggend. Ann. Bd. 84.

genommen in den Wärmeerscheinungen, welche bei dieser Überführung sich zeigen.

Wir erhalten somit von der Chemie eine ganze Reihe von Thatsachen, welche von den beiden möglichen Hypothesen über die Struktur der Materie die eine als durchaus unzulässig erkennen lassen. Wir sind dadurch jedenfalls berechtigt, unseren Untersuchungen über die an der Materie beobachteten physikalischen Erscheinungen die atomistische Hypothese zu Grunde zu legen. Dabei wird die Fruchtbarkeit dieser Hypothese erst recht hervortreten, wenn wir sehen, dafs die verwickeltsten Erscheinungen im Lichte dieser Hypothese sich einfach und ungezwungen erklären lassen. Ja wir werden eine ganze Reihe von Erscheinungen finden, die sich ebenso wie die Isomerie und die Allotropie überhaupt nur verstehen lassen unter der Annahme, dafs die Materie ein Aggregat diskreter Teilchen ist, welche sich in Abständen von einander befinden, die mit gewissen genau messbaren Gröfsen, der Länge der Lichtwellen vergleichbar sind.

Ehe wir nun zur Besprechung der einzelnen Erscheinungen übergehen, werden wir noch die Frage zu beantworten haben, wie wir uns die Atome denn eigentlich zu denken haben. Die Erfahrung gibt uns darüber direkt nichts an; bei der Besprechung dieser Frage begeben wir uns ganz auf das Gebiet der Spekulation, welche nur den Zweck haben kann, den scheinbaren Widerspruch, dafs eine gegebene Menge Materie, das Atom unteilbar sein soll, zurückzuweisen.

Für die zusammengesetzten Körper konnten wir vorhin bereits den Begriff des Atomes feststellen, wir nannten die Atome solcher Körper jene Teilchen, welche als die letzten dieser Substanz anzusehen sind, deren weitere Teilung die Substanz in ihre Elemente zerfallen läfst. Für diese ist somit das Atom nicht etwas absolut Unteilbares, sondern nur etwas relativ Unteilbares, es ist also noch ein Teilchen, das eine, wenn auch äufserst kleine, so doch immerhin noch ideell mefsbare Ausdehnung hat, da in demselben die Atome der Bestandteile räumlich getrennt sind.

Für die einfachen Körper, für jene, die wir chemisch nicht zerlegen können, liegt der Begriff des Atoms nicht so unmittelbar vor; indes dürfen wir auf Grund der Erfahrungen über Isomerie und Allotropie ihn doch wohl ähnlich fassen. Wir werden nämlich vermuten dürfen, dafs die chemisch verschiedenen Elemente in der That nicht ebenso viele verschiedene Materien sind, dafs es vielmehr überhaupt nur eine Materie gibt, und dafs die verschiedenen Stoffe nur Modifikationen dieser Materie sind. Das physische Atom, mit dem wir es überhaupt zu thun haben, ist dann auch für die einfachen Körper nicht etwas absolut Unteilbares, sondern es ist auch noch der Teilung fähig, es ist indes das letzte Teilchen, auf welches wir bei der Teilung eines Stoffes gelangen, dessen weitere Teilung diesen Stoff nicht mehr existieren läfst. Aus solchen einzelnen Teilchen müssen wir die unserer Untersuchung unterworfenen Stoffe aufgebaut annehmen, zwischen diesen sind die Kräfte thätig, deren Wirkungen wir beobachten. Das hiernach definierte kleinste Teilchen der Materie ist also das letzte, welchem wir eine selbständige Existenz zuschreiben; die Chemie bezeichnet dasselbe als Molekül, um anzudeuten, dafs sie diese Teilchen noch wohl für teilbar hält. Eine solche Teilung nimmt die Chemie für die Moleküle der einfachen Stoffe noch an, wenn dieselben mit anderen Stoffen in Verbindu

treten. So besteht nach den jetzigen Anschauungen das Molekül freien Wasserstoffs aus zwei Atomen, ebenso das Molekül Chlor. Verbinden sich die beiden, so spalten sich ihre Moleküle, und die Elemente treten Atom für Atom aneinander. Treten wir dieser Auffassung des Atoms bei, so gilt natürlich auch für dieses unsere vorige Definition des Atoms ganz ebenso, nur dafs damit dem einzelnen Atom als solchem nicht immer mehr eine selbständige Existenz zukommt, dafs auch bei einfachen Stoffen dieselben ebenso zu zwei oder mehr verbunden sein können, wie bei zusammengesetzten.

Von den so definierten Atomen und chemischen Molekülen können wir noch das physikalische Molekül unterscheiden, welches aus einer Zusammenlagerung mehrerer chemischer Moleküle bestehen kann, welches sich also zum chemischen Molekül verhält, wie dieses zum Atom. Diese physikalischen Moleküle würden dann die näheren Bestandteile der einzelnen Körper bilden. Zu dieser Annahme führen uns hauptsächlich die allotropen Modifikationen der einfachen Körper; denn auf diese Weise können wir uns am besten die vorhin erwähnte verschiedene Lagerung der Atome denken, welche die Verschiedenheit in den Eigenschaften der allotropen Modifikationen bedingt. Das Atom und das chemische Molekül des Graphits mufs dasselbe sein wie des Diamants, da wir in beiden chemisch denselben Körper haben; das physikalische Molekül des Graphits unterscheidet sich aber von dem des Diamanten, indem bei der einen dieser Formen der Kohle eine gröfsere oder geringere Zahl von Atomen zu einem Molekül vereinigt und in diesem Molekül dann verschieden gelagert sind.

Physikalisch sind wir hiermit an der Grenze angelangt, zu der wir durch induktorische Schlüsse kommen können, philosophisch ist der Begriff des Atoms und somit derjenige der Materie noch nicht erfafst. Denn dazu wäre die Frage noch zu erledigen: Wie ist denn nun das physikalische Atom weiter beschaffen, was entsteht, wenn wir es weiter zerlegen? Dafs das Atom nach dem Vorigen selbst wieder, wenn ich so sagen darf, atomistisch gefafst werden mufs, leuchtet ein; denn nur dann ist die Verschiedenheit der physikalischen Atome fafsbar, wenn wir sie als Modifikationen einer Materie ansehen. Ob aber dann die Grundlage der physikalischen Atome, das philosophische Atom, als etwas Ausgedehntes, oder ob es als einfacher, materieller Punkt aufzufassen ist, das ist eine Frage, welche lediglich der Spekulation angehört, die zu besprechen deshalb hier nicht der Ort ist[1].

Da das physikalische Atom eine bestimmte Quantität Materie enthält, so besitzt es ein bestimmtes Gewicht; es ist nicht möglich, das Gewicht desselben für die verschiedenen Stoffe in Grammen anzugeben, sein relatives Gewicht, das heifst das Verhältnis zwischen den Gewichten der einzelnen Atome läfst sich bestimmen. Nennen wir das Gewicht des Atoms Wasser-

[1] Man sehe über die Frage nach der Beschaffenheit der Atome: *Fechner*, Atomenlehre, 2. Aufl. Leipzig, 1864. Fechner entscheidet sich dort für die Einfachheit des philosophischen Atoms; seine Deduktion scheint mir indes nicht gegen allen Widerspruch sicher zu sein. Aufserdem sehe man die philosophische Einleitung in die Encyklopädie der Physik (herausgegeben von *G. Karsten*) von *Harms*, in welcher man die verschiedenen Anschauungen von dem Wesen der Materie zusammengestellt findet. So interessant es auch wäre, so verbieten doch die Grenzen dieses Werkes, auf die verschiedenen Theorieen einzugehen; ich habe deshalb oben die dynamische Anschauung nicht einmal erwähnt.

stoff eins, so werden wir nach dieser Einheit das des Chlors, das des
stoffs etc. messen können. Eine Verbindung des Chlors und Wasse
wird sich dann, wenn wir das Gewicht der beiden Atome mit cl und
zeichnen, darstellen lassen durch $m \cdot h + n \cdot cl$ oder, da wir h gl
setzen, durch $m + n \cdot cl$, wo m und n ganze Zahlen sind und die
der Atome geben, die bei dieser Verbindung zusammentreten. Das V
nis der Atomgewichte des Wasserstoffs und Chlors wird dann sein m :
oder $1 : \frac{n}{m} \cdot cl$. Die chemische Analyse, welche uns das Mischungsg
des Chlors, jene Menge, welche sich mit einem Gewichtsteil Wass
verbindet, liefert, bestimmt somit die Gröfse $\frac{n}{m} \cdot cl$ oder das Atomg
multipliziert mit dem Quotienten $\frac{n}{m}$.

Wären uns daher die Zahlen m und n bekannt, so lieferte un
selbe Analyse, welche das Mischungsgewicht des Chlors ergibt, auc
Atomgewicht desselben. Man hat aber kein direktes Mittel, diese Zah
bestimmen; denn man weifs niemals, wieviel Atome bei einer Verbi
zu einem zusammentreten. In welcher Weise die Chemie, durch g
Erscheinungen geführt die Atomgewichte aus den Äquivalenten al
das zu besprechen würde hier zuviel Raum einnehmen; wir verweise
halb auf die Lehrbücher der Chemie[1]) und begnügen uns hier die v
Chemie jetzt angenommenen Atomgewichte mitzuteilen, da wir die
an mehreren Stellen benutzen müssen.

Tabelle der Atomgewichte der einfachen Körper,
bezogen auf $H = 1$.

Aluminium	*Al*	= 27,4	Jod	*J*	=
Antimon	*Sb*	= 122,0	Kalium	*Ka*	=
Arsen	*As*	= 75,0	Kobalt	*Co*	=
Barium	*Ba*	= 137,0	Kohlenstoff	*C*	=
Beryllium	*Be*	= 9,3	Kupfer	*Cu*	=
Blei	*Pb*	= 207,0	Lanthan	*La*	=
Bor	*B*	= 11,0	Lithium	*Li*	=
Brom	*Br*	= 80,0	Magnesium	*Mg*	=
Cadmium	*Cd*	= 112,0	Mangan	*Mn*	=
Caesium	*Cae*	= 133,0	Molybdän	*Mo*	=
Calcium	*Ca*	= 40,0	Natrium	*Na*	=
Cerium	*Ce*	= 92,0	Nickel	*Ni*	=
Chlor	*Cl*	= 35,5	Niobium	*Nb*	=
Chrom	*Cr*	= 52,2	Osmium	*Os*	=
Didym	*Di*	= 95,0	Palladium	*Pa*	=
Eisen	*Fe*	= 56,0	Phosphor	*P*	=
Erbium	*Er*	= 112,6	Platin	*Pt*	=
Fluor	*Fl*	= 19,0	Quecksilber	*Hg*	=
Gold	*Au*	= 197,0	Rhodium	*Rh*	=
Indium	*In*	= 37,8	Rubidium	*Rb*	=
Iridium	*Ir*	= 198,0	Ruthenium	*Ru*	=

[1]) Man sehe: *Lothar Meyer*, Die modernen Theorieen der Chemie. Bresla
Kekulé, Lehrbuch der Chemie. 1. Bd. 1859.

stoff........	O =	16,0	Titan..........	Ti =	50,0
efel........	S =	32,0	Uran...........	U =	120,0
....	Se =	79,5	Vanadium.......	Va =	51,3
....	Ag =	108,0	Wasserstoff......	H =	1
m.........	Si =	28,0	Wismuth........	Bi =	210,0
stoff........	N =	14,0	Wolfram........	W =	184,0
tium.......	Sr =	87,5	Yttrium.........	Y =	61,7
l..........	Ta =	182,0	Zink...........	Zn =	65,2
r..........	Te =	128,0	Zinn...........	Sn =	118,0
ium........	Tl =	204,0	Zirconium.......	Zi =	89,6
um........	Th =	231,5			

§ 46.

Die Aggregatzustände. Die in dem letzten Paragraphen mitgeteilten rungen berechtigen uns, jeden Körper als ein Aggregat neben einander ıder Moleküle zu betrachten, welche einen äufserst kleinen Raum ein- ən, so dafs wir sie als mit ihrem Schwerpunkt zusammenfallend an- dürfen. In welcher Weise diese Moleküle gruppiert sind, das wissen icht; das aber mufsten wir annehmen, dafs sich die einzelnen Mole- nicht berühren, dafs sie in gewissen, wenn auch sehr kleinen, aber mit andern in der Physik vorkommenden Gröfsen vergleichbaren Ent- ıgen von einander abstehen, welche sich bei einer Ausdehnung des rs vergröfsern, bei einer Volumverminderung verkleinern.

Da alle materiellen Körper einer in der Verbindungslinie ihrer Schwer- e wirkenden Kraft unterworfen sind, welche sie einander zu nähern wie auch ihr Abstand und innere Beschaffenheit sein mag, so müssen nnehmen, dafs auch die Moleküle einer jeden Substanz mit einer in erbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft gegen einander ben werden, welche wegen der sehr kleinen Abstände der Moleküle grofs sein mufs. Wir bezeichnen diese Kraft als eine Anziehung der üle gerade so, wie wir die zwischen den Weltkörpern thätigen Kräfte ne Anziehung der Massen bezeichnet haben. Diese anziehende Kraft das Bestreben haben, die Moleküle einander zu nähern, und zwar um ehr, je kleiner die Abstände derselben sind. Daraus würde nun aber ., dafs die Körper in ihrem Innern nur dann im Gleichgewicht sein en, wenn die einzelnen Teile sich berühren, dafs also die Körper porös sein könnten. Dem widerspricht indessen die unmittelbare An- ıng; denn es gibt Körper, in denen wir die Poren direkt sehen können. ufs deshalb zwischen den Molekülen noch eine andere Kraft thätig welche verhindert, dafs sie sich bis zur Berührung annähern, welche lso als eine die Moleküle gegenseitig abstofsende bezeichnen müssen, elche zunimmt, wenn der Abstand der einzelnen Teile abnimmt, so dafs unter Wirkung dieser beiden einander entgegengesetzten Kräfte olekule bereits in einem gewissen Abstande von einander in den Zu- des stabilen Gleichgewichts eintreten.

Wir haben zunächst aus der allgemeinen Massenanziehung den Schlufs n, dafs die Moleküle sich anziehen müssen, und aus der Porosität, wischen denselben auch abstofsende Kräfte thätig sein müssen. Würden e letztern analog den ersten betrachten, so müfsten wir schliefsen,

dafs die Gröfse dieser abstofsenden wie die der anziehenden nur von dem Abstande der Moleküle und ihrer Masse, nicht von der Natur derselben abhängig sei. Dieser Ansicht von der Natur der zwischen den Molekülen thätigen Kräfte widerspricht aber eine Reihe bekannter Erfahrungen. Die Masse eines Körpers ist nämlich seinem Gewichte proportional, diejenige eines gegebenen Volumens demnach um so gröfser, je gröfser das Gewicht desselben ist. Da die Körper nun aus Molekülen bestehen, so müssen in einem gegebenen Volumen um so mehr Moleküle oder Moleküle von um so gröfserer Masse sein, je dichter der Körper ist. Unter beiden Annahmen müfste aber der dichtere Körper zugleich der festere sein, das heifst, es müfsten seine Moleküle um so stärker zusammenhalten, da sowohl mit der gröfseren Annäherung der Moleküle als auch mit ihrer gröfseren Masse die anziehenden Kräfte gröfser werden. Man weifs aber, dafs das nicht der Fall ist; die Teile aller flüssigen Körper stellen einem Versuche, sie zu trennen, einen weit geringern Widerstand entgegen als die der festen Körper; viele feste Körper sind aber weniger dicht als flüssige, wie z. B. das Wasser dichter ist als die meisten Holzarten, das Quecksilber dichter als die meisten Metalle. Man könnte dagegen behaupten, dafs mit der gröfseren Annäherung der Moleküle auch die abstofsenden Kräfte wachsen müssen, dafs somit je nach dem Gesetze, nach welchem diese Kräfte sich mit der Entfernung oder der Masse ändern, die dichteren Körper nicht gerade die festeren sein müfsten. Würde aber die Gröfse der Molekularkräfte nur von der Entfernung und Masse der Moleküle abhängig sein, so müfsten alle Körper gleicher Dichtigkeit auch dieselbe Festigkeit zeigen, da in diesen die einzelnen Moleküle wenigstens nicht sehr verschiedene Masse und Abstände haben können. Aber auch dem widerspricht die Erfahrung, da wir feste Körper herstellen können, welche genau dieselbe Dichtigkeit haben wie Flüssigkeiten.

Wir müssen deshalb schliefsen, dafs die zwischen den Molekülen thätigen Kräfte nicht lediglich von der Masse und den Abständen der Moleküle, sondern auch von der Natur derselben abhängig sind. Ob diese Abhängigkeit von der Beschaffenheit der Moleküle den anziehenden Kräften zukommt, die dann nicht mit denen der allgemeinen Gravitation zusammenfallen würden, oder den abstofsenden Kräften, oder beiden, das läfst sich nicht entscheiden. Indem man das unentschieden läfst, spricht man nur die in der Natur sich zeigenden Thatsachen aus, wenn man den einzelnen Teilen der Körper je nach ihrer Natur eine verschiedene Kohäsion beilegt, indem man ganz unbestimmt jene Kräfte, welche den Zusammenhalt der Körper bedingen, unter dem Namen der Kohäsion oder der Kohäsionskräfte zusammenfafst.

Je nach der verschiedenen Kohäsion der einzelnen Körperteilchen unterscheidet man drei Aggregatzustände und zwar

1) Die festen Körper. Dieselben haben ein selbständiges Volumen und eine selbständige Gestalt; ihre einzelnen Teilchen verschieben sich nicht leicht gegen einander, sondern es bedarf einer mehr oder weniger bedeutenden Kraft, diese zu verschieben oder zu trennen; einmal getrennt, lassen sie sich nicht wieder durch Zusammenlegen vereinigen.

2) Die flüssigen Körper. Sie haben ein vollständiges Volumen ohne selbständige Gestalt. Die geringste äufsere auf sie einwirkende Kraft kann

Sauerstoff	O	= 16,0
Schwefel	S	= 32,0
Selen	Se	= 79,5
Silber	Ag	= 108,0
Silicium	Si	= 28,0
Stickstoff	N	= 14,0
Strontium	Sr	= 87,5
Tantal	Ta	= 182,0
Tellur	Te	= 128,0
Thallium	Tl	= 204,0
Thorium	Th	= 231,5
Titan	Ti	= 50,0
Uran	U	= 120,0
Vanadium	Va	= 51,3
Wasserstoff	H	= 1
Wismuth	Bi	= 210,0
Wolfram	W	= 184,0
Yttrium	Y	= 61,7
Zink	Zn	= 65,2
Zinn	Sn	= 118,0
Zirconium	Zi	= 89,6

§ 46.

Die Aggregatzustände. Die in dem letzten Paragraphen mitgeteilten Erfahrungen berechtigen uns, jeden Körper als ein Aggregat neben einander liegender Moleküle zu betrachten, welche einen äufserst kleinen Raum einnehmen, so dafs wir sie als mit ihrem Schwerpunkt zusammenfallend ansehen dürfen. In welcher Weise diese Moleküle gruppiert sind, das wissen wir nicht; das aber mufsten wir annehmen, dafs sich die einzelnen Moleküle nicht berühren, dafs sie in gewissen, wenn auch sehr kleinen, aber doch mit andern in der Physik vorkommenden Gröfsen vergleichbaren Entfernungen von einander abstehen, welche sich bei einer Ausdehnung des Körpers vergröfsern, bei einer Volumverminderung verkleinern.

Da alle materiellen Körper einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft unterworfen sind, welche sie einander zu nähern sucht, wie auch ihr Abstand und innere Beschaffenheit sein mag, so müssen wir annehmen, dafs auch die Moleküle einer jeden Substanz mit einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft gegen einander getrieben werden, welche wegen der sehr kleinen Abstände der Moleküle sehr grofs sein mufs. Wir bezeichnen diese Kraft als eine Anziehung der Moleküle gerade so, wie wir die zwischen den Weltkörpern thätigen Kräfte als eine Anziehung der Massen bezeichnet haben. Diese anziehende Kraft mufs das Bestreben haben, die Moleküle einander zu nähern, und zwar um so mehr, je kleiner die Abstände derselben sind. Daraus würde nun aber folgen, dafs die Körper in ihrem Innern nur dann im Gleichgewicht sein könnten, wenn die einzelnen Teile sich berühren, dafs also die Körper nicht porös sein könnten. Dem widerspricht indessen die unmittelbare Anschauung; denn es gibt Körper, in denen wir die Poren direkt sehen können. Es mufs deshalb zwischen den Molekülen noch eine andere Kraft thätig sein, welche verhindert, dafs sie sich bis zur Berührung annähern, welche wir also als eine die Moleküle gegenseitig abstofsende bezeichnen müssen, und welche zunimmt, wenn der Abstand der einzelnen Teile abnimmt, so zwar, dafs unter Wirkung dieser beiden einander entgegengesetzten Kräfte die Moleküle bereits in einem gewissen Abstande von einander in den Zustand des stabilen Gleichgewichts eintreten.

Wir haben zunächst aus der allgemeinen Massenanziehung den Schlufs gezogen, dafs die Moleküle sich anziehen müssen, und aus der Porosität, dafs zwischen denselben auch abstofsende Kräfte thätig sein müssen. Würden wir die letztern analog den ersten betrachten, so müfsten wir schliefsen,

Dafs in der That in den beiden eben besprochenen Fällen zwischen den genäherten oder entfernten Molekülschichten abstofsende oder anziehende Kräfte wirksam sind, das läfst sich sofort erkennen, wenn wir die äufsern Kräfte aufhören lassen zu wirken, denn wir nehmen sofort eine Bewegung der Molekülschichten gegen ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage wahr, der komprimierte Cylinder dehnt sich wieder aus, der ausgedehnte zieht sich wieder zusammen. Diese Eigenschaft der Körper, das Bestreben, ihre ursprüngliche Gestalt und das ursprüngliche Volumen wieder anzunehmen, wenn die Kraft, welche kleine Formänderungen an ihnen hervorgebracht hat, aufhört zu wirken, bezeichnet man mit dem Namen der Elasticität.

Die Existenz dieser Eigenschaft gibt uns einen weitern Aufschlufs über die Natur der zwischen den Molekülen thätigen Kräfte; sie zeigt, dafs die abstofsenden Kräfte mit zunehmender Entfernung der Moleküle weit rascher abnehmen als die anziehenden Kräfte. Denn wenn die Moleküle in der Gleichgewichtslage sind, sind die anziehenden und abstofsenden Kräfte einander gleich. Mit Änderung der Abstände müssen sich nun sowohl die anziehenden als auch die abstofsenden Kräfte in demselben Sinne ändern. Da nun aber eine gröfsere Annäherung Abstofsung, eine gröfsere Entfernung Anziehung hervortreten läfst, so folgt, dafs bei Verringerung des Abstandes die abstofsenden Kräfte rascher wachsen, bei Vergröfserung des Abstandes rascher abnehmen als die anziehenden Kräfte.

Die besprochenen beiden Fälle sind nicht die einzigen, bei denen sich die Elasticität der festen Körper zeigt, sie zeigt sich ebenso, wenn wir einen Stab biegen oder ihn um eine in ihm befindliche Axe zu drehen suchen, während sein eines Ende festgehalten wird, wenn wir ihn tordieren. Wir werden indes sehen, dafs wir die elastischen Kräfte in diesen Fällen auf die zuerst besprochenen zurückführen können.

Die Untersuchung der Elasticität fester Körper ist eine der schwierigsten auf dem ganzen Gebiete der Physik; um die Gesetze derselben vollständig zu übersehen, bedarf es der kompliziertesten mathematischen Entwicklungen und der feinsten Versuche. Wir müssen uns deshalb hier darauf beschränken, die Resultate der Untersuchungen vorzuführen, indem wir gleichzeitig, so weit es möglich ist, den innern Zusammenhang derselben darlegen[1]).

§ 48.

Elasticität beim Zuge. Der einfachste Fall aller Probleme über Elasticität ist der, dafs man einen dünnen soliden Stab, der an seinem einen Ende befestigt ist, durch einen Zug oder Druck in seiner Längsrichtung ausdehnt oder zusammendrückt. So lange die Veränderungen, welche die wirksame Kraft hervorbringt, klein genug sind, mufs die durch

[1]) Die wichtigsten allgemeinen Untersuchungen über Elasticität finden sich in:
Poisson, Mémoire sur les mouvements des corps élastiques. Mémoires de l'Académie des sciences. Paris. T. VIII.
Cauchy, Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre d'un corps solide. Exercices des Mathématiques T. II und III.
Lamé, aufser einer Reihe von Abhandlungen besonders in seinen Leç[ons] sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. II. édit. Paris 18[66].
Kirchhoff, Abhandlungen über Elasticität. Crelles Journal Band 40 und Bd. [56].
Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862.

gebenes Gewicht beim Zusammendrücken hervorgebrachte Verkürzung sein der durch die Ausdehnung bewirkten Verlängerung; es genügt den Fall der Ausdehnung zu betrachten und die Beziehungen aufzu-, welche zwischen der Belastung und der eintretenden Verlängerung iden. Die einfachste Methode der Untersuchung ist die von Wertheim andte. Derselbe befestigte an einer festen Mauer ein Kniestück von tarkem Eisen *B* (Fig. 54). Dasselbe endigt in einer ebenen vertikalen von gehärtetem Stahl, gestreift wie eile, gegen welche eine Platte, ebenn Stahl und an der einen Seite ebenso ft, pafst und mittels Schrauben *C* ankt werden kann. Diese beiden Stücke als Backen eines starken Schraub-, und zwischen ihnen wird der Draht, Elasticität man untersuchen will, durch sehr starken Druck befestigt.

n dem untern Ende des Drahtes wird einer gleichen schraubstockartigen htung ein Haken befestigt und an diesen Vagschale *E* angehängt, welche die len Gewichte aufnimmt. Sind die Gehinreichend schwer, so dehnt sich der merklich aus, verkürzt sich aber wieder er früheren Länge, wenn man die Gefortnimmt. Zur Messung der Verung bedarf es gewisser Vorsichtsmafs-



Fig. 54.

Venn man die Gewichte in die Wagsehr rasch einsetzt, so erteilt man pparat Stöfse, durch welche man den zerreifsen kann. Um diese zu ver-, ist die Wagschale mit drei langen ellschrauben *HH* versehen, welche man eginn des Versuches so weit hinabbt, dafs sie den Boden berühren und die Wagschale tragen; dann wird die belastet, und dann erst hebt man die iben sehr langsam, um allmählich das ht seine ziehende Wirkung ausüben zu Dabei hat man keine Stöfse zu ben. Bei der Beobachtung hat man sich noch vor einem leicht zu begehenden e zu schützen. Wählt man nämlich feine Drähte, so sind diese stets len Stellen gebogen und gekrümmt. Ein Anhängen der Gewichte t nun zunächst ein Geradestrecken und dadurch scheinbar ein Vern des Drahtes. Um diese Täuschungen zu vermeiden, ist es not-, anfänglich ein kleines Gewicht in die Schale zu legen, welches hinden Draht gerade zu machen und dann erst allmählich die Schale zu belasten. Von da an zählt man dann auch erst die Gewichte.

Die Verlängerungen des Drahtes, welche immer sehr klein sind, mifst man mit dem Kathetometer; man stellt dasselbe dem Drahte ein für allemal fest gegenüber und visiert mit dem Fernrohr desselben auf zwei feine an den Enden des Drahtes angebrachte Marken T und T'. Der Unterschied der Fernrohrstellungen des Kathetometers liefert dann in allen Fällen die Länge des Drahtes, sowohl vor als nach der Belastung; die Differenz zwischen den beobachteten Längen vor und nach der Belastung gibt dann die infolge der Belastung eintretende Verlängerung. Mit Hülfe dieser Methode hat Wertheim[1]) zunächst die schon früher von Hooke[2]), S'Gravesande[3]), Th. Young[4]) u. a. aufgestellten Gesetze der Elasticität bestätigt. Dieselben sind:

1) Die Verlängerungen eines Drahtes sind bei demselben angehängten Gewicht der Länge des Drahtes proportional. Um das Gesetz nachzuweisen, hat man auf dem Drahte nur mehrere Marken in gleicher Distanz zu ziehen; man findet dann nach der Belastung, dafs der Abstand der verschiedenen Marken sich gleich viel vergröfsert hat. Da nun die Verlängerung des ganzen Drahtes gleich der Summe der Ausdehnungen seiner einzelnen Teile ist, so folgt, dafs dieselbe der Länge des Drahtes proportional ist.

2) Die Verlängerung eines gegebenen Drahtes ist der Gröfse des spannenden Gewichtes direkt proportional. Aus diesem Satze folgt, dafs die durch kleine Verschiebungen der Moleküle hervorgerufenen elastischen Kräfte den Verschiebungen selbst proportional sind. Denn wenn unter Wirkung des spannenden Gewichtes Gleichgewicht eingetreten ist, so beweist das, dafs die von einander entfernten Molekülschichten sich mit der dem spannenden Gewichte gleichen Kraft anziehen. Da nun die Verschiebungen der Moleküle dem spannenden Gewichte proportional sind, so folgt auch, dafs die elastischen Kräfte den Verschiebungen proportional sind.

3) Die Verlängerung verschieden dicker Drähte ist bei gleichen spannenden Gewichten dem Querschnitt der Drähte umgekehrt proportional, von der Gestalt des Querschnittes aber unabhängig. Dieser Satz folgt auch schon unmittelbar aus der Überlegung, dafs wir einen Stab $n$facher Dicke als aus n Stäben einfacher Dicke bestehend ansehen können; damit deshalb ein solcher Stab dieselbe Verlängerung erhalte, bedarf er ein $n$mal so grofses Gewicht als der einfache Stab.

4) Schliefslich ist die Verlängerung abhängig von der Natur des Drahtes, den wir belasten.

Fassen wir diese vier Sätze in einen Ausdruck zusammen, so können wir die Verlängerung v, welche ein Draht von der Länge l und dem Querschnitte q durch ein Gewicht p erhält, darstellen durch die Gleichung

$$v = c \cdot \frac{p \cdot l}{q},$$

worin c eine für jede Substanz besondere Konstante ist, welche die Verlänge-

[1]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. t. 12. Poggend. Annal. Ergänzungsband II.
[2]) *Hooke*, Philosophical tracts and Collections. London 1679.
[3]) *S'Gravesande*, Physicae elementa mathematica. T. I.
[4]) *Th. Young*, Course of lectures on natural Philosophy. London 1807.

g bedeutet, welche ein aus ihr verfertigter Stab durch die Gewichts-ıeit erhält, wenn seine Länge und sein Querschnitt der Einheit gleich Als Einheit des Gewichtes nimmt man das Kilogramm, als Einheit der ge das Meter, als Einheit des Querschnittes das Quadratmillimeter.

Die Gröfse p gibt uns nach 2) gleichzeitig die bei einer Verlängerung vischen den Molekülschichten auftretende elastische Kraft; lösen wir die chung nach p auf, so erhalten wir

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{c} \cdot \frac{v}{l} \cdot$$

Der Quotient $\frac{p}{q}$ gibt uns die in der Querschnittseinheit auftretende tische Kraft, der Quotient $\frac{v}{l}$ die Verlängerung des Stabes, gemessen in :hteilen seiner ursprünglichen Länge, oder die Verlängerung der Längen-eit. Setzen wir diese Quotienten gleich p_0 und δ, so erhalten wir

$$p_0 = \frac{1}{c} \cdot \delta.$$

Den reciproken Wert des Koefficienten c bezeichnet man als den ticitätskoefficienten oder den Elasticitätsmodulus; setzen wir denselben h E, so wird schliefslich

$$p_0 = E \cdot \delta,$$

die in der Querschnittseinheit bei kleinen Veränderungen auftretende ische Kraft ist gleich dem Produkte aus dem Elasticitätsmodul und der Bruchteilen der ursprünglichen Länge gemessenen Verlängerung.

Der soeben eingeführte Elasticitätsmodul einer Substanz ist der reciproke t der Verlängerung, welche die Längeneinheit eines Stabes der be-enden Substanz durch die auf die Querschnittseinheit beim Zuge wir-le Gewichtseinheit erhält. In dieser Weise wird derselbe auch bestimmt; kann denselben indes auch anders definieren. In der Gleichung

$$p_0 = E \cdot \delta$$

l $p_0 = E$, wenn δ gleich eins wird. Der Elasticitätskoefficient ist also ı das Gewicht, welches einem Stab der betreffenden Substanz vom Quer-itt eins eine der Einheit gleiche Verlängerung gibt, welche also die ge des Stabes oder den Abstand der Molekülschichten in demselben ver-peln würde, vorausgesetzt, dafs die für kleine Änderungen geltenden tze soweit giltig wären. Dieser Definition entsprechend drückt man Elasticitätsmodul einer Substanz auch gewöhnlich durch Gewichte aus.

Wertheim hat nach der angegebenen Methode eine Anzahl Elasticitäts-ficienten bestimmt[1]), wir lassen dieselben hier folgen.

---

[1]) *Wertheim*, Poggend. Annal. Ergänzungsband II.

Tabelle der Elasticitätskoefficienten verschiedener Metalle bei verschiedenen Temperaturen.

Metalle	Koefficienten bei			Koefficienten aus Longitudinaltönen bestimmt
	15°—20°C.	100°C.	200°C.	
Blei gezogen	1883			2278
„ angelassen	1727	1630	—	2146
Gold gezogen	8131			8599
„ angelassen	5584	5408	5482	6372
Silber gezogen	7357			7576
„ angelassen	7140	7274	6374	7242
Zink gezogen	8734			9555
Kupfer gezogen	12449			12536
„ angelassen	10519	9827	7862	12540
Platin gezogen	17044			17165
„ angelassen	15518	14178	12964	15611
Eisen gezogen	20869			19903
„ angelassen	20794	21877	17700	19925
Gufsstahl gezogen . . .	19549			19823
„ angelassen	19561	19014	17926	19828
Engl. Stahl gezogen . .	18809			19445
„ angelassen	17278	21292	19278	19200

Die Zahlen der letzten Kolumne gelten ebenfalls für die Tempe 15°—20°C., die Methode, nach welcher sie erhalten wurden, werde später besprechen[1]).

Obige Zahlen zeigen, dafs die Elasticitätskoefficienten nicht nur für schiedene Metalle, sondern auch für ein und dasselbe Metall verschieden können, je nachdem dasselbe als gezogener Draht oder nach vorhergegang Erhitzen untersucht wird.

Die in obiger Tabelle erhaltenen Zahlen liefern uns nicht nu elastische Kraft bei Verlängerung eines Stabes, sondern auch bei einer kürzung durch auf die Endflächen des Stabes angebrachte Drucke, da der im Anfange dieses Paragraphen gemachten Bemerkung die Gesetz bei solchem Drucke stattfindenden Verkürzungen mit denen der Verlänge zusammenfallen, so lange wir nur kleine Veränderungen in Betracht zi

§ 49.

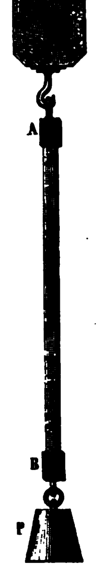
Volumveränderung während des Zuges. Wir haben bishe die Veränderungen in der Länge eines Stabes betrachtet, welche auft wenn man einen Stab ausdehnt oder zusammendrückt; man sieht aber l dafs auch der Querschnitt eines solchen Stabes bei der Ausdehnung Zusammendrückung nach der Längsaxe sich ändern mufs. Es ist ferner scheinlich, dafs der Querschnitt kleiner werden mufs, wenn man den Sta längert. Man kann dieses auch sehr leicht mittels eines einfachen Vers nachweisen, den Wertheim[2]) angestellt hat. Er nahm sehr sorgfältig gearb

[1]) Man sehe § 161 dieses Bandes.

[2]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII. Po Annal. LXXVIII.

Kautschukstreifen (Fig. 55) von ungefähr 300 Millimeter Länge. Dieselben hatten die Gestalt von Prismen mit quadratischer Grundfläche. Die Länge einer Seite war zwischen 9 und 47 Millimeter. An ihren beiden Enden versah er sie mit eisernen Ansätzen A und B, in denen die Kautschukstreifen fest angebracht waren. Die Ansätze hatten Haken; mittels des einen wurde der Kautschukstreifen vertikal aufgehängt; an dem andern, B, wurde das ziehende Gewicht P angebracht. Da der Kautschuk sich äufserst leicht ausdehnt, so verlängerte sich der Streifen sehr bedeutend; die Verlängerung wurde gemessen. Da der Querschnitt des Streifens ferner sehr grofs war, so konnte man ihn mittels eines Zirkels messen und so die Veränderungen des Querschnittes bestimmen, welche durch die Verlängerung der Streifen entstanden. Man beobachtete, was vorausgesehen war, dafs der Querschnitt des Kautschukstreifens kleiner wurde.

Fig. 55.



Bezeichnen wir nun die ursprüngliche Länge eines Drahtes mit L, so wird durch die Einwirkung irgend eines Gewichtes diese Länge in $L(1 + \delta)$ übergehen, wo δ wieder die Verlängerung der Längeneinheit darstellt und gleich $\frac{p_0}{E}$ ist. Der Querschnitt des Stabes, dessen Breite B, dessen Dicke D war, wird nach der Belastung dann sein $B \cdot D(1 - \mu \cdot \delta)^2$, wenn wir die Verkürzung des Querdurchmessers des Stabes, die jedenfalls der Verlängerung des Stabes proportional sein mufs, mit $\mu\delta$ bezeichnen. Entwickeln wir den Ausdruck für den Querschnitt nach der Belastung, so können wir, da δ immer nur sehr klein ist, $\mu^2\delta^2$ vernachlässigen und erhalten dann für den Querschnitt des Stabes

$$BD(1 - 2\mu\delta)$$

und für das Volumen desselben nach dem Zuge

$$LBD(1 + \delta)(1 - 2\mu\delta),$$

oder auch, wenn wir das sehr kleine Glied $2\mu\delta^2$ wieder aufser Acht lassen

$$LBD(1 + \delta - 2\mu\delta).$$

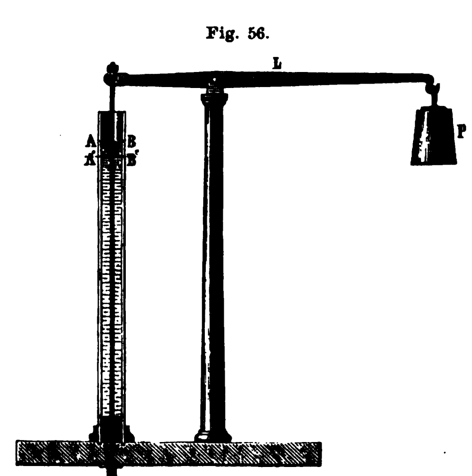
Je nach dem Werte von μ kann deshalb eine Vergröfserung oder Verkleinerung des Volumens eintreten. Es hat sich nun aus sämtlichen in der Richtung angestellten Versuchen ergeben, dafs in der That eine Vergröfserung des Volumens eintritt, somit dafs $2\mu\delta < \delta$ oder dafs $\mu < 0{,}5$, aber gröfser als Null ist.

Welches indes der wirkliche Wert von μ innerhalb dieser Grenzen ist, darüber herrscht wegen der grofsen Schwierigkeit, diese Gröfse zu bestimmen, noch einige Unsicherheit. Navier[1]), Poisson[2]), Lamé und Clapeyron[3]) gelangen in ihren theoretischen Untersuchungen über Elasticität zu dem Resultate, dafs $\mu = \frac{1}{4}$ sei, ein Resultat, welches Poisson[4]) durch Versuche von Cagniard de Latour bestätigt fand. Derselbe befestigte auf

[1]) *Navier*, Mémoires de l'Academie des sciences. T. VII.
[2]) *Poisson*, Mémoires de l'Académie des sciences. T. VIII.
[3]) *Lamé* und *Clapeyron*, Crelles Journal für Mathematik. Bd. VII.
[4]) *Poisson* teilt diesen Versuch mit Annales de chim. et de phys. T. XXXVI. Poggend. Annal. Bd. XII.

einem festen Fufsbrett (Fig. 56) einen Metalldraht, so dafs dersel recht aufstieg; das obere Ende des Drahtes wurde an einem Ar ungleicharmigen Hebels L befestigt, dessen anderer Arm mit ei wichte P beschwert wur

Fig. 56.



Länge des unbelasteten sie betrug 2^m, war genau b und es wurde dann die gerung beobachtet, welc die Belastung des Hebel Die letztere wurde so steigert, dafs die Verl des Drahtes 6^{mm} betru Draht war, wie die Fig von einer engen, unten senen und mit Wasser Röhre umgeben, der messer der Röhre und des waren genau gemessen. In blicke nun, in dem sich d durch den Zug zu verlän gann, sah man das Ni Wassers in der Röhre von AB bis $A'B'$ sinken; ein Beweis, da That bei der Verlängerung des Drahtes eine Verminderung des Quer eintritt. Die Niveaudifferenz vor und nach dem Zuge wurde genau g Darauf wurde der Draht unten am Fufsbrett gelöst, in die mit Wasse Röhre eingesetzt, so dafs sein unteres Ende den Boden der Röhr berührte, und das Niveau des Wassers wieder beobachtet. Dara der Draht so weit emporgezogen, dafs das obere Ende 6^{mm} aus den emporragte, dafs also ein ebenso grofses Stück des Drahtes aus den emporragte als bei dem vorigen Versuche. Da dann das Volume das Wasser tauchenden Drahtes um das herausgezogene Stück klei so mufste das Niveau des Wassers wieder sinken, und es ergab si es jetzt doppelt so tief sank als bei dem vorigen Versuch, somit Volumverminderung des jetzt noch in das Wasser tauchenden doppelt so grofs war als bei der Verlängerung des Drahtes. D von μ ergibt sich daraus auf folgende Weise: bezeichnen wir de des cylindrischen Drahtes mit r, so nimmt, wenn wir die Verlänge Längeneinheit mit δ bezeichnen, bei der Ausdehnung des Drahtes in das Wasser tauchende Stück des Drahtes das Volumen

$$l \cdot r^2 \pi (1 - 2\mu\delta)$$

ein, da wir, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, voraussetze dafs die Länge des eintauchenden Stückes nicht geändert ist. Das des Stückes ist dann nur kleiner geworden, weil der Querschnitt de im Verhältnis $1 : 1 - 2\mu\delta$ verkleinert ist.

Das Volumen des in das Wasser eintauchenden Drahtes ist n zweiten Versuche dasselbe, wenn der Draht ohne Dehnung um d der Verlängerung aus dem Wasser hervorgezogen wird. Das Vol

dann noch im Wasser befindlichen Drahtstückes ist

$$l \cdot r^2 \pi (1 - \tfrac{1}{2} \delta);$$

somit erhalten wir

$$l r^2 \pi (1 - 2 \mu \delta) = l r^2 \pi (1 - \tfrac{1}{2} \delta),$$

oder

$$2 \mu \delta = \tfrac{1}{2} \delta,$$

$$\mu = \tfrac{1}{4}.$$

Dieser Versuch gibt also für die Verminderung des zur Zugrichtung senkrechten Durchmessers eines Drahtes ein Viertel der Verlängerung, entsprechend der Theorie von Navier und Poisson.

Weder die theoretischen Entwicklungen, aus welchen der Wert $\mu = 0{,}25$ geschlossen wurde, noch auch der denselben bestätigende Versuch sind einwurfsfrei. Was zunächst den Versuch von Cagniard de Latour angeht, so kann man aus demselben mit Sicherheit kaum mehr schliefsen, als dafs bei der Verlängerung eine Querkontraktion eintritt; genaue Messungen sind bei der angewandten Methode nicht möglich. Denn zunächst ist die Änderung des Wasserniveaus in der Röhre, welche einen den Durchmesser des Drahtes weit übertreffenden Durchmesser hat, bei der an dem Draht überhaupt stattfindenden äufserst kleinen Änderung des Volumens so unbedeutend, dafs die geringste Ungenauigkeit beim Ablesen das Resultat wesentlich beeinträchtigen mufs, und eine solche Ungenauigkeit ist um so weniger zu vermeiden, da das Wasser die Innenwand der Röhre niemals ganz gleichmäfsig benetzt. Dazu kommt ferner, dafs der Draht beim Emporziehen aus der Flüssigkeit immer Flüssigkeit mit sich heraushebt, deren Menge zudem bei den verschiedenen Versuchen verschieden ist, schon aus dem Grunde, weil der Umfang des herausgezogenen Drahtes verschieden ist. So klein auch die Fehler sind, bei der Kleinheit der zu messenden Gröfsen wird die Sicherheit des Resultates dadurch wesentlich beeinträchtigt.

Spätere theoretische Untersuchungen haben dann auch gezeigt, dafs das aus den Untersuchungen von Navier und Poisson sich ergebende Resultat durch specielle nicht notwendige Annahmen erhalten ist; die Untersuchungen von Cauchy[1]), Lamé[2]) und Kirchhoff[3]) haben vielmehr gezeigt, dafs die Theorie der Elasticität nur zu dem vorhin bereits angedeuteten Resultate führt, dafs der Wert von μ zwischen 0 und $\tfrac{1}{2}$ liegt, dafs der Versuch in jedem Falle über den Wert von μ innerhalb dieser Grenzen entscheiden mufs.

Cauchy und in ganz ähnlicher Weise Lamé gehen von folgender Annahme aus. Denken wir uns ein rechteckiges Parallelepiped, welches nach allen Richtungen gleiche Elasticität besitzt; dasselbe erhalte auf zwei gegenüberliegenden Flächen, und zwar senkrecht zu denselben solche Ziehungen, dafs die Flächeneinheit den Zug p_1 erhält. Dieser Zug hat dann eine Verlängerung des Parallelepipeds in der Zugrichtung zur Folge, welche für die Längeneinheit des Parallelepipeds gleich δ_1 sei; in den zur Zugrichtung senkrechten Richtungen findet dann ebenfalls eine Veränderung der Seiten des

1) *Cauchy*, Exercices de Mathématiques. T. III. p. 182 und p. 205 ff.
2) *Lamé*, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. II. éd. p. 65 ff.
3) *Kirchhoff*, Crelles Journal. Bd. XL und LVI.

Parallelepipeds statt, so dafs die Breite desselben $B(1 + \mu\delta_1)$ und die Dicke $(1 + \mu\delta_1)$ wird. Ob diese letztere Veränderung eine Verlängerung oder Verkürzung sein wird, hängt dann von dem Vorzeichen von μ ab; ist μ positiv, so ist die seitliche Veränderung von derselben Art wie δ, ist es negativ, so ist die seitliche Veränderung jener in der Zugrichtung stattfindenden entgegengesetzt. Das Volumen des Parallelepipeds ist dadurch geworden

$$V(1 + \delta_1 + 2\mu\delta_1).$$

Die Volumeinheit hat sich somit um $\delta_1 + 2\mu\delta_1$ verändert. Setzen wir diese die Volumeinheit treffende Änderung gleich v, so nehmen Cauchy und Lamé an, dafs

$$p_1 = k\delta_1 + Kv,$$

worin k und K zwei von der Natur der Substanz des Parallelepipeds abhängige Konstante sind; sie machen also die Annahme, dafs man die durch den Zug p_1 im Innern hervorgebrachte der Zugrichtung parallele Spannung der parallel der Zugrichtung eintretenden Veränderung und der infolge dieses Zuges stattfindenden Volumänderung proportional setzen könne.

Werden nun die drei Flächenpaare des Parallelepipeds gleichzeitig durch Ziehungen p_1, p_2, p_3 angegriffen, so werden die jeder Zugrichtung parallelen Veränderungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sein, und das Volumen des Parallelepipeds V wird übergehen in

$$V\left(1 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)\right),$$

so dafs also die Veränderung der Volumeinheit v wird

$$v = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Diese drei Drucke p_1, p_2, p_3 oder die ihnen gleichen elastischen Spannungen sind in dem Falle nach obiger Annahme gegeben durch die drei Gleichungen:

$$p_1 = k\delta_1 + Kv; \quad p_2 = k\delta_2 + Kv; \quad p_3 = k\delta_3 + Kv.$$

Diese drei Gleichungen behalten ihre Gültigkeit, welches auch die Drucke p_1, p_2, p_3 sein mögen; also auch für den Fall, dafs zwei derselben, p_2 und p_3 gleich Null werden, dafs also das betrachtete Parallelepided nur nach einer Richtung einen Druck oder einen Zug erfährt, sie behalten ihre Gültigkeit für den Fall, den wir untersuchen. In dem Falle sind

$$k\delta_2 + Kv = k\delta_2 + Kv = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (a)$$

$$\delta_2 = \delta_3 = \mu\delta_1,$$

und die Volumveränderung wird dann

$$v = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta_1(1 + 2\mu).$$

Eine der beiden Gleichungen (a) liefert nun

$$v = -\frac{k}{K}\cdot\delta_2,$$

$$\delta_1(1+2\mu) = -\frac{k}{K}\cdot\mu\delta_1;$$

$$K + 2K\mu = -k\mu;$$

$$\mu = -\frac{K}{2K+k} = -\frac{1}{2+\frac{k}{K}}.$$

rgibt sich somit zunächst, da das Vorzeichen von μ negativ ist, eitliche Veränderung immer derjenigen in der Druckrichtung enttzt ist, dafs also beim Zuge eine Querkontraktion, beim ne Querdilatation eintritt. Ferner ergibt sich, dafs der μ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; welcher Wert dem Koefficienten ommt, das hängt von dem Verhältnis der beiden Kon- und K ab. Der von Navier und Poisson gegebene Wert gibt sich, wenn $k = 2K$ ist, eine Beziehung, die sich oretisch nicht folgern läfst. Überhaupt gibt die Theorie icität über die Beziehung zwischen diesen beiden Kon- einen weitern Aufschlufs, sie läfst es selbst unentschieden, Beziehung für alle Substanzen dieselbe ist, oder ob sie hiedene Substanzen verschieden sein könne.

Fig. 57.

theim[1]) schliefst aus seinen Versuchen das erstere, er seinen Versuchen mit Kautschuk, Glas und Messing dafs

$$\mu = -\tfrac{1}{3},$$

s $k = K$ ist, und glaubt deshalb, dafs diese Beziehung emein das Verhältnis der beiden Konstanten wiedergebe. che mit Kautschuk haben wir vorhin bereits erwähnt; δ nur etwa $\frac{1}{2}$ beträgt, findet sich in der That μ ziemlich ich $\frac{1}{3}$.

len anderen Versuchen wandte er auf einen Vorschlag von ohne Naht gezogene Röhren von Messing oder Glasröhren 57) an, welche mit ihren Enden an andere kurze, aber Röhren $B'B'$ befestigt waren. Die untere war unten ver-, die obere an beiden Seiten offen, und an ihrem obern einer Fassung versehen, durch welche eine sehr enge F mit dem Innern der Röhre kommunicierte. Diese so teten Röhren wurden mit Wasser bis zur Marke F der gefüllt. Man befestigte die Röhre an ihrem obern dafs sie vertikal herabhing, und belastete sie an ihrem nde mit einem Gewichte p. Sie dehnte sich dann gerade ie ein solider Metallstab von derselben Substanz.

mafs einerseits die Verlängerungen dieser Vorrichtung, its das Herabsinken der Flüssigkeit in der Glasröhre F. uch ergab somit sowohl die Verlängerung δ für die nheit als auch andererseits die Vergröfserung $\delta(1-2\mu)$ nens für die Volumeinheit, und man hatte diese nur zu vergleichen. nun in Übereinstimmung mit den Versuchen am Kautschuk, dafs

[1]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII. Poggend. L LXXVIII.

$\delta(1 - 2\mu) = \frac{1}{3}\delta$, also $\mu = \frac{1}{3}$ war, dafs also die Änderung des Durchmessers für die Längeneinheit $\frac{1}{3}\delta$ war.

Die nach dieser Methode von Wertheim erhaltenen Zahlen, zusammengestellt mit den nach dem Poissonschen und dem Wertheimschen Werte von μ aus der beobachteten Verlängerung berechneten Werte der Volumvermehrung enthält folgende kleine Tabelle.

No. der Röhren		$V \cdot \delta(1 - 2\mu)$		
		berechnet mit $\mu = \frac{1}{4}$	beobachtet	berechnet mit $\mu = \frac{1}{3}$
Messing	I	0,81047	0,52017	0,54032
	II	0,87866	0,54363	0,58578
	III	0,88949	0,56104	0,59299
Glas	I	5,3650	3,8613	3,5767
	II	4,0639	2,4217	2,7093
	III	1,5282	1,1472	1,0188
	IV	1,1938	0,7786	0,7959

Für Glas ergeben diese Versuche ziemlich genau den Wert $\mu = \frac{1}{3}$, da die damit berechneten Werte der Volumveränderung bald gröfser bald kleiner als die beobachteten, und die Abweichungen nicht zu grofs sind; für Messing ist dagegen trotz der ziemlich guten Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung dieser Wert zweifelhaft, da mit $\mu = \frac{1}{3}$ alle berechneten Zahlen zu grofs werden; für Messing würde man aus diesen Beobachtungen $\mu = 0{,}315$ ableiten.

Man würde deshalb schon aus Wertheims Resultaten eher den Schlufs ziehen, dafs μ für verschiedene Substanzen verschieden sein kann, als dafs es stets denselben Wert $\frac{1}{4}$ hat, ein Schlufs, den auch die Versuche von Kirchhoff zu bestätigen scheinen. Kirchhoff[1]) bestimmte den Wert von μ, indem er an verschiedenen Stäben durch bestimmte Gewichte gleichzeitig Biegung und Torsion hervorbrachte; gerade wie nämlich der Elasticitätskoefficient, wenn man ihn durch k und K ausdrücken will, den Wert von μ enthält, so ist auch auf Torsion und Biegung die Querkontraktion von Einflufs, so dafs, wenn man beide beobachtet hat, sich daraus μ berechnen läfst. Die Versuche sind gemacht an drei Stäben von glashartem Stahl und an einem Stabe von hartgezogenem Messing. Für die ersten drei Stäbe fand er im Mittel $\mu = -0{,}294$, nämlich

für den ersten Stab $\mu = -0{,}293$,
" " zweiten " $\mu = -0{,}295$,
" " dritten " $\mu = -0{,}294$.

Für den Messingstab erhielt er dagegen $\mu = -0{,}387$, einen Wert also, der den für Stahl gefundenen und auch den von Wertheim allgemein angenommenen nicht unbeträchtlich übersteigt. Kirchhoff glaubt dem für das Messing gefundenen Werte μ nicht dieselbe Bedeutung beilegen zu können,

[1]) *Kirchhoff*, Poggend. Annal. Bd. CVIII. p. 369 ff.

da das gezogene Messing parallel der Zugrichtung eine andere Elasticität haben könne als senkrecht dazu; indes wird man wohl kaum den grofsen Unterschied zwischen Messing und Stahl lediglich dieser Verschiedenheit im Messing zuschreiben können.

Dieselbe Methode, welche Kirchhoff anwandte, hat später Okatow[1] benutzt, um die Querkontraktion einer Anzahl verschiedener Stahlstäbe zu untersuchen; es ergab sich dabei, dafs der Wert von μ sowohl für verschiedene Stahlarten von demselben Zustande als auch für dieselbe Stahlart in verschiedenen Zuständen verschieden ist. Er erhielt z. B. folgende Werte für μ

	Stricknadelstäbchen.	Glatter runder engl. Stahl
a) ursprünglicher Zustand	$\mu = -0,2750$	$\mu = -0,2989$
b) in Öl gehärtet	$\mu = -0,2969$	$\mu = -0,3280$
c) ausgeglüht und langsam abgekühlt	$\mu = -0,3037$	$\mu = -0,3281$.

Die für den glatten runden englischen Draht angegebenen Werte wurden fast ganz übereinstimmend an Drähten verschiedener Dimensionen gefunden, die Dicken waren etwa 4, 5 und 6^{mm}. Okatow glaubt, dafs der ganz weiche Stahl der vollen Gleichheit nach allen Richtungen am nächsten kommt; deshalb spricht die Verschiedenheit von μ für die verschiedenen Stahlsorten auch in diesem Zustande dafür, dafs der Wert des Verhältnisses von Querkontraktion und Verlängerung nicht für alle Körper derselbe ist.

Für eine Anzahl von Stäben aus glattem runden Stahl, deren Länge bis zu 1 Meter, deren Durchmesser bis zu 2^{cm} betrug, erhielt Schneebeli[2]) nach einer Methode, welche wir im dritten Abschnitt § 144 besprechen werden, als Wert von $\mu = -0,296$, als die Stäbe federhart, und $\mu = -0,303$, als die Stäbe ganz weich waren; Werte, welche mit denen von Kirchhoff und von Okatow für die erste Stahlart erhaltenen vortrefflich übereinstimmen.

Gegenüber der hier ausgesprochenen Ansicht, dafs der Wert von μ für die verschiedenen Körper verschieden sei, hat kürzlich Cornu[3]) wieder die Ansicht verteidigt, dafs für wirklich nach allen Richtungen gleichmäfsig elastische Körper der Wert von $\mu = -0,25$ sein müsse. Er glaubt, dafs Glas diesem gleichmäfsig elastischen Zustand am nächsten kommt, und findet für dieses nach einer Methode, deren Princip wir im § 53 andeuten können, in der That Werte, welche nur wenig von 0,25 abweichen; sie liegen bei 6 Glasprismen zwischen $\mu = -0,224$ und $-0,257$.

Es ist indes wohl anzunehmen, dafs, wie Okatow hervorhob, ein durch langsame Abkühlung ganz weich gewordener Stahl ebenso vollkommen nach allen Richtungen gleich elastisch ist als Glas, und dann würden die Versuche Cornus eher für die eben ausgesprochene Ansicht, dafs μ nicht für alle Körper denselben Wert hat, ein Beleg sein.

---

1) *Okatow*, Poggend. Ann. Bd. CXIX.
2) *Schneebeli*, Poggend. Ann. Bd. CXL.
3) *Cornu*, Comptes Rendus. Bd. LXIX. pag. 333.

§ 50.

Kubische Zusammendrückbarkeit der festen Körper. Die in den beiden letzten Paragraphen besprochenen Konstanten, der Elasticitätskoefficient und die Querkontraktion bedingen alle Erscheinungen, welche durch die Elasticität der festen Körper hervorgerufen werden; sind diese beiden Gröfsen bekannt, so kann man alle Veränderungen, welche durch äufsere Kräfte an dem Körper hervorgebracht werden, berechnen. Umgekehrt kann man aber auch aus derartigen Beobachtungen die eine oder die andere Konstante ableiten. Da wir nun aus den longitudinalen Änderungen, sei es durch direkte Beobachtung, sei es durch die im dritten Abschnitt ausführlicher zu besprechenden longitudinalen Schwingungen, den Elasticitätskoefficienten mit grofser Sicherheit ableiten können, so können wir die meisten elastischen Veränderungen gleichzeitig benutzen, um den Wert von μ zu bestimmen.

Wir betrachten zunächst die kubische Zusammendrückbarkeit der Körper, das heifst die Volumverminderung eines festen Körpers, wenn er von allen Seiten ganz gleichmäfsig durch Kräfte, welche an jedem Punkte der Oberfläche normal zu derselben wirken, zusammengedrückt wird. Bei derartig wirkenden Kräften verändern sich die Dimensionen des Körpers alle in demselben Verhältnisse, seine Gestalt bleibt sich immer ähnlich, und es tritt nur eine Verminderung seines Volumens ein. In welcher Weise diese Volumverminderung von den beiden Konstanten, dem Elasticitätskoefficienten und dem Querkontraktionskoefficienten abhängt, ergibt sich auf folgende Weise.

Für ein rechteckiges Parallelepiped hatten wir nach Cauchy ganz allgemein

$$p = k\delta + Kv \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1),$$

wenn p den auf die Flächeneinheit ausgeübten normalen Druck, δ die diesem Druck entsprechende lineare der Druckrichtung parallele Änderung, v die dabei stattfindende Änderung des Volumens, und k und K zwei Konstanten bezeichnen.

Für den Fall nun, dafs die Kraft p nur an den Endflächen des Stabes wirkt, wird, wie wir sahen,

$$v = \delta(1 - 2\mu)$$

und μ gleich

$$\mu = \frac{K}{2K + k},$$

wenn wir jetzt mit μ den Zahlenwert der Querkontraktion bezeichnen.

Hieraus folgt dann für v, die Volumänderung, die bei dem Zug eintritt,

$$v = \delta(1 - 2\mu) = \delta\left(1 - \frac{2K}{2K + k}\right) = \delta \frac{k}{2K + k}.$$

Setzen wir diesen Wert für v in die Gleichung (1) ein, so wird

$$p = k \cdot \delta\left(1 + \frac{K}{2K + k}\right)$$

$$p = \frac{3K + k}{2\frac{K}{k} + 1} \cdot \delta \quad \cdots\cdots\cdots (2).$$

Wir haben vorhin als Elasticitätskoefficienten jene Kraft definiert, welche a den Enden eines Parallelepipeds wirkend die Länge desselben in der Zugichtung verdoppeln würde, welche somit $\delta = 1$ macht. Die Gleichung (2) liefert ns deshalb den Elasticitätskoefficienten in den beiden Konstanten K und k

$$E = \frac{3K + k}{2\frac{K}{k} + 1} \quad \ldots \quad (3).$$

Der reciproke Wert des Elasticitätskoefficienten gibt uns die lineare Ausdehnung des Parallelepipeds oder seine Verkürzung, wenn die an den Endflächen wirkende Kraft der Einheit gleich ist, oder den linearen Ausdehnungskoefficienten, mit dem wir in jedem Falle die wirksame Kraft multiplicieren müssen, um die Verlängerung oder Verkürzung des ausgedehnten Parallelepipeds oder Cylinders zu erhalten. Bezeichnen wir diesen Quotienten mit C, so ist derselbe

$$C = \frac{2\frac{K}{k} + 1}{3K + k}.$$

Wird nun das Parallelepiped von allen Seiten ganz gleichmäfsig zusammengedrückt oder ausgedehnt, so ist δ nach allen drei Richtungen sselbe, und damit wird die Volumsveränderung $v = 3\delta$ oder die dann ich einer Richtung stattfindende Linearänderung gleich $\frac{1}{3}v$. Damit erhalten ir aus der Gleichung (1), indem wir δ durch v ausdrücken,

$$p = \tfrac{1}{3}kv + Kv = \frac{3K + k}{3} \cdot v,$$

$$v = \frac{3}{3K + k} \cdot p.$$

Der Koefficient der kubischen Kompressibilität, der Koefficient, mit n wir den auf der Flächeneinheit normal zu derselben wirkenden Druck ltiplicieren müssen, um für das Parallelepiped die Änderung der Volumheit zu erhalten, ist somit

$$C_1 = \frac{3}{3K + k} \quad \ldots \ldots \quad (4);$$

man sieht, hängt derselbe wesentlich ab von dem Verhältnis der beiden nstanten K und k.

Kennt man für eine Substanz den Wert von E oder C, und beobachtet n den kubischen Kompressionskoefficienten C_1, so kann man aus beiden Wert des Verhältnisses K und k ableiten. Dividieren wir nämlich beide rch einander, so wird

$$\frac{C_1}{C} = \frac{3}{2\frac{K}{k} + 1},$$

$$\frac{K}{k} = \frac{3C - C_1}{2C_1}.$$

Wir können aber auch direkt C_1 sowie K und k durch C oder E und μ sdrücken.

Die Gleichung (3) liefert

$$E\left(2\frac{K}{k} + 1\right) = 3K + k \quad \ldots \quad (3a),$$

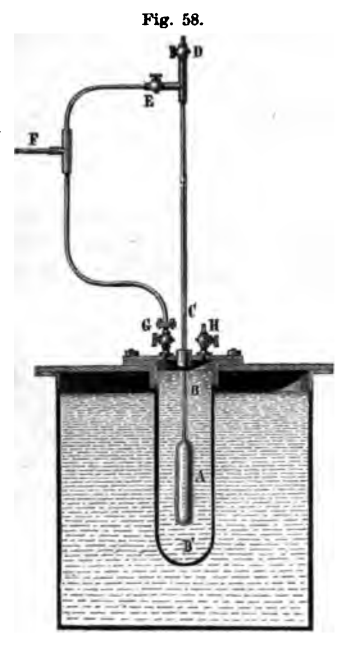
oder da
$$1 - 2\mu = \frac{k}{2K + k} \quad \cdots \cdot (3\text{b}),$$
in Verbindung mit Gleichung (4)
$$\frac{E}{1 - 2\mu} = \frac{3}{C_1}$$
$$C_1 = 3\,\frac{1 - 2\mu}{E} = 3C(1 - 2\mu).$$

Die Gleichungen (3a) und (3b) liefern ferner
$$K = E\,\frac{\mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}\,;\quad k = \frac{E}{1 + \mu}\,.$$

Ebenso wie man hiernach aus den bekannten Werten von E den Wert von C_1 erhalten kann, läfst sich auch der Wert von μ a Beobachtungen von C_1 und E ableiten.

Über die Kompression fester Körper hat Regnault bei Gele seiner Untersuchung über die Kompression der Flüssigkeiten einig suche angestellt[1]). Er benutzte zu diesen Versuchen Gefäfse, dere und Substanz genau bestimmt waren, entweder Kugeln von Kupf Messing, deren innerer und äufserer Durchmesser mit gröfster Gen gemessen war, und mit deren Inne lange Glasröhre in Verbindung stan er nahm ein Glasgefäfs A (Fig. 58), innere Kapacität und dessen äufseres V mit gröfster Sorgfalt bestimmt wa Gefäfse füllte er bis zu einer Marke Wasser, welche sich auf der Glasrö dem Halse des Gefäfses befindet. senkte er das Gefäfs in einen rings geschlossenen mit Wasser gefüllten I BB' und übte auf das Wasser des B einen Druck P aus, indem er aus ei hälter durch die Röhrenleitung FG schlossenem Hahn E auf die Oberflä Wassers in B komprimierte Luft wirk Auf diese Weise drückte er das Gefäfs allen Seiten ganz gleichmäfsig zusamn Volumen desselben verminderte sich dem Druck proportionale Gröfse, u sah das Wasser in der Röhre über C steigen; die Steighöhe mifst man a auf dem Rohre angebrachten Teilun kann nun die durch den äufsern Druck gebrachte Volumverminderung aus de höhe des Wassers ableiten, wenn man die Kapacität der Röhre hältnis zum Volumen des ganzen Gefäfses kennt. Dieses Verhältni durch Wägung genau bestimmt.

Fig. 58.



---

1) *Regnault*, Relation des expériences etc. Mémoires de l'Acad sciences de l'Institut de France. T. XXI.

Aus den Beobachtungen der Volumverminderung von Hohlräumen läfst sich nicht unmittelbar auf den kubischen Kompressionskoefficienten des Materials schliefsen, aus welchem die Wandung des Hohlraumes gefertigt ist, da die Volumverminderung des Hohlraumes eine andere sein mufs als jene eines massiven Körpers, welche den Hohlraum ausfüllen würde. Dafs das der Fall sein mufs, ergibt sich aus der einfachen Überlegung, dafs, wenn der Hohlraum mit demselben Material angefüllt ist, durch die Kompression im Innern desselben eine Spannung entstehen mufs, welche den komprimierenden Kräften entgegenwirkt, welche Spannung fortfällt, wenn der innere Raum leer ist oder eine Flüssigkeit enthält, welche, wie bei den Versuchen von Regnault, aus dem Hohlraum infolge der Verminderung des Volumens austritt. Die Theorie der Elasticität gestattet aber auch in diesem Falle, die durch die Kompression eintretende Volumverminderung zu berechnen.

Durch den auf die äufsere Kugelfläche wirkenden Druck werden die Radien der Kugel verkleinert; bezeichnen wir den Radius der innern Kugelfläche vor der Kompression mit R_0, so wird derselbe nach der Kompression $R_0(1 - \varphi_0)$, wenn wir mit φ_0 einen sehr kleinen gleich zu bestimmenden Bruch bezeichnen. Der Hohlraum der Kugel, welcher vor der Kompression $\frac{4}{3}R_0^3\pi$ war, wird deshalb nach der Kompression $\frac{4}{3}R_0^3(1 - \varphi_0)^3\pi$ oder, da φ_0 nur sehr klein ist, $\frac{4}{3}R_0^3(1 - 3\varphi_0)\pi$. Die stattgefundene Volumverminderung ist deshalb

$$\Delta V = \frac{4}{3}R_0^3\pi - \frac{4}{3}R_0^3\pi(1 - 3\varphi_0) = \frac{4}{3}R_0^3\pi \cdot 3\varphi_0$$

oder in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens V

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\varphi_0.$$

Die Theorie der Elasticität ergibt nun[1]), dafs bei einer Hohlkugel, welche auf ihrer äufsern Fläche gleichmäfsig zusammengeprefst wird, die Verkürzung φ der Radien einer in der Kugelschale liegenden Kugelfläche vom Radius r gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = c + \frac{b}{r^3},$$

worin c und b zwei Konstante sind, welche abhängig sind von dem Drucke, den die Kugel erfährt, und den Radien der äufsern und innern Fläche der Hohlkugel. Sind diese beiden Radien R_1 und R_0, und ist der Druck, der auf die Flächeneinheit der äufsern Fläche wirksam ist, gleich P_1, der auf die Flächeneinheit der innern Fläche wirkende gleich P_0, so erhält man für diese beiden Konstanten den Wert

$$c = \frac{1}{3K + k} \cdot \frac{P_1 R_1^3 - P_0 R_0^3}{R_1^3 - R_0^3}; \quad b = \frac{1}{2k} \cdot \frac{R_0^3 R_1^3 (P_1 - P_0)}{R_1^3 - R_0^3}$$

oder, wenn, wie bei den Versuchen von Regnault P_0, der Druck auf die innere Fläche der Hohlkugel gleich 0 ist,

$$c = \frac{1}{3K + k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1; \quad b = \frac{1}{2k} \cdot \frac{R_0^3 \cdot R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

[1]) Man sehe *Lamé*, théorie mathématique de l'élasticité des corps solides p. 211 ff. *Clebsch*, Theorie der Elasticität fester Körper § 18. p. 50 ff.

Daraus folgt dann für φ

$$\varphi = P_1 \left\{ \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{1}{2k} \cdot \frac{R_0^3 \cdot R_1^3}{r^3 (R_1^3 - R_0^3)} \right\}.$$

Es folgt somit, dafs in diesem Falle die Radien der verschiedene[n] der Hohlkugel liegenden Kugelflächen nicht in demselben Verhältnisse kürzt werden, dafs die Verkürzung vielmehr eine relativ kleinere ist näher die Kugelfläche der äufsern Grenzfläche der Hohlkugel liegt. relativ gröfste Verkürzung erhält der Radius der die Hohlkugel nach i begrenzenden Kugelfläche, für welche r den kleinsten Wert, nämlich hat. Setzen wir diesen Wert von r in die Gleichung für φ ein, so erh wir φ_0, dessen dreifacher Wert die Volumverminderung des Hohlra ist, oder

$$3\varphi_0 = \frac{\Delta v}{V} = 3 \left\{ \frac{1}{3K+k} + \frac{1}{2k} \right\} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Drücken wir hierin K und k durch E und μ aus, so wird

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{9}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Die Kompression einer massiven Kugel erhalten wir aus den o Ausdrücken, indem wir den Radius der innern Hohlkugel, also R_0 gle setzen. Damit wird b gleich 0, und wir bekommen

$$\varphi = \frac{1}{3K+k} \cdot P_1$$

und die Volumverminderung einer in der massiven Kugel gedachten von gleichem Volum wie die Hohlkugel

$$\frac{\Delta V_1}{V} = 3 \frac{1}{3K+k} \cdot P_1 = 3 \frac{1-2\mu}{E} \cdot P_1 = C_1 \cdot P_1.$$

Es ergibt sich also auch auf diesem Wege, dafs die Kompression massiven Kugel gerade wie die eines massiven Parallelepipeds glei dem Produkte aus dem Kompressionskoefficienten und dem auf die Flä einheit der Kugel wirkenden normalen Drucke, dafs dagegen die V verminderung der Hohlkugel eine stärkere ist; das Verhältnis beider

$$\frac{\Delta V}{\Delta V_1} = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Der Ausdruck für ΔV läfst aber erkennen, dafs wir aus der beo teten Volumverminderung des Hohlraumes, wenn E bekannt ist, μ u berechnen können. Bezeichnen wir den direkt aus der Beobachtun Volumverminderung der Kugel sich ergebenden Kompressionskoeffici mit C_2,

$$\frac{9}{2} \frac{1-\mu}{E} = C_2,$$

so wird

$$\mu = 1 - \frac{2}{9} C_2 \cdot E.$$

Folgende Tabelle enthält die von **Regnault** an einer Hohlkuge Kupfer ausgeführten Versuche. Bei dieser Kugel waren

$$R_1 = 29^{\text{mm}},9; \quad R_0 = 29^{\text{mm}},105; \quad V = 109^{\text{cc}},11.$$

$\frac{\Delta V}{V}$	P_1	C_2
0,000 112 556	2,8017	0,000 003 123
0,000 177 533	4,3687	0,000 003 156
0,000 233 944	5,6753	0,000 003 140
0,000 265 950	6,4502	0,000 003 224
0,000 329 544	7,8202	0,000 003 273

Die Drucke P_1 sind in Atmosphären angegeben; die Einheit des Druckes abei, wie wir später nachweisen werden, 0,010 333 Kilogramm auf das lratmillimeter; um den Wert C_2 für ein Kilogramm zu erhalten, müssen daher die oben angeführten Werte mit 0,010 333 dividieren.

Die beiden letzten Beobachtungsreihen weichen von den drei ersten edeutend ab, dafs wir annehmen müssen, es habe dort bereits eine ende Deformation der Kugel stattgefunden. Nehmen wir das Mittel len drei ersten Zahlen, so wird

$$C_2 = 0{,}000\,003\,139 \text{ oder für 1 Kilogramm } = 0{,}000\,303\,9.$$

Für weiches Kupfer erhielt Wertheim (§ 48)

$$E = 10519$$

ler direkten Beobachtung der Verlängerung. Damit wird

$$\mu = 1 - 0{,}7103 = 0{,}2897$$
$$C_1 = 1{,}2618 \cdot C = 0{,}000\,119\,9.$$

Der kubische Kompressionskoefficient ist hiernach etwa $\frac{5}{4}$ des linearen, ler Wert von μ würde etwa dem des harten Stahles gleich sein.

Die Versuche mit der Messingkugel finden sich in der folgenden Tabelle nmengestellt; für diese Kugel war

$$R_1 = 29^{mm},45\,; \quad R_0 = 28^{mm},73\,; \quad V = 102^{cc},71.$$

$\frac{\Delta V}{V}$	P_1	C_2
0,000 074 569	1,5834	0,000 003 370
0,000 112 723	2,4282	0,000 003 325
0,000 150 909	3,2233	0,000 003 350
0,000 190 904	4,0254	0,000 003 392
0,000 222 921	4,7319	0,000 003 371
0,000 262 613	5,5724	0,000 003 372
0,000 299 431	6,3860	0,000 003 355
0,000 335 997	7,1860	0,000 003 345
0,000 396 031	8,4119	0,000 003 369
0,000 433 301	9,1515	0,000 003 387

Die Konstanz der Werte von C_2 beweist, dafs hier auch bei den iten Drucken die Elasticitätsgrenze noch nicht überschritten ist; als

Mittel ergibt sich aus den zehn Beobachtungen

$$C_2 = 0{,}000\,003\,363 \text{ oder für ein Kilogramm } 0{,}000\,325\,6.$$

Der Wert von E für Messing ist nach Wertheims Bestimmungen[1])

$$E = 9271 \text{ und daraus } C = 0{,}000\,107\,8.$$

Somit wird

$$\mu = 1 - 0{,}6708 = 0{,}3292$$

$$C_1 = 1{,}025 \cdot C = 0{,}000\,110\,6.$$

Der Wert von μ entspricht somit hier ziemlich genau dem von Wertheim angenommenen, der kubische Kompressionskoefficient ist demzufolge fast genau gleich dem linearen.

Aufser diesen Versuchen hat Regnault auch die Kompression einer Glasröhre bestimmt, welche die Form eines Cylinders mit halbkugelförmigen Endflächen besafs. Um die Kompression eines solchen Gefäfses zu berechnen, hat man dasselbe in zwei Teile zerlegt zu denken, in den Cylinder mit geraden Endflächen und in die aus den beiden Halbkugeln zusammengesetzte Kugel. Wird jeder dieser Teile unter denselben Umständen für sich zusammengedrückt, so ist die Summe der Kompressionen gleich der Kompression des zu diesen Versuchen benutzten Gefäfses. Es folgt das aus der Überlegung, dafs der Druck auf die zur Längsaxe senkrechten Endflächen desselben durch Vermittlung der Halbkugeln gerade so wirkt, wie wenn er direkt auf die Endflächen wirken würde, da diese Endflächen gröfste Kreise der aus den Halbkugeln gebildeten Kugel sind.

Bezeichnen wir die Radien der Halbkugeln wie vorhin mit R_0 und R_1, den auf der Flächeneinheit der äufsern Fläche wirkenden Druck mit P_1, so erhalten wir zunächst für die Volumverminderung der Kugel wie vorhin

$$\Delta V = 3\left\{\frac{1}{3K+k} + \frac{1}{2k}\right\}\frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1 V,$$

oder, wenn wir K und k durch μ und E ausdrücken,

$$\Delta V = \tfrac{9}{2}\,\frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3}\, P_1 V,$$

wenn V das Volumen der Kugel bezeichnet.

Die Volumverminderung des Cylinders erhalten wir auf folgende Weise. Ist H die Höhe des Cylinders, R_0 der Radius desselben, so ist das Volumen desselben vor der Kompression

$$V_1 = R_0^2 \pi \cdot H.$$

Geht nun durch die Kompression die Höhe desselben über in $H(1-\delta)$, der Radius in $R_0(1-\varphi_0)$, so wird

$$V_1 - \Delta V_1 = R_0^2 \pi H (1-\delta)(1-\varphi_0)^2 = R_0^2 \pi H (1 - \delta - 2\varphi_0)$$

und daraus

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \delta + 2\varphi_0.$$

1) Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XII. p. 598.

Für die Verkürzung δ der Längsaxe liefert die Theorie der Elasticität len Wert[1])

$$\delta = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^2 P_1 - R_0^2 P_0}{R_1^2 - R_0^2},$$

wo R_1, R_0 die Radien der innern und äufsern Cylinderfläche, welche bei len Versuchen von Regnault denen der Halbkugel gleich sind, und P_1, P_0 lie auf die Flächeneinheiten der äufsern und innern Fläche wirkenden)rucke sind. Da auch bei diesen Versuchen $P_0 = 0$ ist, so wird

$$\delta = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Für die Verkürzung φ eines Radius der Cylinderschale erhält man ganz ıalog wie bei der Kugel

$$\varphi = c + \frac{b}{r^2},$$

so für die Verkürzung des Radius der innern Cylinderfläche, für welche $= R_0$ ist,

$$\varphi_0 = c + \frac{b}{R_0^2}.$$

Die beiden Konstanten c und b erhalten hier folgende Werte

$$c = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^2 P_1 - R_0^2 P_0}{R_1^2 - R_0^2}; \quad b = \frac{1}{k} \cdot \frac{R_0^2 R_1^2 (P_1 - P_0)}{R_1^2 - R_0^2},$$

er, wenn wie bei den Versuchen von Regnault $P_0 = 0$,

$$c = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1; \quad b = \frac{1}{k} \cdot \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1.$$

Daraus folgt

$$\varphi_0 = \left\{ \frac{1}{3K+k} + \frac{1}{k} \right\} \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1,$$

d schliefslich

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \delta + 2\varphi_0 = \left\{ \frac{3}{3K+k} + \frac{2}{k} \right\} \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1.$$

Ersetzen wir auch hier K und k durch μ und E, so wird

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \frac{5 - 4\mu}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1.$$

Für die Volumverminderung des ganzen Hohlraumes erhalten wir nach

$$V + \Delta V_1 = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1 V + \frac{5 - 4\mu}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot P_1 V_1$$

er

$$\frac{V + \Delta V_1}{+ V_1) \cdot P_1} = \left\{ \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot V + \frac{5-4\mu}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \cdot V_1 \right\} \frac{1}{V + V_1}.$$

Wäre das der Kompression ausgesetzte Gefäfs massiv, also $R_0 = 0$, würde, da die Konstante b für Kugel und Cylinder dann gleich Null wird,

---

[1]) Man sehe *Lamé* a. a. O. p. 188 ff.

die Kompression des dem Hohlraum gleichen Volumens auch jetzt wied

$$\frac{\Delta V + \Delta V_1}{V + V_1} = 3\,\frac{1-2\mu}{E} \cdot P_1 = C_1 P_1.$$

Man sieht somit, dafs auch jetzt gemäfs unserer vorigen Bemerl die Kompression eine stärkere ist.

Um aus dieser Beobachtung μ zu berechnen, haben wir nur (Gleichung nach μ aufzulösen. Setzen wir, um abzukürzen,

$$\frac{\Delta V + \Delta V_1}{(V + V_1) \cdot P_1} = a; \quad \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = M; \quad \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = N,$$

so erhält man leicht

$$\frac{\frac{3}{2} N \cdot V + 5 M V_1 - a(V + V_1) \cdot E}{\frac{3}{2} N V + 4 M V_1} = \mu.$$

Bei den Versuchen von Regnault waren

$$R_1 = 12^{mm},128\,; \quad R_0 = 10^{mm},728\,; \quad H = 208^{mm},7\,;$$
$$V_1 = 75^{cc},499\,; \quad V = 5^{cc},167\,; \quad V + V_1 = 80^{cc},666.$$

Als Mittel aus 10 Versuchsreihen, in denen P_1 von 2,5 bis Atmosphären zunahm, ergab sich für $P_1 = 1$ Atmosphäre

$$a = 0{,}000\,028\,289\,,$$

somit für $P_1 = 1$ Kilogramm

$$a = 0{,}002\,739.$$

Ferner gibt Wertheim als Resultat der Ausdehnungsversuche für

$$E = 6040\,; \quad C = \frac{1}{E} = 0{,}000\,165\,5.$$

Damit wird

$$\mu = 0{,}319\,; \quad C_1 = \frac{1{,}086}{E} = 0{,}000\,179.$$

Die Versuche von Regnault bestätigen die am Schlusse des v Paragraphen ausgesprochene Ansicht, dafs der Wert von μ für di schiedenen Stoffe verschieden ist.

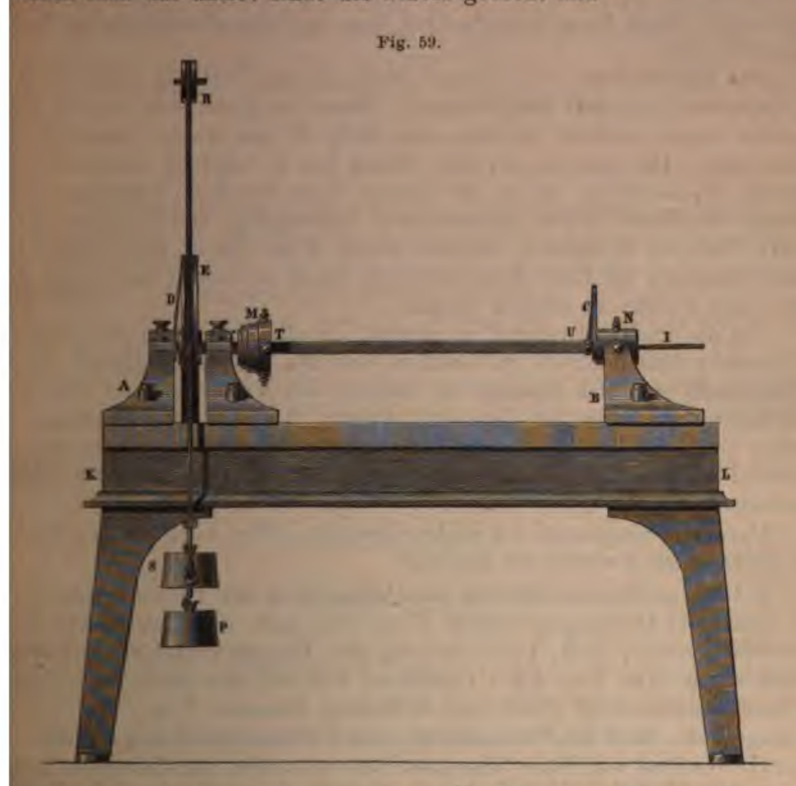
§ 51.

Torsionselasticität. Bisher haben wir vorausgesetzt, dafs di einen festen Körper wirkenden Kräfte stets normal gegen die Obe gerichtet waren, so dafs nur Verlängerungen oder Verkürzunge Dimensionen des Körpers eintraten. Wir können aber die Kräfte a anderen Richtungen wirken lassen, so dafs neben den Veränderunge Dimensionen des Körpers auch Verschiebungen der Moleküle gegen ein vorkommen. Bei der Untersuchung der dann eintretenden Änderung schränken wir uns auf die Betrachtung der einfachsten Fälle, wir beg mit der experimentellen Untersuchung der elastischen Kräfte, welch treten, wenn wir die einzelnen Schichten eines Stabes dadurch gegen ein verschieben, dafs wir alle, die einen mehr, die andern weniger um ei Innern des Stabes liegende Axe drehen.

[1]) *Wertheim,* Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XIX. p. 1!

Wir erreichen das auf die einfachste Weise, wenn wir einen Stab oder inen Draht an seinem einen Ende befestigen, an seinem andern Ende einen ur Längsrichtung des Stabes senkrechten Hebelarm anbringen und an dem Hebel eine Kraft wirken lassen, welche den Stab um seine Längsaxe dreht. Es entwickelt sich dann in dem Stabe, durch die Verschiebung der dem ntern Ende näher liegenden Schichten gegen die entfernteren eine der rehung entgegenwirkende Kraft, welche wächst mit dem Winkel, um elchen man das untere Ende des Stabes gedreht hat.

Fig. 59.



Nennen wir das Drehungsmoment des Gewichtes P, welches wir an bracht haben, p, so dreht sich der Stab so lange, bis zu einem solchen inkel ω, dafs das Drehungsmoment, welches die Gegenwirkung des Stabes usübt, um ihn zurückzudrehen, gleich ist dem Drehungsmoment p. Es eten demnach bei der Torsion eines Stabes oder Drahtes immer zwei rehungsmomente auf, welche, unter sich gleich, sich das Gleichgewicht halten. as rückwirkende Drehungsmoment des Drahtes bezeichnet man mit dem amen der Torsionskraft; es ist unsere Aufgabe, zu untersuchen, welche eziehung zwischen dieser und dem Drehungswinkel besteht.

Die ausgedehntesten Versuche zur Beantwortung dieser Frage hat ertheim[1]) angestellt; er bediente sich dazu des Apparates Fig. 59.

[1]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. t. 50. p. 202 ff.

Derselbe besteht aus einer schweren eisernen Bank, auf welcher sich zwei Aufsätze befinden, ähnlich denen einer Drehbank. Der erstere, B ist beweglich, er dient dazu, das eine Ende des Stabes U, den man untersuchen will, festzuhalten. Zu dem Ende trägt er ein durchbohrtes Stück, durch welches der Stab hindurchgesteckt wird, und in welchem er mittels einer Druckschraube N festgeklemmt wird.

Es ist notwendig, dafs dieses Ende U des Stabes während der Versuche ganz fest ist; um sich davon zu überzeugen, ist an ihm ein Zeiger C angebracht, dessen Ende immerfort auf eine am Apparat angebrachte Marke hinzeigen mufs.

Das vordere Ende T des Stabes ist in gleicher Weise in die hohle Axe M eingesteckt und dort festgeklemmt. Diese Axe kann sich in zwei horizontalen Lagern drehen; sie trägt eine Rolle E, um welche zwei Schnüre gelegt sind. Die erste ist an dem Haken bei E befestigt und trägt das Gewicht P, die zweite ist an der andern Seite der Rolle befestigt, steigt von dort zur Rolle R auf, ist um diese herumgelegt und trägt an ihrem andern Ende ein Gewicht S, welches gleich P ist. Es ist klar, dafs diese beiden Gewichte die Rolle E in gleichem Sinne zu drehen und somit dem Stabe eine Torsion zu erteilen streben.

Um die erteilte Drehung zu messen, ist die eine Seite der Rolle E mit einem geteilten Kreise zu versehen, auf den ein unbeweglicher Zeiger D eingestellt ist. Man bemerkt die Stellung des Kreises vor der Drehung und neuerdings, wenn die Gewichte wirken; die gemessene Drehung des Kreises ist gleich dem Torsionswinkel ω. Wir haben nun zu untersuchen, welche Beziehung zwischen dem Winkel ω und der Wirkung der beiden Gewichte P besteht.

Das Drehungsmoment der beiden Gewichte, $2P\varrho$, wenn wir den Radius der Rolle gleich ϱ setzen, sei gleich F.

I. Untersucht man zunächst die Abhängigkeit des Torsionswinkels von der Gröfse des Drehungsmomentes F, so zeigt sich, dafs, wenn wir F im Verhältnis von 1, 2, 3, 4 · · · ändern, die Torsionswinkel in demselben Verhältnis ω, 2ω, 3ω, 4ω · · werden. Da, wie wir sahen, die gegenwirkende Torsionskraft gleich dem drehenden Momente F ist, so folgt der wichtige Satz, dafs die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist.

II. Wenden wir Stäbe derselben Substanz, aber verschiedener Länge an, so dafs die Längen im Verhältnis 1, 2, 3, 4 · · stehen, so findet man bei Anwendung derselben Kraft, dafs die Torsionswinkel ω, 2ω, 3ω, 4ω sind. Die Torsionswinkel sind demnach bei gleicher tordierender Kraft der Länge der tordierten Stäbe direkt proportional.

III. Wendet man cylindrische Stäbe an, deren Radien sich verhalten wie 1, 2, 3, 4, so werden bei Anwendung derselben Kraft die Torsionswinkel bei zunehmendem Radius kleiner, und zwar findet man sie ω, $\frac{\omega}{16}$, $\frac{\omega}{81}$, $\frac{\omega}{256}$. Es sind also, da 1, 16, 81, 256 gleich sind 1^4, 2^4, 3^4, 4^4, bei Anwendung derselben drehenden Kraft die Torsionswinkel umgekehrt proportional den vierten Potenzen der Radien der Stäbe.

IV. Wenn man bei gleichen Dimensionen und gleichen Kräften verschiedene Substanzen anwendet, so findet man die Torsionswinkel verschieden. Um deshalb aus den beobachteten Dimensionen des Stabes und der

›henden Kräften die Torsionswinkel zu erhalten, bedarf es eines gewissen ' die verschiedenen Substanzen verschiedenen Koefficienten $\frac{1}{T}$.

Wir erhalten demnach für den Torsionswinkel den Ausdruck

$$\omega = \frac{1}{T} \cdot \frac{Fl}{r^4}.$$

Die Torsionskraft des Stabes ist gleich der Kraft, welche dem Stabe Torsion erteilt, denn der Stab dreht sich so lange, bis die gegenwirkende ıft desselben gleich ist der drehenden Kraft. Wir erhalten daher die rsionskraft, welche der Stab bei einer Drehung um den Winkel ω ent- ›kelt, wenn wir die soeben erhaltene Gleichung nach F auflösen. Wir alten

$$F = \omega T \frac{r^4}{l},$$

r die Torsionskraft ist proportional dem Torsionswinkel, der vierten Po- z des Radius des tordierten Stabes und umgekehrt proportional der Länge selben, aufserdem für jede Substanz noch proportional einem besondern ›fficienten, dem sogenannten Torsionskoefficienten. Die physikalische Be- .tung dieses Koefficienten ist leicht zu erhalten. Setzen wir $r = 1$ und = 1, so wird für einen Draht von der Einheit des Radius, 1^{mm}, und Einheit der Länge, für welche wir, um im Zähler und Nenner des Aus- ckes für F die gleichen Längeneinheiten zu haben, auch 1^{mm} einsetzen,

$$F = \omega T.$$

Nun wird der Torsionskraft das Gleichgewicht gehalten durch ein am ›elarm ϱ angreifendes Gewicht P, so dafs wir setzen können

$$F = P \cdot \varrho = \omega \cdot T,$$

raus

$$P \cdot \frac{\varrho}{\omega} = T.$$

Und machen wir schliefslich $\varrho = \omega$, so wird

$$P = T.$$

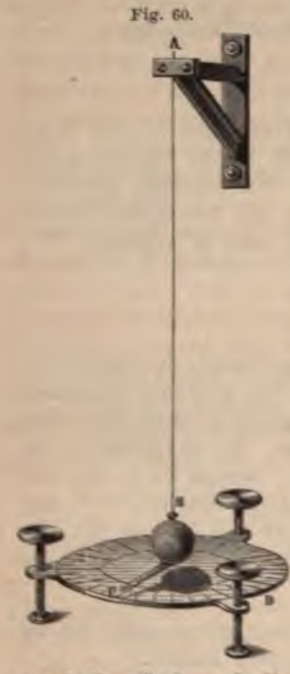
Der Torsionskoefficient T gibt uns also das Gewicht an, welches am ›de eines mit dem Stabe von der Länge 1^{mm} und dem Radius 1^{mm} ver- ndenen Hebelarmes von der Länge ϱ wirken mufs, um der Torsionskraft s Gleichgewicht zu halten, wenn wir den Stab um einen Winkel ω ge- eht haben, so dafs der von dem Ende des Hebelarms durchlaufene Bogen › Länge des Radius erreicht hat; oder er ist, wenn wir ϱ gleich dem ıdius des Stabes, gleich 1^{mm} setzen, gleich jener Kraft, welche, an dem nfange des Stabes wirkend, den Stab so stark tordiert, dafs der End- nkt des Radius einen Bogen von 1^{mm} zurücklegt.

Die soeben beschriebene Methode von Wertheim eignet sich besonders r Untersuchung der Torsion an Stäben von grofsen Dimensionen. Um e wegen ihrer vielen Anwendungen weit wichtigern Gesetze der Torsion ı feinen Fäden oder Drähten zu untersuchen, wandte Coulomb eine andere ethode an[1]), die sogenannte Methode der Oscillationen. Wir befestigen

[1]) *Coulomb*, Mémoires de l'Acad. des Sciences. Paris 1784.

einen Faden mit seinem obern Ende an einem festen Haken A (Fig.
und hängen an sein unteres Ende einen schweren Körper, z. B. eine m

Fig. 60.



lische Kugel. Hängt die Kugel vertikal hera
dreht man dieselbe um die vertikale Axe um e
beliebigen Winkel und überläfst sie dann
selbst. Infolge der durch die Drehung ent
denen Torsionskraft wird dann der Faden
wieder aufdrehen und dabei die Kugel um die
tikale Axe mit steigender Geschwindigkeit rot
machen, da die Torsionskraft kontinuierlich w
Nach einiger Zeit wird sich der Faden in
Lage befinden, welche er einnahm, bevor er
diert war. Aber in diesem Augenblicke ist
die Rotationsgeschwindigkeit am gröfsten
worden, die Bewegung wird wegen der erlan
Geschwindigkeit fortdauern und der Faden
entgegengesetzte Torsion erhalten. Dadurch
nach und nach die Bewegung verzögert,
sie wird gleich Null, wenn der Winkel der
gegengesetzten Torsion gleich dem ursprüngli
Torsionswinkel geworden ist. Dann wird sic
Bewegung umkehren, wieder über die Glei
wichtslage hinausgehen u. s. f., so dafs sie
selben Änderungen zeigt wie das Pendel; es
eine hin- und herdrehende Bewegung eint
mit abnehmender Amplitude, weil Reibung, W
stand der Luft und die unvollkommene Elasticität des Drahtes eine
gehemmte Fortdauer verhindern.

Es ist nun klar erstens, dafs, wenn die Torsionskraft des F
wirklich proportional ist dem Torsionswinkel, dafs dann die Oscillat
dieselbe Zeit dauern, welches auch ihre Ausdehnung sei, ob sie mehrere g
Umdrehungen umfassen oder nur wenige Bruchteile eines Grades.
dann wird in demselben Verhältnisse, als die Drehung aus der Gl
gewichtslage gröfser wird, auch die Drehungsgeschwindigkeit gr
welche die Torsionskraft dem Faden erteilt; wenn aber die Geschwindi
immer der Drehung proportional ist, der doppelten Drehung die dop
der dreifachen die dreifache Geschwindigkeit entspricht, so müssen
Drehungen, alle Oscillationen in gleichen Zeiten zurückgelegt werden.

Zweitens aber ist umgekehrt klar, dafs, wenn dieser Isochronismu
Oscillationen stattfindet, dafs dann auch die Proportionalität zwischen
sionskraft und Torsionswinkel besteht. Es genügt daher, um das erst
aufgestellten Gesetze für diesen Fall zu beweisen, zu zeigen, dafs die Os
tionen isochron sind.

Um diese Beobachtung mit der notwendigen Genauigkeit zu ma
verfährt man in ganz ähnlicher Weise wie bei Pendelbeobachtungen.
hängt den Faden an einem Widerhalt A auf (Fig. 60), befestigt unte
Kugel B einen möglichst leichten Zeiger C und stellt zur Messun
Oscillationsweiten einen geteilten Kreis darunter, so dafs dessen M
punkt von dem verlängerten Faden getroffen wird. Der Beobachter

h in einer gewissen Entfernung mit einem Fernrohr so auf, dafs er den iger visieren und eine Sekundenuhr beobachten kann, die er zu arretieren d loszulassen imstande ist. Im Augenblick, in welchem nun der Zeiger s Gesichtsfeld des Fernrohrs passiert, setzt er die Uhr in Gang. Nach hlung von n Oscillationen mit der Amplitude A bestimmt er dann die rflossene Zeit. Dieselbe Beobachtung wird dann mit kleineren oder gröfseren cillationsweiten gemacht; der Versuch zeigt dann die Gleichheit der cillationsdauer, welches auch die Amplituden sind. Es folgt also, dafs Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist. Bei einigen Metallen jedoch nach Versuchen von Warburg[1]) diese Proportionalität nicht vornden; er fand nämlich, dafs die Schwingungsdauer eines Kupferdrahtes i einer Amplitude von 7^0 schon im Verhältnis von 1,0023 : 1 gröfser als i ganz kleinen Amplituden.

Bezeichnet man nun mit f die Torsionskraft für die Einheit der Drehung, er die Kraft, welche, an einem Hebelarme von der Länge eines Milliters angebracht, der Torsion des Fadens das Gleichgewicht hält, wenn Drehung so grofs war, dafs das Ende des Hebels einen Bogen von 1^{mm} nge zurücklegte — man könnte sie als den Torsionskoefficienten dieses stimmten Drahtes bezeichnen —, so hat man für die Kraft F, welche e Drehung um einen Bogen ω bewirkt,

$$F = f \cdot \omega.$$

Man sieht nun leicht ein, dafs die Torsionskraft ihren Sitz nur in dem den selbst hat, und dafs sie nicht von der Natur und dem Gewicht der gel B abhängt. Indes, da es die Torsionskraft ist, welche die Kugel in wegung setzt, so wird die derselben erteilte Geschwindigkeit und die cillationsdauer von der Masse der Kugel abhängig sein. Es ist nicht iwierig, diese Abhängigkeit zu erhalten.

Der Torsionskraft hält bei der Drehung um einen Bogen ω die im Abnde 1 von dem Faden angebrachte Kraft $f\omega$ das Gleichgewicht, die Begung erfolgt also gerade so, als wenn der Faden keine Drehungskraft tte, sondern im Abstande 1 von der Drehungsaxe eine Kraft $f\omega$ dem stem eine Drehung in demselben Sinne erteilen würde, wie es die rsionskraft thut. Diese Kraft folgt ganz denselben Gesetzen wie jene, lche die Bewegung des Pendels veranlafste. Denn beim Pendel hatten r, wenn das Gewicht des schweren Punktes am Ende des Pendels p war, r einen Ausschlagswinkel α als bewegende Kraft den Wert $pl \cdot \sin \alpha$; er da für die kleinen Schwingungen, für welche unser Ausdruck für die hwingungsdauer galt, $\sin \alpha = \alpha$ gesetzt werden kann, für die bewegende aft $pl\alpha$; also auch eine bewegende Kraft, welche dem Ausschlagswinkel portional ist. Wie wir nun beim Pendel als Ausdruck für die Schwingungsner hatten, wenn wir mit m die Masse des bewegten Gewichtes beichneten,

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{ml^2}{gml}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{ml^2}{pl}},$$

ist klar, dafs, wenn im Abstande 1 von unserem Faden ein schwerer

[1]) Warburg, Berichte der naturwissenschaftl. Gesellschaft zu Freiburg im an. Bd. VII. 1880. Annalen der Physik und Chemie, neue Folge (Wiedem. .) Bd. X.

Punkt von der Masse m wäre, der Ausdruck für die Schwingungsdauer sein würde

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{f}}.$$

Anstatt des Punktes von der Masse m im Abstande 1 haben wir aber die um den Faden verteilte Masse M der schweren Kugel und des Zeigers. Bezeichnen wir nun aber mit Mk^2 das Trägheitsmoment der Masse M in Bezug auf die vertikale Drehungsaxe, so ist dieses gleich der Masse m, welche im Abstande 1 von der Drehungsaxe die rings verteilt liegenden Massenteilchen ersetzt. Wir erhalten demnach für die Schwingungsdauer in unserem Falle

$$t = \pi \sqrt{\frac{Mk^2}{f}}.$$

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der schwingenden Masse kann man hier die § 32 besprochene Methode anwenden, bei welcher wir eine der jetzigen ähnliche Anordnung des Versuches vorausgesetzt haben. Man hätte nur als Zeiger an der Kugel der Fig. 60 einen leichten Stab zu wählen, der in seiner Mitte unten an der Kugel befestigt ist, und diesen in der § 32 angegebenen Weise zu belasten. Am besten versieht man dazu den Stab in genau gemessenen und an beiden Seiten gleichen Abständen r_1, r_2 mit Spitzen, welche nach oben hervorstehen, und hängt auf diese an kleinen Ringen die Gewichte. Die Rechnungen sind dann genau so zu führen, wie es § 32 angegeben ist.

Ist aber die Masse des Drahtes gegenüber derjenigen der Kugel sehr klein, und benutzt man als Zeiger einfach eine auf der Kugel gezogene Marke, so kann für das Trägheitsmoment der schwingenden Masse einfach das der Kugel eingesetzt werden. Ist der Radius der Kugel gleich a, so ist das Trägheitsmoment derselben bezogen auf die mit einem vertikalen Durchmesser der Kugel zusammenfallende Rotationsaxe nach § 19

$$Mk^2 = \tfrac{2}{5} \cdot Ma^2;$$

somit erhalten wir für die Dauer einer Oscillation unserer Kugel infolge der Torsionskraft des Fadens

$$t = \pi \sqrt{\frac{2\,Ma^2}{5f}}.$$

Will man nun zwei Fäden verschiedener Länge, verschiedener Dicke und verschiedener Substanz mit einander vergleichen, so hängt man sie nach einander an demselben Punkte A auf und befestigt an ihnen dieselbe Kugel. Ist ihre Oscillationsdauer verschieden, gleich t und t', so kann das nur daher rühren, daſs ihre Torsionskräfte verschieden sind. Wären dieselben f und f', so hat man

$$t = \pi \sqrt{\frac{2\,Ma^2}{5f}}, \quad t' = \pi \sqrt{\frac{2\,Ma^2}{5f'}},$$

und daraus

$$\frac{f}{f'} = \frac{t'^2}{t^2}.$$

Man sieht, daſs die Werte für die Torsionskraft umgekehrt proportional sind den Quadraten der Schwingungsdauern. Miſst man nun diese Zeiten, so findet man unsere früheren Gesetze, nämlich 1) f ist direkt pro-

portional der vierten Potenz des Radius des Drahtes, 2) f ist umgekehrt proportional der Länge des Drahtes, 3) f ist direkt proportional einem für die verschiedenen Substanzen verschiedenen Koefficienten.

Es ist somit

$$f = \frac{T \cdot r^4}{l},$$

oder das zu einer Drehung um den Winkel ω erforderliche Drehungsmoment F

$$F = T \cdot \frac{r^4}{l} \cdot \omega,$$

wie wir es schon aus den Versuchen von Wertheim ableiteten.

Wir haben oben bemerkt, dafs die Torsionskraft des Fadens unabhängig sei von dem Gewichte der Kugel; Coulomb hat dieses bei seinen Versuchen für Metalldrähte direkt nachgewiesen und Warburg[1]) bestätigt. Für zusammengesetzte Seidenfäden ist das nach den Beobachtungen von Gauss[2]) indes nicht mehr der Fall, für diese nimmt die Torsionskraft mit dem spannenden Gewichte zu.

§ 52.

Beziehung zwischen dem Torsions- und Elasticitätskoefficienten.

Die bei der Torsion eines Stabes oder Drahtes auftretende elastische Kraft ist nur eine andere Form der bei der Ausdehnung oder Kompression auftretenden Kraft, da auch sie durch eine Verschiebung der Moleküle gegen einander geweckt wird. Ein etwas näheres Eingehen auf die molekularen Vorgänge bei der Torsion wird uns in den Stand setzen, den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Äufserungen der Elasticität zu erkennen.

Denken wir uns einen vertikalen Cylinder, den wir durch eine an seinem untern Ende angebrachte Kraft tordieren, so wird dadurch jeder Querschnitt des Cylinders um seinen Mittelpunkt gedreht, und zwar um so mehr, je näher derselbe dem untern Ende des Cylinders liegt. Die Verbindungslinie zweier Punkte in unter einander liegenden Querschnitten, welche vor der Torsion vertikal war, bildet daher jetzt mit seiner frühern Richtung den Winkel φ, oder eine vor der Torsion mit der Axe parallele Faser des Cylinders bildet nach der Torsion eine Schraubenlinie, welche überall um den Winkel φ gegen die Vertikale geneigt ist. Die Gröfse dieses Winkels, der die Verschiebung der Moleküle gegen einander mifst, und den Clebsch[3]) deshalb den Verschiebungswinkel nennt, kann man aus der Gröfse des Torsionswinkels ableiten. Ist nämlich der unterste Querschnitt um den Winkel ω gedreht, so wird beim Abwickeln von dem Cylinder die erwähnte Schraubenlinie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Länge l des Cylinders, dessen andere Kathete der von dem untern Ende der Schraubenlinie beschriebene Bogen, also, wenn wir den Abstand der Faser von der Axe des Cylinders mit r bezeichnen, gleich $r \cdot \omega$ ist. Der Winkel φ ist der in diesem Dreiecke der Seite $r \cdot \omega$ gegenüber-

[1]) *Warburg*, a. a. O.
[2]) *Gauss*, Intensitas vis magneticae terrestris. Göttingen 1833. Poggendorffs Annalen. Bd. XXVIII.
[3]) *Clebsch*, Theorie der Elasticität. p. 8.

liegende Winkel. Zur Bestimmung von φ haben wir daher

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{r \cdot \omega}{l},$$

oder, da φ immer nur ein sehr kleiner Winkel ist,

$$\varphi = \frac{r \cdot \omega}{l}.$$

Der Verschiebungswinkel ist demnach der Gröfse der Torsion proportional; da nun die Torsionselasticität der Gröfse der Torsion proportional ist, so ist sie auch diesem Verschiebungswinkel proportional. Nennen wir die in der Flächeneinheit des untersten Querschnittes durch einen der Einheit gleichen Verschiebungswinkel erzeugte Torsionskraft C, so können wir die in dem Flächenelement des untersten Querschnittes Δq, dessen Gröfse gleich dem Querschnitte der betrachteten Faser ist, durch die Torsion erzeugte Kraft deshalb setzen

$$P = C \varphi \Delta q;$$

denn die einzelnen Punkte dieses Flächenelements sind gegen die Punkte des darüber liegenden Querschnittes alle um denselben Winkel φ verschoben.

Die Kraft P wirkt in dem untersten Querschnitt der Richtung der drehenden Kraft entgegen. Den Wert der Konstanten C können wir nach Clebsch in folgender Weise ableiten[1]). Denken wir uns einen Würfel, aus derselben Substanz wie den betrachteten Cylinder, an einer Fläche befestigt und an der gegenüberliegenden durch eine Kraft gezogen, deren Gröfse für die Flächeneinheit gleich K sei. Durch den Zug geht der Würfel in ein Parallelepiped über, indem die der Zugrichtung parallele Kante a in $a(1+\delta)$ oder, wenn wir den Elasticitätskoefficienten des Würfels mit E bezeichnen, in $a\left(1+\frac{K}{E}\right)$ übergeht, die beiden anderen Kanten aber in $a\left(1-\mu\frac{K}{E}\right)$ übergehen, wenn wir den Koefficienten der Querkontraktion mit μ bezeichnen. Die der Zugrichtung parallelen Seiten des Würfels $ABCD$ (Fig. 61) werden dadurch Parallelogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$, deren Diagonalen $C_1 B_1$ und $A_1 D_1$, welche vor dem Zuge zu einander senkrecht waren, jetzt einen Winkel $\frac{1}{2}\pi - \psi$ mit einander bilden. Ziehen wir von dem Punkte O, in dem die Diagonalen sich schneiden, eine Senkrechte OE auf die zur Zugrichtung senkrechte Kante $B_1 D_1$ des Parallelepipeds, so erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck OED_1, dessen eine Kathete $OE = \frac{1}{2}a(1+\delta)$, dessen andere $ED_1 = \frac{1}{2}a(1-\mu\delta)$, und in welchem der der letztern Kathete gegenüberliegende Winkel $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)$ ist; zur Bestimmung von ψ haben wir daher

Fig. 61.

$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}} = \frac{ED_1}{OE} = \frac{a\left(1-\mu\frac{K}{E}\right)}{a\left(1+\frac{K}{E}\right)},$$

1) a. a. [illegible] p. 8 ff.

r, da $\tang \frac{\pi}{4} = 1$ und ψ ein sehr kleiner Winkel ist,

$$\frac{1 - \frac{\psi}{2}}{1 + \frac{\psi}{2}} = \frac{1 - \mu \frac{K}{E}}{1 + \frac{K}{E}}$$

d schliefslich mit Vernachlässigung sehr kleiner Gröfsen

$$\psi = \frac{K}{E}(1 + \mu).$$

Der so bestimmte Winkel ψ ist aber gleichzeitig der Verschiebungs-inkel der einer Diagonale des Würfels parallelen Diagonalflächen gegen inander, welche infolge des Zuges eingetreten ist. Denn denken wir uns len Würfel vor dem Zuge durch eine Schar Ebenen geteilt, welche der inen der beiden besprochenen Diagonalen AD und der ihr entsprechenden uf der gegenüberliegenden Seite des Würfels parallel ist, so verbindet eine ler zweiten Diagonale CB parallele durch den Mittelpunkt des Würfels gelegte Gerade die Mittelpunkte aller dieser Ebenen mit einander; diese Gerade ist normal zu der Ebenenschar. Nach dem Zuge ist die Lage dieser Ebenen parallel $A_1 D_1$ geworden, die Mittelpunkte derselben liegen auch jetzt wieder auf einer der zweiten Diagonale $C_1 B_1$ parallelen Linie, welche in einer die Normale der Ebenenschar aufnehmenden Ebene mit den Ebenen, wie vorher abgeleitet wurde, den Winkel $90^0 - \psi$, mit der Normale selbst also den Winkel ψ bildet. Die Mittelpunkte und damit alle entsprechend liegenden Punkte der Ebenenschar sind also so gegen einander verschoben, dafs der Verschiebungswinkel nach der gegebenen Definition gleich ψ ist. Infolge dieser Verschiebung mufs in dem Parallelepiped eine jener Ebenenschar parallele Kraft geweckt sein, welche den Ebenen parallel wirkt, und deren Gröfse für die Flächeneinheit

$$P = C \cdot \psi = C \cdot \frac{K}{E} \cdot (1 + \mu)$$

ist, eine Kraft, welche die Ebenen in ihre frühere Lage zurückzuziehen strebt.

Dieser Kraft hält die der Ebenenschar parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Komponente der Zugkraft K das Gleichgewicht. Da die Kraft K, welche der Seite des Würfels parallel ist, mit der Diagonale einen Winkel von 45^0 bildet, so ist die der Flächeneinheit der Würfelfläche parallel der Diagonale wirkende Kraft $K \cdot \cos 45^0 = K \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$. Diese Kraft wirkt auf das der Flächeneinheit der Würfelfläche entsprechende Stück der Diagonalfläche; da nun die Diagonalfläche zur Würfelfläche sich verhält wie $\sqrt{2} : 1$, so ergibt sich für die auf die Flächeneinheit der Diagonalfläche parallel derselben wirkende Kraft

$$K \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{K}{2} \cdot$$

Da diese Kraft der durch die Verschiebung geweckten Kraft das Gleichgewicht hält, so ist schliefslich

$$P = \frac{K}{2} = C \cdot \frac{K}{E}(1 + \mu)$$

und daraus

$$C = \frac{E}{2(1 + \mu)} \cdot$$

Die Konstante C somit, mit der wir bei einer Verschiebung der M külschichten gegen einander, wie sie bei der Torsion eintritt, den V schiebungswinkel multiplicieren müssen, um die durch diese Verschieb geweckte elastische Kraft zu erhalten, ist durch die beiden die Elasti einer Substanz bedingenden Konstanten, den Elasticitätskoefficienten den Koefficienten der Querkontraktion vollständig bestimmt, sie ist gl dem Quotienten aus dem Koefficienten der Elasticität und dem dopp des um eins vermehrten Kontraktionskoefficienten.

Diesen Wert von C haben wir auch in den am Anfange dieses P graphen für die Torsionskraft unseres Cylinders abgeleiteten Ausdruck zuseten; derselbe wird damit

$$P = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \varphi \cdot \Delta q = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{r \cdot \omega}{l} \cdot \Delta q.$$

Um aus diesem Werte den Torsionskoefficienten nach unserer früh Definition abzuleiten, haben wir hieraus zunächst das Drehungsmomen berechnen, welches der tordierte Stab infolge der Torsion um ω er Der Wert von P ist die Torsionskraft in dem Flächenelemente Δq untersten Querschnitts, welches im Abstande r von der Axe liegt. daraus hervorgehende Drehungsmoment ist

$$P \cdot r = f = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\omega}{l} r \cdot r \cdot \Delta q.$$

Um hieraus das Drehungsmoment des ganzen untersten Quersch zu erhalten, haben wir für alle Flächenelemente desselben das Drehu moment f in der angegebenen Weise zu bilden und alle diese einz Drehungsmomente zu summieren. Zu dem Zwecke können wir zun für das Flächenelement Δq den unendlich schmalen Ring $2\pi r dr$ setzen, der sich im Abstande r von der Axe befindet, da für alle mente des Ringes das Drehungsmoment denselben Wert hat, und l dann die Summe für alle Ringe zu bilden, deren Radius zwischen 0 u liegt, wenn ϱ der Radius des Cylinders ist. Damit wird

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\omega}{l} \int_0^{\varrho} 2\pi r^3 dr$$

und dieses Integral ist nach E 1 und E VIII:

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega \cdot \varrho^4}{l};$$

ein Ausdruck, der sich von dem im vorigen Paragraphen experimentel geleiteten nur dadurch unterscheidet, daſs an die Stelle des dort benn Torsionskoefficienten T hier der Wert desselben durch den Elastic koefficienten E und durch den Kontraktionskoefficienten μ gegeben ist den Torsionskoefficienten T erhalten wir somit

$$T = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi}{2}\text{[1]}.$$

[1] Es ist wohl zu beachten, daſs diese Berechnung des Torsionskoeffici nur für cylindrische Stäbe gilt; denn bei Stäben von anderer Form findet b Torsion nicht nur eine Verschiebung der unter einander liegenden Quersch

Sind E und μ bekannt, so gestattet uns diese Relation, sofort den des Torsionskoefficienten zu berechnen; kennt man E und T, so kann aus beiden auch den Wert von μ ableiten.

Es liegen einige Versuche von Coulomb[1]), Savart[2]) und Wertheim[3]) welche in Verbindung mit den von Wertheim gegebenen Werten für E Vert von μ abzuleiten gestatten.

Coulomb findet für einen Eisendraht von $243^{mm},63$ Länge und $0^{mm},07481$ ıs $F = 0,001545$ nach der vorhin besprochenen Schwingungsmethode. orhin mitgeteilte Gleichung gibt daraus

$$\frac{E}{2(1+\mu)} = 7651.$$

Der Elasticitätskoefficient ist nach Wertheim $E = 20869$. Man erhält s $\mu = 0,363$.

Savart erhält nach einer der Wertheimschen ähnlichen Methode für rische Kupferdrähte zwischen 1 und $4^{mm},5$ Dicke

$$\frac{E}{2(1+\mu)} = 4213.$$

Der Wert von E ist nach Wertheim 10519. Man erhält daraus),25, ein Wert, welcher ziemlich gut mit dem aus den Regnaultschen ressionsversuchen abgeleiteten übereinstimmt.

Vertheim untersuchte eine Reihe von Stäben, an denen er direkt den citätskoefficienten durch Verlängerung bestimmte. Die von ihm geıen Werte enthält folgende kleine Tabelle:

Substanzen	Radius der Cylinder	$\frac{E}{2(1+\mu)}$ aus d. Torsion	E aus d. Verläng.	μ
	mm.			
en	8,220	6836,6	17805	0,317
en	5,501	6677,2		
gl. Gufsstahl . .	5,055	7458,4	19542	0,310
pfer	5,031	3611,7	9395	0,300
s	3,535	2383,1	6200	0,321
s	3,4225	2308,3	"	

Man erhält also auch hier wieder für μ je nach den Substanzen der verschiedene Werte; die Werte für Glas und Kupfer weichen nur wenig von den früher aus den Regnaultschen Kompressionsversuchen eiteten ab, welche für Glas 0,315, für Kupfer 0,291 waren.

---

n auch eine Verschiebung der einzelnen Punkte jedes Querschnittes gegen er statt. Der Verschiebungswinkel ist somit an den verschiedenen Stellen erschnitte verschieden, und nicht wie bei dem Cylinder für alle Punkte, gleich weit von der Drehungsaxe entfernt sind, derselbe.

[1]) *Coulomb*, Mémoires de l'Académie. 1784. *Biot*, traité de physique. T. 1.

[2]) *Savart*, Annales de chim. et de phys. T. LXI.

[3]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. L.

Kohlrausch und Loomis[1]) fanden bei ihren Versuchen, welche Zweck hatten, die Abhängigkeit des Elasticitätskoefficienten von der T peratur zu bestimmen, und bei denen sie nach der Coulombschen Met die Schwingungsdauer dünner Drähte bei verschiedenen Temperaturen obachteten, die Werte von $\frac{E}{2(1+\mu)}$

für Eisen gleich 6940
„ Kupfer „ 3900
„ Messing „ 3200.

Die Werte von E erhielten sie aus Bestimmungen der Schwingu dauern

für Eisen $E = 20310$
„ Kupfer „ $= 12140$
„ Messing „ $= 9810$.

Daraus würden sich für μ die Werte ergeben, für Eisen 0,45, Kupfer 0,55, für Messing 0,53, im Mittel also fast genau 0,5, eine welche bedeuten würde, dafs bei einfachem Zuge gar keine Änderung Volumens einträte, die indes gegenüber allen sonstigen Beobachtunge grofs ist und vermuten läfst, dafs die Bestimmung der Torsionskoeffici fehlerhaft ist.

Für die Abhängigkeit der Torsionskoefficienten oder auch der i proportionalen Elasticitätskoefficienten von der Temperatur ergab sich, die Koefficienten mit steigender Temperatur kleiner werden, wie es schon aus den Beobachtungen Wertheims (§ 48) ergab. Bezeichnet den Elasticitätskoefficienten bei 0° mit E_0, so ist derselbe bei der Te ratur t^0 für Eisen

$$E = E_0\,(1 - 0{,}000\,483\,t - 0{,}000\,000\,12\,t^2),$$

für Kupfer

$$E = E_0\,(1 - 0{,}000\,572\,t - 0{,}000\,000\,28\,t^2),$$

für Messing

$$E = E_0\,(1 - 0{,}000\,485\,t - 0{,}000\,001\,36\,t^2).$$

Es nehmen die Elasticitätskoefficienten bei einer Erwärmung vo Temperatur des gefrierenden bis zu der des siedenden Wassers um 6 Procent ab.

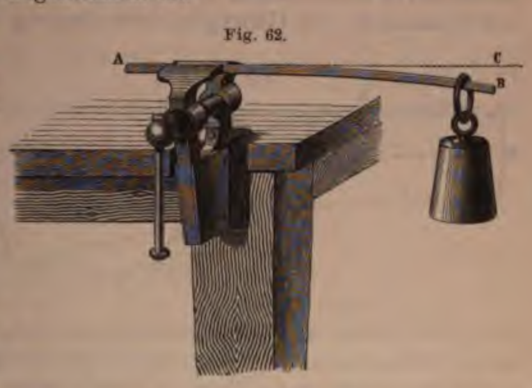
§ 53.

Biegungselasticität. Aufser durch Ausdehnung und Torsion kan elastische Kraft fester Körper noch auf eine dritte Art geweckt we nämlich durch Biegung. Bei der grofsen Schwierigkeit, welche der ele taren Behandlung der Biegung entgegensteht, müssen wir uns damit gnügen, den einfachsten Fall etwas näher zu betrachten. Wenn ein *AB* (Fig. 62) mit dem einen Ende in einem Schraubstock festgeklemm und man hängt an sein anderes freies Ende *B* ein Gewicht *P*, so bie sich und nimmt die Gestalt einer Kurve an, bis er im Gleichgewicht Dann hält die elastische Kraft des Stabes dem Gewichte *P* das Gl

[1]) *Kohlrausch* und *Loomis*, Poggend. Ann. Bd. CXLI.

ewicht. Man sieht, dafs bei dieser Bewegung die obere horizontale Fläche es Stabes sich ausdehnt, während die untere Seite des Stabes zusammenedrückt wird, und dafs durch diese Verschiebung der Moleküle sich Kräfte ntwickeln müssen, welche den Stab in seine frühere Lage zurückführen erden, sobald das Gewicht abgenommen ist.

Fig. 62.



Um diese Erscheinung u untersuchen, kann man ie Enden A und C oder ielmehr auf diesen geogene Marken mit dem athetometer visieren; man gt die zu untersuchenden täbe anfänglich horizonl, belastet sie an ihrem nde C mit einem Gewichte und mifst dann die Länge um welche die Marke n C nach B herabsinkt. ieser Länge α, welche man n Pfeil der Biegung nennt, und die immer sehr klein ist, können wir den n der Marke beschriebenen Bogen gleich setzen. Eine ähnliche Methode andte Gerstner zu seinen Versuchen an[1]).

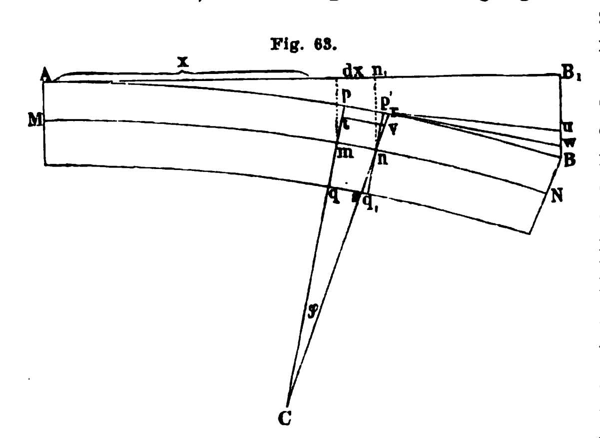
Bei einer Durchführung dieser Versuche findet man nun zunächst, dafs r Pfeil der Biegung der Gröfe des biegenden Gewichtes proportional, mit auch, dafs die bei der Biegung auftretende Elasticität der Biegung oportional ist, wie sie bei der Ausdehnung der Verlängerung proportional . Die Gröfse des Biegungspfeiles hängt aber aufserdem von den Dimennen des Stabes, der Gestalt seines Querschnittes und dem Elasticitätsefficienten ab.

Für den einfachsten Fall, den eines rechteckigen Stabes, dessen horintale Seite gleich b, dessen vertikale gleich e und dessen Länge von dem nkte der Einklemmung bis zur Stelle, wo das Gewicht hängt, gleich l , können wir diese Abhängigkeit aus einer genauern Betrachtung des rganges der Biegung in folgender Weise ableiten. Die Biegung kommt durch zustande, dafs an der obern Seite des Stabes seine Längsfasern sgedehnt, an der untern Seite dagegen zusammengedrückt werden; im nern des Stabes mufs es daher eine Faserschicht geben, welche weder sgedehnt noch zusammengedrückt wird, und wenn der Stab ganz homogen , mufs diese Schicht gerade die mittlere Schicht des Stabes sein. Stelle ig. 63) AB einen Längsdurchschnitt durch den gebogenen Stab dar, sei der Punkt der Einklemmung, B der Aufhängepunkt des Gewichtes P d MN der Durchschnitt durch die nicht verlängerte Faserschicht. Nun i pq ein Querschnitt des Stabes, der von dem Anfange des Stabes um x tfernt sei, und rs ein zweiter von dem ersten um die unendlich kleine trecke dx entfernter Querschnitt. Während in der Gleichgewichtslage die iden Schnitte parallel sind, ist nach der Biegung durch die Verlängerung r über mn und die Verkürzung der unter mn liegenden Fasern der zweite

[1]) *Gerstner*, Handbuch der Mechanik. Bd. I.

Querschnitt gegen den ersten um einen Winkel φ gedreht. Legen durch den Punkt n, in welchem rs die nicht verlängerte Faser schn $p'q' \parallel pq$, so können wir die Biegung an dieser Stelle als eine Drehun Querschnittes rs um die durch n gelegte Horizontale als Drehungaxe fassen, deren Gröfse jenem Winkel φ gleich ist. Damit sind wir dann sofort imstande, die Gleichgewichtsbedingung für den gebogenen Stab zustellen; die Bedin ist, dafs dem gedr Querschnitt durch elastischen Kräfte ebenso grofses Dreh moment nach rück erteilt wird, als durch das Gewic nach entgegenges Richtung gegeben Wir können nun System rmN als Winkelhebel anseh dessen einem Arm im Punkte N das wicht P angreift, d anderer Arm durch den Querschnitt rs gegeben ist, an dessen sämtl Punkten Kräfte angreifen, welche ihn in seine frühere Lage zurückz Das aus der letztern resultierende Drehungsmoment erhalten wir folge mafsen. Es sei v der Durchschnitt durch ein Element des Schnitt welches um y von n entfernt sei, und dessen Höhe dy sei, so dafs Querschnitt $b \cdot dy$ ist. Die dieses Element mit pq verbindenden Fase sind um $tv - mn = y \cdot \varphi$ verlängert. Die Kraft, mit der dieses El gegen t infolgedessen gezogen wird, ist dann, wenn wir mit E den Elasti koefficienten des Stabes bezeichnen,

Fig. 63.



$$E \cdot \frac{y \cdot \varphi}{dx} \cdot b\,dy,$$

und das infolgedessen dem Schnitte erteilte Drehungsmoment

$$y \cdot E \cdot \frac{y \cdot \varphi}{dx} \cdot b\,dy = E \frac{b\varphi}{dx} \cdot y^2 dy.$$

Ein ebensolches Drehungsmoment enthält der Schnitt für jedes El $b\,dy$, die Summe derselben ist das ganze Drehungsmoment des Sch Wir erhalten diese Summe, indem wir in jenem Ausdrucke für y nac nach alle Werte setzen für y von 0 bis $\frac{e}{2}$ und von 0 bis $-\frac{e}{2}$ ode von $-\frac{e}{2}$ bis $+\frac{e}{2}$. Die gesuchte Summe ist demnach das best Integral

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E \cdot \frac{b\varphi}{dx} \cdot y^2 dy = E \frac{b\varphi}{dx} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} y^2 dy.$$

Dasselbe ergibt sich nach E 1 und E VIII

$$\int_{+\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E \cdot \frac{b\varphi}{dx} \cdot y^2 dy = \frac{E}{12} \cdot \frac{b \cdot e^3}{dx} \cdot \varphi.$$

Diesem Drehungsmomente hält das des Gewichtes oder $nN \cdot P$ das eichgewicht. Für nN können wir setzen $n_1 B_1 = l - (x + dx)$ oder, da gegen x verschwindend klein ist, gleich $l - x$. Damit wird die Gleichwichtsbedingung des Schnittes

$$\frac{E}{12} \frac{b \cdot e^3}{dx} \cdot \varphi = P(l - x)$$

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot e^3 \varphi = P(l - x)dx$$

Den in diesem Ausdrucke auftretenden Winkel φ können wir durch s Element des Biegungspfeiles $B_1 B$ ausdrücken; legen wir durch r eine ngente an den Stab und ziehen durch r ebenfalls eine Linie parallel der ngente des Stabes bei p, so bilden diese beiden Linien den Winkel φ mit ander. Aus dem Biegungspfeil schneiden dieselben dann das Element uw, d indem wir das als den zu φ gehörigen mit $n_1 B_1$ oder $(l - x)$ beriebenen Bogen ansehen, können wir schreiben

$$\varphi(l - x) = uw; \quad \varphi = \frac{uw}{l - x}.$$

Damit wird die Gleichgewichtsbedingung, wenn wir schliefslich das ement uw des Biegungspfeiles, entsprechend der dem letztern gegebenen zeichnung α mit $d\alpha$ bezeichnen,

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot e^3 d\alpha = P(l - x)^2 dx.$$

Dieselbe Bedingung gilt für jeden Schnitt, den wir ebenso wie den trachteten durch den Stab legen; die Gleichgewichtsbedingung des ganzen abes erhalten wir demnach, indem wir auf beiden Seiten die Summe der r jeden einzelnen Querschnitt geltenden Ausdrücke bilden. Auf der linken ite geschieht das, indem wir die Summe aller Elemente des Biegungseiles bilden, also einfach statt $d\alpha$ schreiben α, auf der rechten, indem r nach und nach für x alle Werte von 0 bis l einsetzen und wie oben mmieren. Diese Summation gibt dann

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot e^3 \alpha = \tfrac{1}{3} P \cdot l^3$$

er

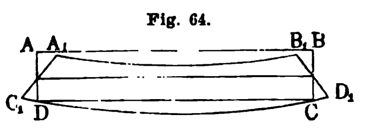
$$\alpha = \frac{4P}{E} \cdot \frac{l^3}{b e^3},$$

er die durch den Pfeil der Biegung gemessene Biegung ist der dritten tenz der Länge direkt, jener der Höhe und der ersten Potenz der Breite wie dem Elasticitätskoefficienten umgekehrt proportional.

Ist der Querschnitt des Stabes ein anderer, so erhält man für α andere Werte[1]), immer aber findet man, dafs die Biegung der Gröfse des biegenden Gewichtes, oder dafs die Gröfse der erregten Elasticität der Biegung proportional ist. Letzteres ist auch dann der Fall, wenn der Stab in anderer als der oben vorausgesetzten Weise befestigt ist, wenn er an beiden Enden festgeklemmt oder nur aufgelegt, oder wenn er an einem Ende festgeklemmt und an dem andern aufgelegt ist. Es folgt daraus nach den Gesetzen der Pendelschwingungen, dafs auch in diesem Falle der Stab isochrone Schwingungen um seine Gleichgewichtslage macht, wenn man ihn aus derselben bringt und dann sich selbst überläfst; wir werden diese Schwingungen an einer andern Stelle genauer betrachten.

Die Biegung eines Stabes nach seiner Längsaxe mufs auch eine Biegung nach der Breitendimension zur Folge haben, so dafs, wenn wir voraussetzen, dafs der Stab nach unten gebogen ist, wie in Fig. 63, die untere Fläche des Stabes in ihrer Breitendimension konvex, die obere, welche nach ihrer Länge konvex ist, nach der Breite konkav wird. Ist also $ABCD$ (Fig. 64) der Querschnitt des ungebogenen Stabes, so wird $A_1B_1C_1D_1$ jener des gebogenen Stabes. Dafs eine derartige Biegung des Querschnittes eintreten mufs, läfst sich leicht erkennen. Wie vorhin entwickelt wurde, hat die Biegung eine Verlängerung der oberhalb der ungeänderten Faserschicht, eine Verkürzung der unterhalb derselben liegenden Fasern zur Folge.

Fig. 64.



Diese Verlängerung der obern Schichten hat eine Kontraktion nach der Breite zur Folge, so dafs, wenn die Verlängerung gleich δ ist, die Kontraktion gleich $\mu\delta$ ist. Die Verkürzung der untern Faserschichten hat eine Ausdehnung nach der Breite zur Folge, welche ebenso grofs ist als die Verkürzung oben. Zu diesen Ausdehnungen und Verkürzungen parallel MM treten solche parallel AD. Oberhalb der ungeänderten Schicht MM tritt in dieser Richtung eine Kontraktion, unterhalb MM eine Ausdehnung ein. Man sieht leicht, dafs die vorher ebenen Flächen, welche den Stab oben und unten begrenzen, infolge dieser Kontraktionen der obern und Ausdehnungen der untern Hälfte des Stabes sich krümmen müssen, oder dafs der Stab parallel AB so gebogen werden mufs, dafs die obere Fläche konkav, die untere konvex wird[2]).

Legen wir einen Stab, dessen Länge gegen den Querschnitt beträchtlich ist, auf zwei gleich weit von der Mitte entfernte Stützen und biegen ihn dann dadurch, dafs wir seine beiden über die Stützen herausragenden Enden mit gleichen Gewichten belasten, so ist der der Längsrichtung des gebogenen Stabes parallele Schnitt der oberen konvexen Fläche ein Kreisbogen; ein zur Längsrichtung senkrechter, also parallel $ABCD$ durch die obere Fläche geführter Schnitt ist dann ebenfalls ein Kreisbogen; und die Radien dieser Kreisbögen verhalten sich wie die Längendilatation zur Querkontraktion. Setzen wir also den Radius des der primären Biegungsebene parallelen Bogens gleich 1, so wird der Radius des Bogens $A_1 B_1$ gleich μ.

---

[1]) *Clebsch*, Theorie der Elasticität fester Körper. p. 87 ff. und p. 363 ff.

[2]) *De Saint Vénant*, Mémoire sur la flexion des prismes etc. Journal des mathématiques pures et appliquées par Liouville. II. Série. T. I. 1856.

Eine Bestimmung dieser Krümmungsradien kann also ebenfalls dazu enen, das Verhältnis der Längendilatation zur Querkontraktion, also den 'ert von μ zu bestimmen.

Die im § 49 angeführten Versuche von Cornu[1]) beruhen auf diesem tze. Er bestimmte nach einer optischen Methode, die wir im zweiten nde, bei Besprechung der Interferenz des Lichtes mit grofsen Gang-terschieden kennen lernen werden, die Krümmungen der obern Flächen rschiedener Glasprismen, und erhielt im Mittel für μ den Wert 0,25.

§ 54.

Elastische Nachwirkung. Bei der bisherigen Besprechung der elasti-hen Eigenschaften der festen Körper haben wir vorausgesetzt, dafs die rch Wirkung äufserer Kräfte hervorgebrachten Änderungen der Körper mentan oder doch in einer für uns unmefsbar kleinen Zeit erfolgen, das ifst also, dafs etwa bei einer Dehnung durch Zug die Verlängerung sofort tritt, wenn das ziehende Gewicht an dem Körper angebracht ist und wir r Vermeidung von Schwingungen den Körper allmählich in die neue eichgewichtslage übergehen lassen. Wir haben dann die so eintretende rlängerung gemessen und aus dieser den Elasticitätskoefficienten oder n linearen Dehnungskoefficienten abgeleitet.

Die eintretenden Änderungen beschränken sich indes nicht immer auf se momentanen Änderungen, ja in der Regel treten im Laufe der Zeit fortdauernd wirkenden äufsern Kräften noch mehr oder weniger grofse derungen in demselben Sinne ein, wie die momentanen. Die erste Be-achtung dieser Art wurde von W. Weber an Seidenfäden gemacht und n demselben als elastische Nachwirkung bezeichnet[2]). Ein horizontal gespannter Seidenfaden wurde durch ein passend angebrachtes Gewicht lehnt und seine sofort eingetretene Verlängerung gemessen. Bei fort-uerndem Wirken des dehnenden Gewichtes ergab sich dann, dafs die nge des Fadens noch stetig zunahm, und zwar wurde eine, mit wachsen-r Zeit für gleiche Zeitintervalle abnehmende, Zunahme bis 2168,79 Mi-ten, also länger als 36 Stunden nach Vornahme der ersten Dehnung bachtet.

Ebenso ergab sich, dafs ein Faden, der längere Zeit gedehnt gewesen r, nach Fortnahme des dehnenden Gewichtes nicht sofort wieder die dem gedehnten Zustande entsprechende Länge annahm, dafs vielmehr ein fser Teil der Verkürzung erst nach und nach eintrat, die Verkürzung rde 1233 Minuten, also 20,5 Stunden nach Fortnahme des dehnenden wichtes beobachtet.

Diese von W. Weber an Seidenfäden beobachtete elastische Nach-kung fand dann F. Kohlrausch auch an Metalldrähten und Glasfäden; er gte gleichzeitig in einer Reihe von Experimentaluntersuchungen[3]), dafs allen diesen Substanzen die elastische Nachwirkung wesentlich den-

[1]) *Cornu*, Comptes Rendus. T. LXIX. p. 333.
[2]) *W. Weber*, Poggend. Ann. Bd. XXXIV und LIV.
[3]) *F. Kohlrausch*, Poggend. Ann. Bd. CXIX. CXXVIII. CLVIII. CLX.

selben Gesetzen folgt. Kohlrausch benutzte bei seinen Beobachtungen vorwiegend die Torsion.

Entsprechend der Beobachtung Webers, dafs bei konstantem spannenden Gewichte die Verlängerung stetig noch lange Zeit zunimmt, zeigte Kohlrausch bei Glasfäden zunächst, dafs das zu einer konstanten Torsion erforderliche Drehungsmoment mit wachsender Zeit abnimmt. Zur Messung des Drehungsmomentes wurde ein Magnet benutzt. An einen sehr feinen, etwa 35^{mm} langen, in einem drehbaren Gehäuse hängenden Glasfaden wurde ein kleiner Magnet befestigt, so dafs derselbe horizontal schwebte. Ein solcher Magnet hat, wie wir im vierten Bande kennen lernen werden, das Bestreben, in einer bestimmten horizontalen Richtung, der Richtung des sogenannten magnetischen Meridians zu verharren. Bringt man ihn um einen Winkel α aus dieser Lage heraus, so wirkt auf ihn ein Drehungsmoment

$$d = D \cdot \sin \alpha,$$

welches ihn in den Meridian zurückzubringen sucht. Es wurde nun durch eine Drehung des Gehäuses dem Faden eine Torsion erteilt; der Magnet folgt dann der Torsion so weit, bis das ihn von der Richtung des Meridians fortdrehende Drehungsmoment der Torsion gleich ist dem magnetischen Drehungsmoment, welches ihn in den Meridian zurückzuführen strebt. Durch eine Torsion von drei ganzen Umdrehungen wurde so die Nadel nahezu senkrecht zum magnetischen Meridian gestellt. Es zeigte sich dann, dafs die Nadel nicht in dieser Lage verharrte, dafs sie vielmehr stetig dem Meridiane sich näherte. Daraus folgt, dafs das dem Faden durch drei Umdrehungen erteilte Torsionsmoment nicht mehr ausreicht, um die Magnetnadel in der ihr zunächst gegebenen Lage zu halten, dafs das magnetische Drehungsmoment gröfser war. Es wurde nun durch Zurückdrehen des Gehäuses die durch Annäherung des Magnets an den Meridian eintretende Zunahme der Torsion aufgehoben und so der Faden stets um genau drei Umdrehungen tordiert gehalten. Dabei wurde zunächst von Minute zu Minute später in gröfseren Zeitintervallen der Stand der Magnetnadel, also der Winkel α beobachtet. Dem Sinus des so beobachteten Winkels war dann jedesmal das Drehungsmoment proportional, welches zu der betreffenden Zeit dem durch drei Umdrehungen des Fadens bewirkten Torsionsdrehungsmoment das Gleichgewicht hielt. Die so zur Zeit t Minuten nach Herstellung der Torsion beobachteten Drehungsmomente x liefsen sich durch eine Gleichung folgendermafsen darstellen

$$x = x_0 + c e^{-a t^m},$$

worin e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, x_0, c, a und m vier aus den Versuchen zu berechnende Konstanten sind.

In folgender Tabelle sind einige der von Kohlrausch in dieser Weise beobachteten und nach jener Gleichung mit den Konstanten

$$x_0 = 0{,}8970; \quad c = 0{,}04054; \quad a = 0{,}35272; \quad m = 0{,}25$$

berechneten Werte von x zusammengestellt. Die Drehungsmomente x sind einfach durch die Sinus der beobachteten Ablenkungswinkel α gegeben.

Zeit Minuten	x		Zeit Minuten	x	
	Beob.	Berechn.		Beob.	Berechn.
1,25	0,9247	0,9249	35	0,9145	0,9142
1,92	0,9238	0,9238	50	0,9138	0,9129
2,50	0,9231	0,9230	110	0,9120	0,9099
3,32	0,9218	0,9217	160	0,9079	0,9086
5,25	0,9211	0,9208	206	0,9071	0,9077
7,58	0,9197	0,9196	300	0,9054	0,9063
9,67	0,9188	0,9188	452	0,9051	0,9050
12	0,9181	0,9180	1310	0,9042	0,9019
18	0,9168	0,9166	1780	0,8995	0,9011
25	0,9154	0,9154	2760	0,8995	0,9001

Die Zahlen zeigen, wie gut sich die allmähliche Abnahme des Torsionsdrehungsmomentes durch jene Gleichung darstellen läfst. Nach der Gleichung würde x_0 den Wert des Torsionsdrehungsmomentes bedeuten, welchem sich dasselbe bei konstant erhaltener Torsion von drei Umdrehungen mit wachsender Zeit immer mehr annähert, denn setzt man in der Gleichung die Zeit t unendlich grofs, so wird $x = x_0$.

Entsprechend der zweiten Beobachtung Webers zeigte Kohlrausch, dafs ein tordierter Draht nicht sofort nach Aufheben der Torsion in seine frühere Gleichgewichtslage zurückkehrt, sondern dafs er eine nur sehr allmählich sich verlierende Torsion beibehält. Ja, er fand, dafs es keineswegs einer lange dauernden Torsion bedarf, damit sich diese Nachwirkung zeige, dafs schon eine Torsion von wenigen Sekunden ausreicht, um eine deutliche Nachwirkung hervorzurufen. Bezeichnet man den Winkel, um welchen der Draht zur Zeit t Minuten nach Aufheben der ihm ursprünglich erteilten Torsion noch aus seiner Gleichgewichtslage gedreht bleibt, mit x, so läfst sich derselbe allgemein darstellen durch die Gleichung

$$x = C \cdot e^{-\frac{\alpha}{1-n} \cdot t^{1-n}},$$

worin e wie immer die Basis des natürlichen Logarithmensystems, C, α und n Konstanten bedeuten. Die Konstanten hängen bei gegebener Temperatur von der Gröfse und Dauer der ursprünglich dem Drahte erteilten Torsion ab. Sind die anfänglich dem Drahte erteilten Torsionen nicht zu grofs und übersteigt die Dauer derselben nicht 3 Minuten, so lassen sich die Winkel x durch die einfachere Gleichung

$$x = c \frac{1}{t^{\alpha}}$$

darstellen, worin c von der Gröfse und Dauer der ursprünglichen Torsion, sowie von dem Material und der Temperatur des Drahtes, α dagegen bis zu Temperaturen von 22° C. nur von dem Material des Drahtes abhängig ist[1]).

[1]) *Kohlrausch*, Poggend. Ann. CXXVIII p. 418.

Für einen Silberdraht fand Kohlrausch für die Gröſse c, wenn der Draht T Minuten um den Winkel φ Grad tordiert war und die Temperatur des Drahtes τ^0 C. betrug,

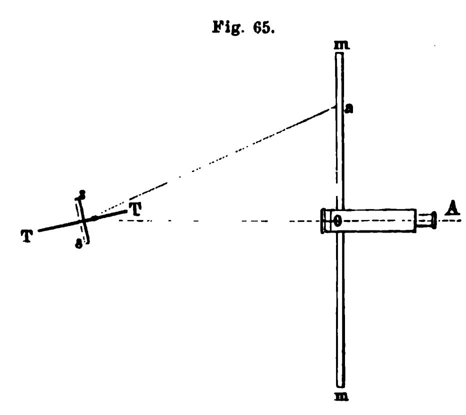
$$c = (0{,}000\,021\,9\ \varphi + 0{,}000\,000\,018\,7\ \varphi^2)\ T^{0{,}59}\ (\tau + 21{,}5).$$

Die Konstante α war für Silber gleich 0,3875. Für einen Messingdraht fand sich $\alpha = 0{,}1643$, für einen Glasfaden berechnete Kohlrausch[1]) aus Versuchen Boltzmanns[2]), wenn die Torsion 180° betrug und nicht länger als $^1/_2$ Minute dauerte, $\alpha = 0{,}968$ und 0,923. Für einen Kautschukfaden ergab sich dagegen α schon bei kleinen nur $^1/_2$ Minute dauernden Torsionen wesentlich von der Gröſse φ der ursprünglichen Torsion abhängig.

Um ein Bild von der Gröſse und dem Gange der elastischen Nachwirkung zu geben, sind in folgender Tabelle einige Beobachtungen von Kohlrausch an dem Silberdrahte, an welchem obige Konstanten erhalten sind, mitgeteilt. Der Silberdraht hat eine Länge von 125 Millimeter. Die Torsionen wurden mittels der Gauss-Poggendorffschen Spiegelablesung gemessen, welche wir wegen ihrer ausgedehnten Anwendung zu ähnlichen Messungen hier schon beschreiben wollen. Die Methode ist die genaueste, um kleine Drehungswinkel scharf zu messen.

Man befestigt zu dem Zwecke an die Drehungsaxe des drehbaren Körpers, hier also an dem untern Ende des Fadens, einen kleinen ebenen Spiegel, so daſs die Spiegelebene ss (Fig. 65) der Drehungsaxe parallel, hier also vertikal ist. In einiger Entfernung ist dem Spiegel ein Fernrohr Ao gegenübergestellt, unter oder über welchem ein Maſsstab mm so angebracht ist, daſs er dem ungedrehten Spiegel parallel steht, und daſs, wenn der Spiegel in der Ruhelage sich befindet, der durch das Fernrohr blickende Beobachter am Fadenkreuz des Fernrohrs das Spiegelbild des Nullpunktes der Teilung erblickt, welcher sich unmittelbar unter dem Fernrohr bei o befindet. Dreht sich dann der Spiegel um irgend einen kleinen Winkel, so sieht man durch das Fernrohr das Spiegelbild eines andern Teilstriches a der Skala am Fadenkreuz. Hat man den Abstand der Skala vom Spiegel gemessen, so erhält man aus dem Abstande oa des beobachteten Skalenteils den Winkel α, um welchen sich der Spiegel gedreht hat, in folgender Weise.

Fig. 65.



Da man in der Ruhelage des Spiegels den am Fernrohr befindlichen Nullpunkt der Teilung erblickt, so folgt, daſs die Axe des Fernrohrs senkrecht zur Ebene des Spiegels ist, wenn derselbe in der Ruhelage ist, oder

---

[1]) *Kohlrausch*, Poggend. Ann. Bd. CLVIII.

[2]) *Boltzmann*, Wiener Berichte Bd. LXX. Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII.

die Richtung soA ist senkrecht zu der Spiegelebene in der Ruhelage. Sieht man nach der Drehung des Spiegels in dem Fernrohr den Teilstrich a, so beweist das, dafs der von a ausgehende Lichtstrahl as am Spiegel nach der Richtung soA reflektiert wird. Nach dem Reflexionsgesetz wird ein einfallender Strahl as stets so reflektiert, dafs der reflektierte Strahl mit der zum Spiegel senkrechten Richtung TT, dem Einfallslot, denselben Winkel bildet, wie der einfallende Strahl. Nennen wir also den Reflexionswinkel $osT = \alpha$, so ist der Winkel $aso = 2\alpha$. Da nun in der Ruhelage das Einfallslot in die Richtung sO fiel, ist α der Winkel, um welchen sich der Winkel gedreht hat. In dem rechtwinkeligen Dreieck aos liegt die Kathete ao dem Winkel 2α gegenüber, somit ist

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{ao}{os}.$$

Die Länge ao, der Abstand des in der abgelenkten Lage gespiegelten Skalenteils von dem Nullpunkte der Skala dividiert durch den Abstand der Skala von dem Spiegel gibt uns also die Tangente des doppelten Drehungswinkels des Spiegels. Da man auf diese Weise immer nur kleine Winkel mifst, kann man die Tangente des doppelten Winkels noch gleich der doppelten Tangente des einfachen Winkels setzen, oder

$$\operatorname{tang} \alpha = \tfrac{1}{2} \frac{ao}{os}.$$

In den meisten Fällen kann man sogar die Tangente mit dem Bogen vertauschen, und setzen

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \frac{ao}{os}$$

oder auch kurz, indem man os in Skalenteilen mifst, wenn der Abstand ao gleich n Skalenteilen ist, schreiben

$$a = k \cdot n,$$

wo man durch passende Bestimmung der Konstanten k sofort α in Bogenminuten oder auch Graden aus der beobachteten Ablenkung n erhält.

In dieser Weise erhält man in folgender Tabelle, in welcher die Ablenkungen x in Skalenteilen angegeben sind, den Wert derselben in Bogenminuten durch Multiplikation mit 0,706.

Zeit nach der Torsion t in Minuten	I x		II x		III x	
	Beob.	Berechn.	Beob.	Berechn.	Beob.	Berechn.
0,166	38,	41,5	—	—	74	74,8
0,33	33,6	34,0	53,5	54,6	65,9	66,7
1,0	24,3	24,2	41,3	40,6	53,4	53,0
2,0	19,3	19,3	33,6	32,8	44,8	44,4
5	13,9	14,0	23,8	23,8	33,7	33,7
10	11,0	10,9	17,9	18,1	26,0	26,2
20	7,9	8,3	13,4	13,4	19,6	19,7
50			8,9	8,5	12,6	12,5
80			7,2	6,6	10,5	9,5

Die Gröfse der bei diesen Beobachtungsreihen stets angewandten primären Torsion betrug 180°, die Dauer bei der ersten Reihe 2, bei der zweiten 5, bei der dritten 10 Minuten.

Die Zahlen zeigen, dafs schon bei kurz dauernder Torsion die Nachwirkung merklich ist, und wie die Nachwirkung mit der Dauer der Torsion wächst; bei der Torsionsdauer 10 Minuten ist die Nachwirkung nach einer sechstel Minute schon fast 1°. Bei einer Torsionsdauer von 9 Stunden und einer Torsion von 585° betrug die Nachwirkung gleich nach Aufheben der primären Torsion 30°, also fast ein Zwanzigstel des ursprünglichen Torsionswinkels.

Kohlrausch hat ebenfalls die elastische Nachwirkung bei der Dehnung und Biegung näher untersucht; mit Metall- oder Glasstreifen war in den Fällen die Nachwirkung zu gering, um genau verfolgt werden zu können, er beobachtete daher die Nachwirkung bei der Dehnung an Kautschukfäden und die bei der Biegung an Stäben aus Hartkautschuk (Ebonit)[1]. Er fand in beiden Fällen, dafs die Gesetze der elastischen Nachwirkung im wesentlichen dieselben waren wie bei der Torsion. Wir verweisen wegen des Specielleren auf die Arbeit von Kohlrausch. Nur sei hier noch des merkwürdigen Verhaltens der Körper Erwähnung gethan, wenn man sie nach einander verschiedenen Änderungen unterworfen hat. Wie wir sahen, nimmt die Nachwirkung bei der Torsion, und so ist es bei allen übrigen, mit der Gröfse und Dauer der primären Torsion sowohl an Gröfse als Dauer zu, immer aber ist die Annäherung an den Gleichgewichtszustand anfänglich eine erheblich raschere als später. Wenn man nun einem Körper zunächst eine starke länger dauernde Torsion in einem Sinne erteilt, und dann, während er nach Aufheben derselben sich allmählich der Gleichgewichtslage nähert, ihm eine kurz dauernde Torsion im entgegengesetzten Sinne gibt, so zeigt sich, dafs die einzelnen Nachwirkungen sich superponieren, das heifst, man findet, dafs nach der zweiten kürzern entgegengesetzten Torsion sich der Draht zunächst der Lage nähert, aus welcher man ihn tordiert hatte, dann einen Augenblick zur Ruhe kommt, und dafs er dann wieder der Nachwirkung von der ersten Torsion folgend sich wieder seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage nähert. So wurde ein Kautschukfaden einen Tag lang um drei Umdrehungen tordiert. Losgelassen zeigte derselbe eine sehr starke Nachwirkung und in der ersten Zeit näherte er sich etwa 10° in der Sekunde seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage. Nach 10 Minuten hatte er sich um mehr als 180° derselben genähert, und er drehte sich in der Sekunde nur mehr etwa $\frac{1}{30}$° zurück. Nun drillte man den Draht während 40 Sekunden nach der entgegengesetzten Richtung; nach Aufheben dieser Torsion zeigte der Faden zunächst eine Nachwirkung im Sinne derselben. Der Faden ging nicht sofort in die Lage zurück, aus der man ihn das zweite Mal tordiert hatte, sondern näherte sich derselben stetig während 3,5 Minuten. Ehe er indes dieselbe erreicht hatte, kehrte sich der Sinn der Bewegung um, das heifst der Körper näherte sich wieder, wie wenn die zweite Torsion nicht stattgefunden hätte, der ursprünglichen Gleichgewichtslage.

Die Thatsache, dafs die elastischen Änderungen eines Körpers unter

[1]) *Kohlrausch*, Poggend. Ann. Bd. CLVIII.

Wirkung äufserer Kräfte oder nach Aufhören dieser Wirkung nicht vollständig augenblicklich erfolgen, dafs sie zum Teil sehr langsam erfolgen beweist, dafs die der ganzen Elasticitätslehre zu Grunde liegende Annahme, nach welcher die augenblickliche Lage der Moleküle im Innern eines Körpers durch die augenblicklich wirkenden Kräfte bestimmt wird, einer Modifikation bedarf. Es haben allerdings die Moleküle, sobald bestimmte äufsere Kräfte auf einen Körper wirken, nur eine Gleichgewichtslage, indessen kann das Eintreten in diese Gleichgewichtslage eine sehr lange Zeit dauern. Wir müssen daraus schliefsen, dafs der Bewegung der Moleküle, sobald sie nicht zu weit aus ihrer Gleichgewichtslage, wie sie den augenblicklich wirksamen Kräften entspricht, gebracht sind, ein Widerstand entgegensteht, der ihre Bewegung verlangsamt. Es mufs das aber ein Widerstand ganz eigentümlicher Art sein, wie wir ihn sonst bei Bewegungen nicht finden. Bei allen sonstigen Bewegungen können wir den Widerstand in Rechnung ziehen, indem wir einfach von der bewegenden Kraft eine gewisse Gröfse abziehen, der Quotient aus dieser Differenz und der zu bewegenden Masse gibt uns dann die Beschleunigung. Da bei den elastischen Änderungen die Kraft, welche die Moleküle gegen die Gleichgewichtslage treibt, dem Abstand der Moleküle von der Gleichgewichtslage proportional ist, so ist bei gleicher Verschiebung die bewegende Kraft dieselbe; da nun bei gleicher Lagerung der Moleküle auch der Widerstand derselbe sein müfste, so müfste bei gleicher Verschiebung auch die Geschwindigkeit, mit der die Moleküle sich der Gleichgewichtslage nähern, stets dieselbe sein. Das ist aber, wie wir sahen, keineswegs der Fall. Die in der letzten Tabelle mitgeteilten Beobachtungen zeigen, dafs bei einer Torsion von 180°, welche 2 Minuten dauerte, nach 10″ die Drillung des Silberdrahtes bis auf 27′ verschwunden ist, als dagegen dieselbe Torsion 10 Minuten gedauert hatte, war in 10″ die Drillung erst bis auf 52′ verschwunden, und es dauerte fast 5 Minuten, bis sie auf 27′ verschwunden war. Im ersten Falle geht sie dann in 20′ bis auf etwa 5′ zurück, im zweiten ist sie nach 80 Minuten erst auf etwa 8′ zurückgegangen. Ja, hat man eine stärkere ursprüngliche Torsion angewandt, und diese Stundenlang dauern lassen, so kann die langsame Rückkehr in die Gleichgewichtslage schon beginnen, wenn die Drillung noch viele Grade beträgt, wir erwähnten den Versuch von Kohlrausch, wo sie noch 30° betrug; erst in 130 Tagen ging sie da auf 27′ zurück.

Noch räthselhafter wird der Vorgang durch die erwähnte von Kohlrausch nachgewiesene Superposition der elastischen Nachwirkung. Hat man einen Faden tordiert, so dafs er Nachwirkung zeigt, so werden durch eine entgegengesetzte Torsion die Moleküle nicht in derselben Weise verschoben, wie wenn man dem ungedrillten Faden dieselbe Torsion erteilt hätte, sondern nach Aufhören der neuen Torsion und der von ihr herrührenden Nachwirkung tritt die erstere wieder hervor. Man kann also die Nachwirkung nicht etwa aufheben, indem man durch eine äufsere Kraft den Faden in die untordierte Lage bringt. Selbst wenn man ihn in dieser eine nicht zu lange Zeit festhält, geht er aus dieser wieder heraus in die durch die frühere Torsion bedingte Lage, um dann ganz allmählich in die ungedrillte Lage zurückzukehren.

Es ist deshalb auch noch nicht gelungen eine Theorie der elastischen Nachwirkung zu geben, das heifst sie auf die molekularen Vorgänge im

Innern der Körper zurückzuführen[1]). Wir begnügen uns daher, hier kurz die Betrachtungen mitzuteilen, welche W. Weber[2]) und F. Kohlrausch[3]) zur Ableitung der obigen die elastische Nachwirkung darstellenden Gleichung geführt haben[4]).

Beide Physiker gehen eben davon aus, dafs bei jeder elastischen Verschiebung die Moleküle den wirksamen Kräften nicht frei folgen können, dafs sich also ein Widerstand dem Eintritt in die neue durch die gerade wirksamen Kräfte bedingte Gleichgewichtslage entgegenstellt. Nennen wir den Abstand der Moleküle von dieser Gleichgewichtslage x, so setzt W. Weber die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Moleküle in dieselbe hinbewegen, irgend einer Potenz des Abstandes x proportional. Kohlrausch dagegen führt auch die Zeit t ein, welche seit dem Beginn des Wirkens der die neue Gleichgewichtslage bedingenden Kräfte verstrichen ist, also z. B. die Zeit, welche seit dem Aufheben der primären Torsion verstrichen ist. Er setzt dann die Geschwindigkeit, mit welcher die Moleküle zur Zeit t sich der Gleichgewichtslage nähern, dem Abstand x direkt und irgend einer Potenz der Zeit t umgekehrt proportional. Da wir nun, wie wir sahen, diese Geschwindigkeit stets als den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit schreiben können, liefert die Annahme von Kohlrausch die Gleichung

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t^n},$$

wo wir links das negative Vorzeichen schreiben müssen, weil die Bewegung eine Abnahme der x hervorbringt, also der Richtung entgegengesetzt ist, nach welcher x als positiv gerechnet ist. Bei nicht grofsen kurz dauernden primären Änderungen kann man n gleich 1 setzen, und erhält dann

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t}.$$

Diese Gleichung läfst sich schreiben

$$-\frac{dx}{x} = \alpha \frac{dt}{t}.$$

Den zur Zeit t vorhandenen Abstand von der Gleichgewichtslage erhalten wir dann, wenn wir den zu einer bestimmten Zeit t_1 nach Aufhören der primären Änderung vorhandenen Abstand mit x_1 bezeichnen, durch Bildung der Summe aller Werte auf der linken Seite von x_1 bis x, auf der rechten Seite von t_1 bis t, oder durch Bildung der bestimmten Integrale

$$\int_{x_1}^{x} -\frac{dx}{x} = \int_{t_1}^{t} \alpha \frac{dt}{t}.$$

---

[1]) Man sehe dahin gerichtete Versuche von *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. Bd. CLI, Poggend. Ann. CLIV. Annalen der Physik und Chemie, neue Folge (Wiedem. Ann.) Bd. IV. *Neesen*, Poggend. Ann. CLVII.

[2]) *W. Weber*, Poggend. Ann. Bd. LIV.

[3]) *Kohlrausch*, Poggend. Ann. Bd. CXIX, CXXVIII.

[4]) Eine andere und eingehendere Entwicklung gibt *Boltzmann*, Wien. Ber. Bd. LXX. Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. Man sehe über dieselbe auch *Kohlrausch*, Poggend. Ann. Bd. CLX.

Nach E 2 und E VIII sind dieselben

$$-(\log \text{nat}\, x - \log \text{nat}\, x_1) = \log \text{nat}\, t^\alpha - \log \text{nat}\, t_1{}^\alpha,$$

oder auch

$$\frac{x_1}{x} = \frac{t^\alpha}{t_1{}^\alpha}$$

$$x = \frac{x_1 t_1{}^\alpha}{t^\alpha} = c\,\frac{1}{t^\alpha},$$

wenn wir den aus den Beobachtungen zu bestimmenden Zähler der rechten Seite mit c bezeichnen. Wir gelangen somit zu der Gleichung, welche Kohlrausch bei allen kleinern und kurz dauernden Änderungen bestätigt fand, und erkennen gleichzeitig, dafs α eine für das betreffende Material charakteristische Konstante ist, welche deshalb Kohlrausch auch als die Konstante der elastischen Nachwirkung bezeichnet.

Bei stärkern länger dauernden primären Änderungen ist n nicht gleich 1, dann erhalten wir für die Verschiebung x zur Zeit t

$$\int_{x_1}^{x} -\frac{dx}{x} = \int_{t_1}^{t} \alpha\,\frac{dt}{t^n} = \int_{t_1}^{t} \alpha t^{-n} dt,$$

und das wird mit Beachtung der Regel E 1 für die rechte Seite der Gleichung

$$\log \text{nat}\, x_1 - \log \text{nat}\, x = -\frac{\alpha}{n-1}\,t^{-(n-1)} + \frac{\alpha}{n-1}\,t_1{}^{-(n-1)},$$

oder, wenn wir $t_1 = 0$ setzen, also x_1 als die Verschiebung ansehen, die im Augenblick des Aufhörens der primären Änderung vorhanden ist,

$$\log \text{nat}\,\frac{x}{x_1} = \frac{\alpha}{n-1}\,t^{1-n}$$

$$x = x_1 e^{-\frac{\alpha}{n-1} t^{1-n}},$$

also die Gleichung, welche Kohlrausch in diesem Falle experimentell bestätigte. Wie die Versuche zeigen hängt bei solchen primären Änderungen auch der Wert von α von der Stärke und Dauer derselben ab, er wird besonders mit wachsender Dauer der primären Änderung kleiner, das heifst die elastische Nachwirkung verläuft um so langsamer, je länger die primäre Änderung gedauert hat.

§ 55.

Elasticitätsgrenze. Die bisher besprochenen durch äufsere Kräfte hervorgebrachten Veränderungen des Volumens oder der Gestalt der Körper waren vorübergehende, der Körper kehrte nach Aufhören der Wirkung der äufsern Kräfte in seinen frühern Zustand zurück, wenn auch ein Teil dieser rückkehrenden Bewegung sehr langsam war. Diese Rückkehr in die ursprüngliche Gleichgewichtslage findet jedoch keineswegs immer statt, man findet vielmehr immer dann bleibende Änderungen, wenn die ändernden Kräfte oder vielmehr die durch diese hervorgebrachten Änderungen eine gewisse Gröfse überschreiten. Wird ein Draht durch einen sehr starken Zug gedehnt, so behält er nach Aufhören desselben einen Teil seiner Ver-

längerung bleibend bei, er nimmt, auch wenn die elastische Nachwirkung ganz vorüber gegangen ist, nicht wieder die frühere Länge an, seine Moleküle haben eine neue Gleichgewichtslage erhalten. Dasselbe findet man bei den andern von uns betrachteten Fällen; ein zu weit tordierter Draht kehrt nicht wieder in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück, ebenso gibt eine zu starke Biegung eine bleibende Durchbiegung des gebogenen Stabes. Hierauf beruht die Verlängerung eines Drahtes, wenn man ihn durch einen Drahtzug zieht; der Abdruck des Stempels auf den Münzen; das Auswalzen der Bleche, die Wirkung des Hämmerns und alle ähnlichen Formänderungen, welche man ohne Trennung des Zusammenhanges der Körper bewirkt.

Es gibt demnach eine Elasticitätsgrenze, oder eine Grenze, welche äufsere Kräfte bei ihrer Wirkung auf die Körper nicht überschreiten dürfen, ohne die Körper dauernd zu ändern. Als diese Grenze definiert man dann jene Kraft, beim Dehnen also die Gröfse des Zuges, bei der Torsion jenes Drehungsmoment, welches die erste bleibende Änderung des Körpers hervorbringt. Diese Grenze ist für verschiedene Substanzen sehr verschieden, Blei z. B. erhält schon bei sehr schwachem Zuge, bei sehr geringer Torsion oder Biegung eine bleibende Änderung, während es bei Eisen oder Stahl ganz erheblicher Kräfte bedarf.

So leicht es ist, eine Definition der Elasticitätsgrenze aufzustellen, so schwierig ist eine scharfe Bestimmung derselben. Zunächst erkennt man, dafs strenge genommen eine Kraft, welche eine bleibende Formänderung bewirkt, schon aufserhalb der Elasticitätsgrenze liegt. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, hat man z. B. bei der Dehnung jenen Zug, in Kilogrammen ausgedrückt, der pro Quadratmillimeter des Querschnitts wirkt, als Elasticitätsgrenze bezeichnet, welcher einen Draht um 0,00005 seiner ursprünglichen Länge dauernd verlängert.

Indes auch nach dieser Definition, und selbst abgesehen von der elastischen Nachwirkung, bietet die exakte Bestimmung dieser Grenze eine grofse Schwierigkeit, ja ist nach den Beobachtungen von Thalén[1]) gar nicht möglich, wenigstens dann nicht, wenn man die Elasticitätsgrenze in ähnlicher Art wie den Elasticitätskoefficienten als eine für das Material charakteristische Konstante ansehen will. Zunächst scheint die Zeitdauer der Wirkung der äufseren Kräfte auf die bleibende Veränderung der Körper in ähnlicher Weise von Einflufs zu sein wie bei der elastischen Nachwirkung, ja es scheinen selbst kleine Belastungen bei dauernder Einwirkung permanente Veränderungen hervorzubringen. Aus dem Grunde erlahmen auf die Dauer alle Federn, biegen sich die Balken in den Decken u. s. f. Ferner hat Thalén gezeigt, dafs das Eintreten einer permanenten Verlängerung durch den Zug wesentlich davon abhängig ist, ob der Körper schon früher eine Dehnung erfahren hat oder nicht. Ein früher noch nicht gedehnter Körper erhält schon durch kleine Gewichte eine bleibende Verlängerung, ein bereits durch einen starken Zug bleibend gedehnter erst durch sehr viel gröfsere. So fand Thalén bei einem Stabe von mittelhartem schwedischen Stahl, dafs bei der ersten Dehnung die Elasticitätsgrenze nach obiger Definition gleich 19,3 war, das heifst ein Zug von 19,3 Kilogramm auf den Quadratmillimeter brachte bei kurz dauernder Wirkung eine bleibende Ver-

[1]) Poggend. Ann. Bd. CXXIV.

längerung von 0,00005 der ursprünglichen Länge hervor. Derselbe Stab wurde dann nach und nach einem Zuge bis zu 40 Kilogr. auf das Quadratmillimeter ausgesetzt, wodurch seine bleibende Verlängerung bis auf 0,005 der ursprünglichen Länge zunahm. Der so verlängerte Stab wurde neuen Dehnungsversuchen unterworfen, und es ergab sich, dafs eine neue bleibende Verlängerung jetzt nicht eintrat, wenn auch die früher bestimmte Elasticitätsgrenze erheblich überschritten wurde. Erst ein Zug von 33,8 Kilogr. auf das Quadratmillimeter brachte eine neue Verlängerung von 0,00005 der ursprünglichen Länge hervor. Bei dieser Versuchsreihe wurde der Zug bis auf 44,5 Kilogr. auf das Quadratmillimeter gesteigert und der Stab um 0,00855 seiner ursprünglichen Länge bleibend verlängert. Nachfolgende Dehnungen des Stabes ergaben dann, dafs bei dem so verlängerten Stabe die Elasticitätsgrenze erst bei 38,6 Kilogramm erreicht war.

Es ergibt sich somit, dafs durch vorhergehende Streckungen die Elasticitätsgrenze sehr erheblich erweitert wird, dafs man deshalb die gleiche Elasticitätsgrenze bei demselben Material nur dann findet, wenn dasselbe vorher durch den gleichen Zug gedehnt worden ist. Man erhält deshalb für hart gezogene Drähte eines Metalls ziemlich übereinstimmende Werte der Elasticitätsgrenze. In dieser Weise sind auch die in der Tabelle des folgenden Paragraphen angegebenen von Wertheim[1]) erhaltenen Zahlen für hart gezogene Drähte zu verstehen.

Die Beobachtungen Thaléns erklären auch den grofsen Unterschied, welcher, wie ebenfalls die Tabelle des folgenden Paragraphen zeigt, Wertheim für die Elasticitätsgrenze hart gezogener und geglühter und dann langsam abgekühlter Drähte fand. Durch das Erhitzen gehen die Metalle wieder in den molekularen Zustand über, den sie vor der Streckung besafsen, und deshalb tritt schon bei viel geringerem Zuge eine dauernde Verlängerung ein. Wie Thalén fand, tritt diese Senkung der Elasticitätsgrenze schon bei einer Erwärmung auf 200°C. ein. Das Gleiche wird durch eine Reihe von Erfahrungen in der Technik bestätigt, wir erwähnen nur die leichtere Schmiedbarkeit der Metalle, wenn sie glühend sind; die Notwendigkeit beim Auswalzen der Bleche, wenn sie durch mehrere Walzen gegangen sind, dieselben erst neu zu erwärmen u. m. a.

Für die Torsion und Biegung hat Wiedemann[2]) schon früher ganz ähnliches gefunden, es zeigt sich auch dort, dafs durch mehrmaliges Tordieren und Biegen die Elasticitätsgrenze ganz erheblich herausgerückt wird. Man kann deshalb, wie Wiedemann hervorhebt, bei vorher noch gar nicht deformierten, gedehnten, tordierten oder gebogenen Körpern eigentlich von keiner Elasticitätsgrenze sprechen, schon die geringsten temporären Deformationen haben bleibende Änderungen zur Folge; erst wenn man die Körper hinlänglich oft innerhalb gewisser Grenzen durch bestimmte äufsere Kräfte deformiert hat, kehren sie bei erneuerter Einwirkung derselben oder kleinerer Kräfte im gleichen Sinne, wie die zuletzt angewandten waren, in denselben Zustand zurück, den sie vor dieser erneuerten Einwirkung besafsen.

[1]) *Wertheim*, Poggend. Ann. Erg.-Bd. II. Ann. de chim. et de phys. III. Ser. T. 12.

[2]) *Wiedemann*, Poggend. Ann. Bd. CIII, Bd. CVI, Bd. CVII, Bd. CXVII. Neue Folge, Bd. VI. Über den Zustand permanent tordierter Drähte sehe man auch *Warburg*, Annalen der Physik, Neue Folge, Bd. X.

§ 56.

Festigkeit. Wenn man die Einwirkung äufserer Kräfte auf festen Körper über die Elasticitätsgrenze hinaus fortsetzt, so gelang endlich dahin, dafs der Zusammenhang der einzelnen Teile aufg wird; ein über die Elasticitätsgrenze belasteter Draht zerreifst, un starkem Drucke wird ein Körper zerquetscht oder zerstampft, ein zu tordierter Faden wird abgedreht, und ein zu stark gebogener Sta zerbrochen.

Man bezeichnet den Widerstand, den ein Körper der Trennung Teile entgegensetzt, mit dem Namen Festigkeit. So viele versch Arten der Einwirkung es gibt, so viele Arten Festigkeit. Ma das Gewicht zu bestimmen gesucht, welches einen Draht von beli Länge und 1 Millimeter Durchmesser zu zerreifsen imstande ist, und durch dieses die Zugfestigkeit oder absolute Festigkeit der Körper findet in der folgenden Tabelle eine Anzahl Angaben nach den Vers von Wertheim. Zur Bestimmung dieser Zahlen hat man mit dens Schwierigkeiten zu kämpfen, die vorhin erwähnt wurden; bei langs und dauernder Belastung reifst ein Draht viel früher als bei schnelle kurz dauernder, Stöfse natürlich ausgenommen. Die Festigkeit wird d durch die Belastung vermindert. Die folgenden Angaben beziehen sich langsame Belastung [1]).

Metalle		Elasticitätsgrenze	Gewichte bei Zerreifsen
Blei	gezogen	0,25 klgrm.	2,07
	angelassen	0,20	1,8
Zinn	gezogen	0,45	2,
	angelassen	0,20	1
Gold	gezogen	13,5	[illegible]
	angelassen	3,0	
Silber	gezogen	11,25	
	angelassen	2,75	
Zink	gezogen	0,75	
	angelassen	1,00	
Kupfer	gezogen	12,0	
	angelassen	3,0	
Platin	gezogen	26,0	
	angelassen	14,5	
Eisen	gezogen	32,5	
	angelassen	5,0	
Gufsstahl . .	gezogen	55,6	
	angelassen	5,0	
Stahldraht . .	gezogen	42,5	
	angelassen	15,0	

Man sieht, auch hier zeigt sich ein auffallender Unterschie den verschiedenen Metallen sowohl als auch zwischen den ver en desselben Metalles, je nachdem es gezogen oder geglüht

[1]) a. a. O.

Man sieht ferner, wie zwischen den Gewichten, welche die Elasticitäts-
renze angeben, und jenen, die das Zerreifsen bewirken, bei den verschie-
enen Metallen ein verschiedener Unterschied vorhanden ist; je gröfser der
Interschied ist, um so dehnbarer ist das Metall, ohne dafs man jedoch
iesen Unterschied als Mafs der Dehnbarkeit hinstellen könnte.

Die Kraft, mit der ein Körper dem Zerdrücken widersteht, nennt man
ie rückwirkende Festigkeit; über diese sind nur wenige ältere, meist zu
raktischen Zwecken angestellte Versuche vorhanden.

Die relative oder Bruchfestigkeit ist zu praktischen Zwecken vielfach
ntersucht worden, um die Tragfähigkeit von Balken, Axen u. s. f. zu be-
timmen. Gefundene Zahlen anzuführen, denen nur eine praktische Be-
eutung zuzuschreiben ist, erscheint überflüfsig.

Die Gesetze, nach denen sich die Festigkeiten mit den Dimensionen des
örpers ändern, sind nicht bekannt. Annähernd richtige Resultate wird man
nter Anwendung der für die Elasticität gültigen Gesetze erhalten, also z. B.
ei der Zugfestigkeit unter der Annahme, dafs dieselbe proportional dem Quer-
hnitt sei. Jedoch haben Versuche gezeigt, dafs es nicht statthaft ist, aus
ersuchen mit Drähten von kleinen Dimensionen auf Stäbe von gröfseren
imensionen zu schliefsen.

Gleiches gilt von der Drehfestigkeit, auch über diese ist nichts Genaueres
kannt.

Man unterscheidet noch eine fünfte Art von Festigkeit, die Härte. Man
rsteht darunter den geringern oder gröfsern Widerstand, den ein Körper
m Eindringen von Spitzen oder Schneiden entgegensetzt. Man hat darnach
Körper in 10 Klassen geteilt und bestimmt den Grad der Härte darnach,
lche Körper den zu untersuchenden noch ritzen können, und welche er
zen kann. Die Körper, welche man als Härteskala aufgestellt hat, sind nach
hs vom geringsten zum gröfsten Härtegrad fortschreitend folgende 10[1])

1) Talk,
2) Steinsalz,
3) Kalkspath,
4) Flufsspath,
5) Apatit,
6) Feldspath,
7) Quarz,
8) Topas,
9) Korund,
10) Diamant.

Man legt darnach einem Körper z. B. den Härtegrad 5 bei, wenn er
ifsspath ritzen kann und selbst vom Feldspath geritzt wird. Körper, die
i gegenseitig ritzen, haben gleiche Härte.

§ 57.

Vom Stofse der Körper[2]). Auf der Eigenschaft der Elasticität be-
ien die Bewegungserscheinungen, welche zwei Körper darbieten, wenn
gegen einander prallen, wenn sie sich stofsen.

---

[1]) *v. Kobell*, Lehrbuch der Mineralogie.
[2]) Die Gesetze des Stofses wurden vollständig zu gleicher Zeit von Wallis,

Haben zwei Massen m und m' gewisse gleichgerichtete Geschwindigkeiten v und v' erhalten, so werden sie, wenn die Geschwindigkeit v von m gröſser ist als die v' von m', nach einiger Zeit auf einander treffen und während einer sehr kurzen Zeit gegen einander gedrückt sein. Infolge dieses Stoſses wird dann die Geschwindigkeit jedes der beiden Körper geändert sein, die Geschwindigkeit des stoſsenden Körpers wird verkleinert, die des gestoſsenen Körpers wird vergröſsert sein. Sind die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stoſse c und c', so erhalten wir zunächst ganz allgemein folgende Relation zwischen den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoſse. Während die Körper sich berühren, übt der eine auf den andern einen Druck aus, und infolge dieses Druckes wird die Geschwindigkeit geändert, und zwar für den stoſsenden Körper um $v - c$, für den gestoſsenen um $c' - v'$. Da der Druck auf die beiden Massen m und m' während derselben Zeit wirkt, so verhalten sich die Geschwindigkeiten, die diese Drucke erteilen, also die soeben abgeleiteten Geschwindigkeitsänderungen umgekehrt wie die Massen, denen sie erteilt sind, oder

$$\frac{v - c}{c' - v'} = \frac{m'}{m}$$

und daraus

$$mv + m'v' = mc + m'c'.$$

Um eine zweite Relation zwischen den Geschwindigkeiten zu erhalten, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1) Beide Körper sind absolut unelastisch. Der Stoſs wird dann eine bleibende Änderung der Gestalt hervorbringen, die Körper entfernen sich nach dem Stoſse nicht mehr von einander, sondern bewegen sich nach dem Stoſse mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter. In diesem Falle ist also $c = c'$, und wir erhalten

$$mv + m'v' = (m + m')\,c,$$

$$c = \frac{mv + m'v'}{m + m'},$$

$$v - c = \frac{m'(v - v')}{m + m'}, \quad c' - v = \frac{m(v - v')}{m + m'}.$$

War die Bewegung v' jener von v entgegengesetzt, so haben wir in diesen Ausdrücken nur v' mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen, und es wird

$$c = \frac{mv - m'v'}{m + m'}.$$

Und ist nun $mv = m'v'$, so wird $c = 0$, also beide Körper bleiben in Ruhe. Dieser Fall scheint also durchaus dem im § 11 abgeleiteten Satze von der Konstanz der lebendigen Kraft zu widersprechen, da die lebendige Kraft nach dem Stoſse gleich Null ist. Indes ist der Widerspruch nur scheinbar, da durch den Stoſs Arbeit geleistet, nämlich die Gestalt der Massen

---

Wren und *Huyghens* entwickelt und von Wallis am 26. November, von Wren am 17. Dezember 1668, von Huyghens am 4. Januar 1669 der Royal Society zu London vorgelegt, der letztere soll sie jedoch schon im Jahre 1663 entwickelt haben. Philos. Transact. of the Royal Soc. of. London from commencement etc. *Abridged* with notes etc. Vol. I. London 1809. p. 307; 310; 335.

bleibend geändert, und, wie wir später nachweisen werden, auch Wärme erzeugt ist. Und da hier, nicht nur wenn $c = 0$ ist, sondern in jedem Falle eine Gestaltsänderung der Massen erfolgt, also Arbeit geleistet wird, so muſs in jedem Falle die lebendige Kraft der bewegten Massen nach dem Stoſse kleiner sein wie vor dem Stoſse. Man findet diesen Satz bestätigt, wenn man die lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoſse vergleicht.

2) Wenn dagegen die beiden Körper vollkommen elastisch sind, so gleicht sich die im Stoſse eintretende Gestaltsänderung sofort wieder aus, da die zusammengedrückten Körper sich sofort wieder ausdehnen und ihre ursprüngliche Gestalt annehmen. Die Körper sind also nach dem Stoſse wieder in ihrem ursprünglichen Zustande, oder es ist bei dem Stoſse keine Arbeit geleistet worden. Die lebendige Kraft der bewegten Massen kann daher durch den Stoſs nicht geändert sein. Diese Bemerkung liefert uns für die elastischen Körper die zweite Relation zur Bestimmung der Geschwindigkeiten nach dem Stoſse; denn nach derselben ist

$$m v^2 + m' v'^2 = m c^2 + m' c'^2$$

oder

$$m(v^2 - c^2) = m'(c'^2 - v'^2).$$

Dividieren wir diese Gleichung durch die vorhin allgemein abgeleitete

$$m(v - c) = m'(c' - v'),$$

so folgt

$$v + c = v' + c',$$

und aus den beiden letzten Gleichungen

$$c = \frac{2m'v' + (m - m')v}{m + m'}; \quad c' = \frac{2mv + (m' - m)v'}{m + m'},$$

in denen wir wieder das Zeichen von v' ändern müssen, wenn die Geschwindigkeiten die entgegengesetzte Richtung haben.

Nehmen wir nun an, daſs $m = m'$ sei, so wird

$$c = v', \quad c' = v.$$

Die Körper haben also nach dem Stoſse ihre Geschwindigkeit einfach ausgetauscht. War die Geschwindigkeit der einen Masse m' gleich Null, so wird jetzt die der andern Null, denn dann wird

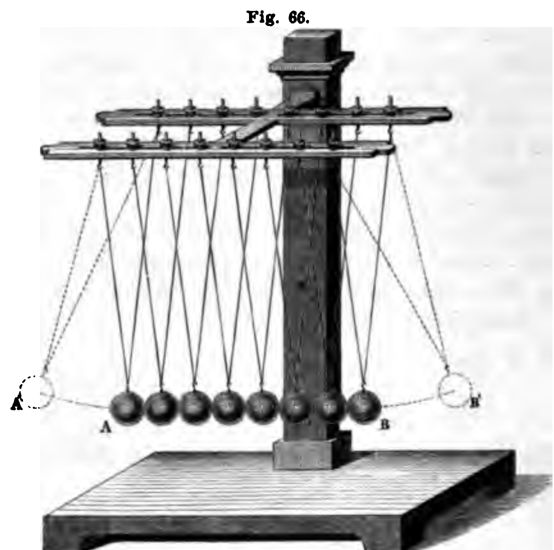
$$c = 0, \quad c' = v.$$

Wird also eine ruhende Kugel von einer bewegten ganz gleicher Masse gerade gestoſsen, so erhält sie von letzterer deren volle Geschwindigkeit, und die stoſsende Kugel bleibt in Ruhe. Dieser bemerkenswerte Schluſs läſst sich leicht durch den Versuch nachweisen[1]). Man hängt an einem Gestelle (Fig. 66) mehrere unter sich gleiche Kugeln von Elfenbein so auf, daſs sie sich berühren, und daſs ihre Centra sich in einer geraden Linie befinden. Man hebt nun die erste um einen gewissen Winkel und läſst sie dann fallen. Sie beschreibt einen Kreisbogen wie ein Pendel und stöſst

[1]) Der Apparat zum Nachweis des Satzes vom Stoſse der Körper wurde bereits von *Mariotte* angegeben. Mariotte, Traité de la percussion ou choc des corps. Paris 1677.

auf die zweite Kugel mit einer Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$. Nach dem Stofse ist sie in Ruhe, gibt aber ihre Geschwindigkeit an die zweite Kugel ab; diese überträgt sie an die dritte u. s. f. durch die ganze Reihe, bis schliefslich die letzte Kugel A die Geschwindigkeit erhält, welche B besafs, und deshalb bis A' aufsteigt.

Fig. 66.



Dann fällt A wieder zurück, erreicht dieselbe Geschwindigkeit und teilt dieselbe wieder durch alle die Kugeln hindurch an B mit. Man hat demnach ein Pendel, welches aus einer Reihe von Kugeln besteht, deren mittlere unbeweglich bleiben, und deren beide äufseren sich abwechselnd heben und senken.

Ist $m' = \infty$, $v' = 0$ so wird

$$c = \frac{v(m - m')}{m + m'} = -v\frac{m}{m'} = -v,$$

d. h. stöfst eine Kugel gegen eine feste Wand, so besitzt sie nach dem Stofse eine ihr gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit. Läfst man demnach eine Elfenbeinkugel auf eine Marmorplatte fallen, so mufs sie zurückspringen und zu derselben Höhe wieder aufsteigen, von der sie herabfiel, um neuerdings zu fallen und so ihre Bewegung ohne Ende fortzusetzen. Man weifs nun, dafs das nicht der Fall ist, dafs die Kugel allerdings zurückspringt, aber nicht bis zu ihrer ursprünglichen Höhe, und dafs ihre Bewegung nach und nach aufhört. Ebenso findet man, dafs die gestofsene Kugel niemals genau die Geschwindigkeit der stofsenden erhält, somit, dafs unserer Theorie entgegen jedesmal bei dem Stofse ein Verlust von lebendiger Kraft eintritt, respektive ein Teil der lebendigen Kraft in eine andere Form umgesetzt wird. Der Grund dieser Abweichung der Erfahrung von der Theorie liegt eben darin, dafs, wie wir § 54 und 55 sahen, die in der Theorie vorausgesetzte vollkommene Elasticität der Körper nicht besteht. Die durch die elastische Kraft geleistete Arbeit ist niemals genau gleich der in der ersten Hälfte des Stofses geleisteten Arbeit, es wird vielmehr immer im Innern sowohl des stofsenden als des gestofsenen Körpers ein Teil der geleisteten Arbeit in andere Formen umgesetzt.

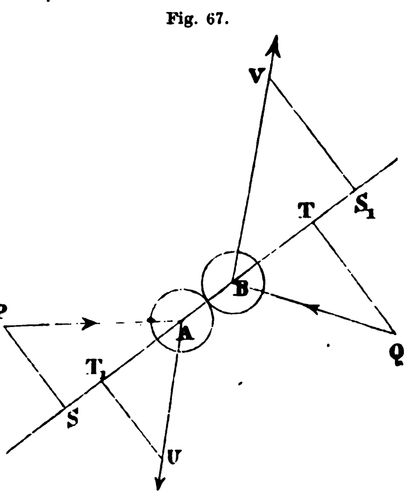
Die in dem Bisherigen abgeleiteten Stofsgesetze gelten nicht nur für Kugeln, sondern für Körper beliebiger Formen unter der Voraussetzung, dafs die Körper sich in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte stofsen, so dafs also der durch den Stofs ausgeübte Druck und der elastische Gegendruck direkt durch den Schwerpunkt gehen. Lassen wir diese Voraus-

setzung fallen, so ist die Wirkung des Stofses sehr von der Form der stofsenden Körper abhängig.

Bei Kugeln ist es leicht, bei solchen nicht nach dem Centrum gerichteten, also excentrisch oder schiefen Stöfsen die Bewegung nach dem Stofse abzuleiten.

Seien zu dem Ende A und B (Fig. 67) die Mittelpunkte zweier Kugeln im Momente des Stofses, und sei PA der Richtung und Gröfse nach die Geschwindigkeit v der Kugel A, QB jene v' der Kugel B, sei ferner die Masse der ersten Kugel m, jene der zweiten m'. Die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte AB geht dann stets durch den Berührungspunkt, und steht, da der Radius einer Kugel stets normal ist zu dem Elemente der Kugel, an welches er gezogen ist, normal zu den sich berührenden Elementen. Zerlegen wir die Geschwindigkeit PA in ihre zu AB parallele Komponente SA und die zu AB senkrechte Komponente PS, und ebenso die Geschwindigkeit QB in QT senkrecht zu AB und TB parallel AB, so sind PS und QT gleichzeitig parallel den Berührungsflächen der beiden Kugeln. Diese Komponenten können daher durch den Stofs nicht geändert werden, dieselben sind nach dem Stofse die gleichen wie vor dem Stofse. Die beiden anderen Komponenten senkrecht zur Berührungsfläche sind nach den Mittelpunkten, also den Schwerpunkten der Kugeln gerichtet, auf diese sind daher unmittelbar die Gesetze des centralen Stofses anzuwenden. Bezeichnen wir den Winkel, den PA mit AB bildet, mit α, den Winkel zwischen QB und BA mit α', so ist

Fig. 67.



$$SA = v \cdot \cos \alpha \qquad TB = -v' \cos \alpha';$$

die Geschwindigkeiten von A und B parallel SA und BT nach dem Stofse werden dann

$$\xi = \frac{-2mv' \cos \alpha' + (m - m') v \cos \alpha}{m + m'} \qquad \xi' = \frac{2mv \cos \alpha - (m' - m) v' \cos \alpha'}{m + m'},$$

worin wir $v' \cos \alpha'$ mit dem negativen Vorzeichen schreiben müssen, weil die Richtung der Komponente TB jener SA entgegengesetzt gerichtet ist. Setzen wir die Massen beider Kugeln als gleich voraus, also $m = m'$, so wird

$$\xi = -v' \cos \alpha' \qquad \xi' = v \cos \alpha,$$

die beiden Kugeln tauschen einfach ihre parallel AB gerichteten Geschwindigkeiten aus.

Die totalen Geschwindigkeiten nach dem Stofse erhalten wir als Resultierende der je beiden zu einander senkrechten Komponenten

$$c^2 = v^2 \sin^2 \alpha + \xi^2 \qquad c'^2 = v'^2 \sin^2 \alpha' + \xi'^2,$$

und die Richtung der Bewegung nach dem Stofse respektive den Winkel, den dieselbe mit AB bildete, in den Gleichungen

$$\tang \alpha_1 = \frac{v \sin \alpha}{\xi} \qquad \tang \alpha_1' = \frac{v' \sin \alpha'}{\xi'}.$$

Ist also $m = m'$, so wird

$$\tang \alpha_1 = -\frac{v \sin \alpha}{v' \cos \alpha'} \qquad \tang \alpha_1' = -\frac{v' \sin \alpha'}{v \cos \alpha}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dafs die Richtungen der Bewegungen AU und BV an der andern Seite von AB liegen, als die Bewegungen vor dem Stofse. Wir erhalten dieselben, indem wir $AT_1 = BT$, $T_1U = PS$ ziehen in der Linie AU und ebenso, indem wir $BS_1 = AS$, $S_1V = QT$ ziehen in BV, für beide Kugeln der Gröfse und Richtung nach.

Die Bewegung der beiden Kugeln in einzelnen Fällen ist hiernach leicht zu bestimmen. Wird z. B. eine Kugel gegen eine ruhende gleicher Masse gestofsen, so bewegt sich die stofsende nach dem Stofse stets senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, die gestofsene mit der der Verbindungslinie der Mittelpunkte parallelen Komponente der stofsenden Kugel parallel der Verbindungslinie. Die beiden Kugeln bewegen sich also in zu einander senkrechten Richtungen. Ist m' unendlich $v' = 0$, wird also die Kugel m gegen eine feste Wand geworfen, so dafs sie mit der Normale der Wand den Winkel α bildet, so wird

$$\xi = -v \cdot \cos \alpha \qquad \xi' = o = c' \qquad c = v$$

$$\tang \alpha_1 = -\frac{v \cdot \sin \alpha}{v \cdot \cos \alpha} = -\tang \alpha.$$

Die zur Wand normale Komponente bleibt ihrer Gröfse nach ungeändert, sie wird der Richtung nach die entgegengesetzte; die Geschwindigkeit c nach dem Stofse ist deshalb dieselbe wie vor dem Stofse, die Richtung der Bewegung liegt an der andern Seite der Normalen zur festen Wand, in der durch die Bewegungsrichtung vor dem Stofse und der Normalen gegebenen Ebene, sie bildet mit der Normalen zur Wand denselben Winkel wie vor dem Stofse.

Sehr viel verwickelter werden die Wirkungen des Stofses, wenn einer der stofsenden Körper oder beide nicht Kugeln sind. Die nicht kugelförmigen Körper erhalten im allgemeinen durch den Stofs auch eine rotierende Bewegung. Die Wirkung des Stofses ist nämlich stets normal zu dem Flächenelement, in welchem die stofsenden Körper sich berühren, diese Richtung geht aber bei nicht kugelförmigen Körpern im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt derselben. Deshalb erteilt der Stofs solchen Körpern im allgemeinen eine rotierende Bewegung um eine Axe, welche durch den Schwerpunkt der Körper geht, und welche senkrecht ist zu der Ebene, welche durch die Bewegungsrichtung vor dem Stofse und die zur Berührungsfläche normale Richtung gegeben ist. Man erhält das Drehungsmoment, indem man die zur Berührungsfläche senkrechte Komponente der Bewegung nochmals zerlegt, und zwar in die durch den Berührungspunkt und den Schwerpunkt gehende und die zu dieser Richtung senkrechte Komponente; letztere bewirkt die Drehung. Es wird demnach von der lebendigen *Kraft* der stofsenden Körper ein Teil zur Erzeugung der rotierenden

Bewegung verwandt, die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung muſs somit um diesen Betrag vermindert werden. Die Geschwindigkeiten der fortschreitenden Bewegungen müssen deshalb kleinere sein, als sie sich aus den vorhin für Kugeln durchgeführten Rechnungen ergeben.

Ganz vollständig ist indes eine solche Rotation auch nicht bei Kugeln ausgeschlossen; die beiden Kugeln reiben nämlich aneinander, solange die Berührung dauert, und diese Reibung wirkt auf beide Kugeln wie eine der zur Berührungsfläche parallelen Bewegungskomponente entgegengesetzt gerichtete Kraft; diese muſs als senkrecht zum Radius an der Peripherie angreifende Kraft eine Rotation der Kugeln zur Folge haben.

§ 58.

Adhäsion. In ähnlicher Weise wie die Moleküle eines und desselben Körpers an einander haften, ziehen sich auch diejenigen zweier getrennter Körper an, wenn man sie hinreichend einander nähert. Am deutlichsten zeigt sich diese als Adhäsion bezeichnete Anziehung, wenn man zwei Körper mit groſsen Flächen zu recht inniger Berührung bringt. Schleift man zwei Platten von etwa 10 Centim. Durchmesser möglichst gut auf einander, und schiebt sie dann sorgfältig übereinander, so daſs sie sich in ihrer ganzen Ausdehnung berühren, so bedarf es eines Zuges von vielen Kilogrammen, um die Platten von einander zu reiſsen.

Durch Versuche mit solchen sogenannten Adhäsionsplatten, denen man eine verschiedene Gröſse gibt, kann man erkennen, daſs die Gröſse der Adhäsion mit der Gröſse der adhärierenden Flächen zunimmt; ein Gesetz der Abhängigkeit der Adhäsion von der Gröſse der Flächen läſst sich in dieser Art schwierig aufstellen, weil es sich nicht erreichen läſst, bei allen Versuchen eine gleich innige Berührung der Flächen herzustellen.

Auf diesem Aneinanderhaften der Körper bei inniger Berührung beruhen alle Methoden der Verbindung zweier Körper durch irgend ein Bindemittel. Um die Berührung der Körper mit dem Bindemittel möglichst innig zu machen, wird das letztere in flüssiger Form zwischen die zu verbindenden Flächen gebracht, und dann erstarren gelassen. In der Regel adhärieren dann diese Bindemittel stärker an den Körpern, zwischen welche man sie gebracht hat, als ihre Teile unter einander kohärieren, deshalb wird bei einer versuchten Trennung der durch ein solches Bindemittel verbundenen Körper meist eher die Kohäsion des Bindemittels überwunden als die Adhäsion desselben an die verbundenen Körper.

Ein solches Aneinanderhaften zweier Körper zeigt sich auch, wenn man zwei Platten mit genau parallelen Flächen bis auf gewisse kleine Entfernung nähert, ohne daſs man sie zur Berührung bringt, schon bei Abständen, welche erheblich gröſser sind, als daſs wir nach den später zu besprechen- Erfahrungen annehmen können, daſs die molekularen Kräfte dort noch ksam sein können. Stellt man eine Platte genau horizontal und läſst andere, welche an einer Wage äquilibriert ist, in kleinen Abständen, n $0{,}1^{mm}$ darüber schweben, so bedarf es stets eines nicht unerheblichen rgewichts, um die schwebende Platte von der festen zu entfernen. an hat diese von ihm als scheinbare Adhäsion bezeichnete Erscheinung

genauer untersucht[1]) und gezeigt, dafs sie ein Phänomen ganz anderer Art ist, bei welchem von einer molekularen Anziehung gar keine Rede ist.

Es zeigt sich nämlich, dafs es in diesem Falle gar keiner bestimmten Kraft bedarf, um die bewegliche Platte von der festen loszureifsen, dafs vielmehr schon das kleinste Übergewicht, welches auf die andere Wagschale gelegt wird, dazu ausreicht. Je kleiner aber das Übergewicht ist, einer um so gröfsern Zeit bedarf es, bis der Abstand der Platten von einem gegebenen anfänglichen Wert auf einen gewissen gröfsern Wert gewachsen ist. Diese Zeitdauer ist ferner wesentlich davon abhängig, ob man die Platten in der Luft über einander hängen läfst oder in einer Flüssigkeit, und weiter von der Natur der Flüssigkeit, sie ist eine andere, wenn die Platten in Wasser über einander schweben, als wenn sie sich in Alkohol oder in einer Salzlösung befinden. Gerade die Abhängigkeit der Erscheinung von der Flüssigkeit, in welcher sich die Platten befinden, beweist auf das deutlichste, dafs hier ganz andere Kräfte mafsgebend sind als eine molekulare Anziehung der beiden Platten. Wir werden deshalb an einer andern Stelle bei Besprechung der Flüssigkeitsreibung auf die Untersuchung von Stefan zurückkommen.

§ 59.

Von der Reibung. Wenn zwei Körper über einander hin bewegt werden, so bedarf es immer einer gewissen Kraft, um die Bewegung zu unterhalten, selbst wenn die Bewegung in genau horizontaler Richtung vor sich geht. Durch die Berührung der Körper tritt also der Bewegung derselben über einander hin ein Hindernis entgegen. Dieses Hindernis bezeichnet man als Reibungswiderstand; er tritt nur dann auf, wenn man einen Körper über einen andern hin in der Berührungsebene zu bewegen sucht.

Die Reibung ist um so stärker, je rauher die Flächen sind, welche sich über einander bewegen; wir müssen daher eben in dieser Rauhigkeit ihren hauptsächlichsten Grund suchen, indem dadurch die Teile der Körper teilweise in einander greifen, und deshalb bei jeder Bewegung derselben über einander hin ein geringes Heben des bewegten Körpers stattfinden mufs. Je glatter deshalb im allgemeinen die Berührungsflächen sind, um so geringer ist die Reibung. Dafs aber in den Unebenheiten der Berührungsflächen nicht der einzige Grund der Reibung zu suchen ist, geht daraus hervor, dafs dieselbe auch von der Natur der reibenden Körper abhängig ist. So z. B. zeigt sich, dafs bei sonst gleichen Umständen Stahl und Messing auf einander bewegt, den kleinsten Reibungswiderstand zeigen. Wir müssen daher zur Erklärung der Reibung noch eine Anziehung zwischen den Teilen der sich berührenden Körper annehmen, ähnlich wie wir sie bei der Adhäsion gesehen haben.

Man unterscheidet gleitende und rollende Reibung; erstere findet statt, wenn zwei Ebenen über einander hingeschoben werden, oder zwei in einander passende Flächen, wie Zapfen im Zapfenlager sich in einander bewegen. Rollende Reibung tritt auf, wenn ein von krummen Flächen begrenzter Körper so über einen andern hin bewegt wird, dafs in jedem Augenblicke

[1]) *Stefan*, Wiener Berichte Bd. LXIX.

andere Punkte der beiden Körper sich berühren, wenn also ein Körper über einen andern fortrollt. Die gleitende Reibung ist bei weitem die stärkere.

Trotz mancher Untersuchungen über die Reibung sind nur wenige Gesetze sicher konstatiert worden. Um die gleitende Reibung zu untersuchen, legt man einen Körper mit einer glatten Fläche auf eine glatte horizontale Unterlage und sucht die Kraft zu bestimmen, deren es bedarf, um den Körper in Bewegung zu versetzen, oder genauer, durch welche man ihn mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter bewegt, wenn man ihn durch einen einmaligen Anstofs in Bewegung gesetzt hat. Diese Kraft mifst die Reibung. Sehr bequem läfst sich dazu auch die schiefe Ebene verwenden, indem man den Winkel aufsucht, um welchen man dieselbe neigen mufs, damit der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit dieselbe hinabgleitet. Man nennt diesen Winkel den Reibungswinkel.

Durch ähnliche Versuche haben Coulomb[1]), Rennie[2]) und besonders Morin[3]) folgende Gesetze erhalten.

1. Die Reibung ist dem Drucke der Körper auf die Unterlage proportional.

2. Die Reibung hängt bei dem gleichen Drucke nicht von der Ausdehnung der sich berührenden Flächen ab, sofern diese keine Spitzen oder Kanten haben, sondern nur von deren Natur und Glätte.

3. Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.

Letzterer Satz scheint jedoch nur innerhalb gewisser Grenzen zu gelten, besonders bei sehr raschen Bewegungen scheint doch die Reibung mit der Geschwindigkeit sich zu ändern.

Das Verhältnis der Reibung zu dem Drucke, das heifst den Bruchteil des Gewichtes eines Körpers, der ihn auf horizontaler Ebene in gleichförmiger Bewegung zu erhalten vermag, der nach dem Vorigen für dieselben Körper konstant ist, nennt man den Reibungskoefficienten. Derselbe ist, wie man sieht, gleichzeitig der Sinus des Reibungswinkels. So ist z. B. der Reibungskoefficient

von Eisen auf Eisen 0,108,
von Messing auf Gufseisen 0,189 u. s. f.

Im allgemeinen nimmt die Reibung etwas zu, wenn Körper lange aufeinander gestanden haben, jedoch nur bei dem Übergange der Körper aus der Ruhe zur Bewegung; einmal bewegt, ist der Reibungskoefficient wieder der frühere.

§ 60.

Innere Reibung bei festen Körpern. Bei Besprechung der elastischen Nachwirkung haben wir gesehen, dafs bei einer Einwirkung äufserer Kräfte auf die festen Körper nur ein Teil der durch sie stattfindenden Verschiebungen sofort eintritt, dafs es sehr lange Zeit dauern kann, bis die

---

[1]) *Coulomb*, Mémoires présentés à l'Acad. de Paris T. X.
[2]) *Rennie*, Experiments on the friction etc. Philos. Trans. 1829.
[3]) *Morin*, Nouvelles expériences sur le frottement. I. Mémoire présenté à l'Acad. de Paris T. IV 1833. II. Mémoire, Paris 1834. III. Mémoire, Paris 1835. Doves Repertorium Bd. I.

den äufseren Kräften entsprechende Gleichgewichtslage vollständig erreicht ist. Wir schlossen daraus, dafs sich der Bewegung der Moleküle ein Widerstand entgegenstellt, allerdings ein Widerstand ganz eigentümlicher Art, dessen Wesen wir noch nicht zu erkennen imstande sind.

Bei der durch elastische Kräfte bewirkten Bewegung fester Körper läfst sich nun noch ein anderer Widerstand erkennen, der sich darin zu erkennen gibt, dafs diese Bewegungen allmählich zur Ruhe kommen und zwar viel schneller, als es durch die etwa vorhandenen äufseren Widerstände, wie die Reibung an der umgebenden Luft ihn darbietet, der Fall sein kann. Am bequemsten zur Erkennung dieses Widerstandes und deshalb auch am meisten zur Untersuchung desselben angewandt, sind die schwingenden Bewegungen, welche durch die Torsion eines Drahtes hervorgebracht werden. Tordieren wir einen Draht um einen Bogen φ, so wissen wir, dafs infolgedessen ein Drehungsmoment entsteht, welches gleich $D \cdot \varphi$ ist, und welches den Stab in die untordierte Lage zurückzutreiben sucht. Hierin ist D das den Draht zurückdrehende Moment, wenn der Bogen φ gleich der Einheit ist. Wir können uns dieses Drehungsmoment als einen Druck denken, welcher am Ende eines Hebelarms von der Länge eins angreift, dann ist gleichzeitig φ der Abstand des Punktes, an welchem die Kraft angreift von der Gleichgewichtslage, respektive der Weg, den dieser Punkt zurücklegen mufs, um in die Gleichgewichtslage zurückzukehren. Ist der Draht an seinem untern Ende mit einem Körper beschwert, etwa einer Kugel, so dafs das Trägheitsmoment derselben und des Drahtes in Bezug auf die Axe des Drahtes gleich K ist, so ist die Beschleunigung, welche der im Abstande eins von der Drehungsaxe befindliche Punkt gegen die Gleichgewichtslage erhält, also auch die Winkelbeschleunigung gleich $\frac{D}{K} \cdot \varphi$. Wir erhalten demnach gerade wie im § 25 als Bewegungsgleichung des schwingenden Systems

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - \frac{D}{K} \cdot \varphi.$$

Nennen wir die Torsion des Drahtes, die wir ihm ursprünglich erteilten, als wir ihn sich selbst überliefsen, φ_0 und rechnen die Zeit t von dem Momente an, in welchem wir den Draht sich selbst überliefsen, so erhalten wir gemäfs § 25 für den Abstand φ des Systems von der Gleichgewichtslage zur Zeit t

$$\varphi = \varphi_0 \cos t \sqrt{\frac{D}{K}}.$$

Hieraus folgt, dafs wenn

$$t \sqrt{\frac{D}{K}} = 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi \cdots$$

$$\varphi = \varphi_0, \quad -\varphi_0, \quad \varphi_0, \quad -\varphi_0, \quad \varphi_0 \cdots,$$

oder der Draht vollführt Schwingungen, deren Dauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}$$

und deren Amplitude konstant gleich φ_0 ist, das heifst, der Draht bewegt sich unaufhörlich jedesmal in der Zeit T zwischen den Grenzen $+\varphi_0$ und $-\varphi_0$ hin und her.

Wenn man die Bewegungen eines solchen Drahtes nun aber verfolgt, und die Amplituden desselben bestimmt, so findet man, dafs dieselben stetig kleiner werden. Man kann das am schärfsten, indem man unten an der Kugel einen Spiegel anbringt und dann in der § 54 besprochenen Weise die Bewegung mit Fernrohr und Skala verfolgt; die Punkte, an denen die Bewegung umkehrt, die also den Werten $\pm\varphi_0$ entsprechen sollen, rücken immer näher zusammen. Schon Gauss und Weber, welche zuerst diese Abnahme der Schwingungsweiten verfolgten, fanden, dafs die Werte der Amplituden, so lange dieselben nicht zu grofs sind, etwa 4 bis 6 Grad betragen, in einer geometrischen Reihe abnehmen. Nennen wir also die Werte der bei den Schwingungen erreichten äufsersten Abstände, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \cdots$, so findet sich

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = a$$

oder

$$\log \varphi_0 - \log \varphi_1 = \log \varphi_1 - \log \varphi_2 = \cdots \log a.$$

Die Differenz der Logarithmen der auf einander folgenden Amplituden ist konstant. Diese Differenzen nennt Gauss die logarithmischen Dekremente.

Dieses Gesetz der Abnahme der Amplitude beweist, dafs der schwingenden Bewegung des Drahtes in jedem Momente ein Widerstand entgegenwirkt, welcher der augenblicklichen Geschwindigkeit der Bewegung proportional ist, dafs also die Beschleunigung zur Zeit t nicht gleich dem Werte $\frac{D}{K}\varphi$ ist, sondern kleiner, und zwar um eine Gröfse kleiner ist, welche der augenblicklichen Geschwindigkeit v des schwingenden Drahtes proportional ist. Bezeichnen wir daher mit 2ε den Widerstand, wenn die Geschwindigkeit v gleich eins ist, so können wir die zur Zeit t vorhandene Beschleunigung schreiben

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{K}\varphi - 2\varepsilon v$$

oder da v der erste Differentialquotient von φ nach der Zeit ist,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{K}\varphi - 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt}$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0,$$

wenn wir $\frac{D}{K} = k^2$ setzen.

Aus dieser Gleichung, welche uns eine Beziehung zwischen der Beschleunigung, Geschwindigkeit und der augenblicklichen Lage des Beweglichen gibt, können wir nicht so direkt die Lage des Beweglichen zur Zeit t ableiten, wie wir es § 25 aus der Gleichung konnten, welche die Geschwindigkeit oder den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit nicht enthielt. Wir können indes in Erwägung, dafs φ eine solche Funktion von t sein mufs, dafs die gegebene Gleichung zwischen den ver-

schiedenen Differentialquotienten der Funktion φ und dieser selbst erfü sein mufs, mit Hülfe unserer Kenntnis von den Eigenschaften der Funktion die gesuchte Funktion in folgender Weise erhalten. Setzen wir

$$\varphi = e^{\lambda t},$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems und λ noch ei zu bestimmende Konstante sein soll, so ist nach E 3a und E IV

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda e^{\lambda t}; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Setzen wir diese Werte in unsere Gleichung ein, so wird dieselbe

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2) = 0.$$

Somit entspricht die Funktion $\varphi = e^{\lambda t}$ unserer Gleichung, wenn wir aus der Gleichung

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2 = 0$$

bestimmen, denn mit dem so bestimmten λ wird die uns gegebene Gleichun erfüllt. Für λ erhalten wir aus dieser Gleichung

$$\lambda = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Es gibt somit zwei Werte von λ, welche jeder für sich unsere Gleichun erfüllen, nämlich

$$\lambda_1 = -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \text{ und } \lambda_2 = -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Jeder dieser beiden Werte hat dieselbe Berechtigung, wir können dah zur Darstellung von φ nicht den einen wählen und den andern verwerfe Da indes die Exponentialfunktion mit jedem der beiden Werte der ge gebenen Gleichung genügt, so thut es auch die Summe

$$\varphi = e^{-\varepsilon t + t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + e^{-\varepsilon t - t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}.$$

Indem wir so φ dieser Summe gleichsetzen, berücksichtigen wir jed der beiden Werte ganz gleichmäfsig. Indes müssen wir an dem so be stimmten Werte von φ noch eine Korrektion anbringen; würden wir di Gleichung für φ so aufstellen, so läge darin eine ganz bestimmte Voraus setzung, es würde nämlich, wenn wir $t = 0$ setzen, $\varphi = 2$ werden, d dann beide Exponenten gleich Null, somit jedes Glied der rechten Seit gleich 1 würde. Wir müssen deshalb jedes Glied der rechten Seite m irgend einer Konstanten multiplicieren, die indes nicht für beide Glied dieselbe sein darf, da wir dann eine nicht notwendige specielle Voraus setzung über die Abhängigkeit des Wertes φ von t machen würden. Sin demnach A und B zwei willkürliche Konstante, deren Wert noch näher z bestimmen ist, so erhalten wir als ganz allgemeine Beziehung für φ

$$\varphi = Ae^{-\varepsilon t + t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + Be^{-\varepsilon t - t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}$$

oder

$$\varphi = e^{-\varepsilon t}\left\{Ae^{t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} + Be^{-t\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}\right\}.$$

In diesem Ausdrucke müssen wir beachten, dafs die beiden Exponente jedenfalls imaginär sind, denn wenn eine dauernde Bewegung eintreten sol

k^2 jedenfalls erheblich gröfser sein als ε^2, wir können daher den Ausk schreiben

$$\varphi = e^{-\varepsilon t}\left\{A e^{t\sqrt{-1}\sqrt{k^2-\varepsilon^2}} + B e^{-t\sqrt{-1}\sqrt{k^2-\varepsilon^2}}\right\}.$$

An Stelle der Exponentialfunktion mit imaginären Exponenten kann , wie in der Differentialrechnung bewiesen wird, trigonometrische Funken einführen und schreiben

$$A e^{t\sqrt{-1}\sqrt{k^2-\varepsilon^2}} + B e^{-t\sqrt{-1}\sqrt{k^2-\varepsilon^2}}$$

$$= (A + B)\cos t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} - (A - B)\sqrt{-1}\sin t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}$$

$$= e^{-\varepsilon t}\left\{(A + B)\cos t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} - (A - B)\sqrt{-1}\sin t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}\right\},$$

in jetzt noch die beiden Konstanten A und B zu bestimmen sind.

Dieselben ergeben sich aus der Bedingung, dafs zur Zeit $t = 0$ der stand des schwingenden Drahtes von der Gleichgewichtslage gleich φ_0 n soll, und weiter dafs, weil zur Zeit $t = 0$ die Bewegung infolge der sticität des Drahtes beginnt, in diesem Momente die Geschwindigkeit Bewegung gleich Null sein mufs. Da zur Zeit $t = 0$ der Wert $t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = 0$, dagegen der Cosinus gleich 1 ist, so ergibt die erste dingung

$$A + B = \varphi_0.$$

Um den Koefficienten des zweiten Gliedes zu bestimmen, haben wir n Quotienten $\frac{d\varphi}{dt}$ zu berechnen. Setzen wir der Abkürzung wegen

$$(A - B)\sqrt{-1} = b; \quad \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = m,$$

mit

$$\varphi = e^{-\varepsilon t}\left\{\varphi_0 \cos mt - b \sin mt\right\},$$

erhalten wir nach E II, E 3a, E 4, E 5

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varepsilon e^{-\varepsilon t}\left\{\varphi_0 \cos mt - b \sin mt\right\} + e^{-\varepsilon t}\left\{-\varphi_0 m \sin mt - mb \cos mt\right\}$$
$$= e^{-\varepsilon t}\left\{-(\varepsilon\varphi_0 + mb)\cos mt + (\varepsilon b - m\varphi_0)\sin mt\right\}.$$

Dieser Wert soll nun für $t = 0$ ebenfalls Null sein, und das ist nur nn der Fall, wenn

$$\varepsilon\varphi_0 + mb = 0 \qquad b = -\varphi_0\frac{\varepsilon}{m}.$$

Setzen wir diesen Wert für b in die Gleichung für φ, so wird

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left\{\cos mt + \frac{\varepsilon}{m}\sin mt.\right.$$

Ehe wir die durch diese Gleichung dargestellte Bewegung näher beachten, wollen wir zeigen, dafs sie der Gleichung entspricht, die wir rischen der Beschleunigung und Geschwindigkeit erhielten

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} + k^2\varphi = 0.$$

Wir haben dazu nur die drei Glieder dieser Gleichung auszurechnen. Das letzte Glied wird

$$k^2 \varphi = k^2 \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \cdot \cos mt + k^2 \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \frac{\varepsilon}{m} \cdot \sin mt.$$

Das mittlere wird nach obiger Entwicklung, wenn wir für b seinen Wert setzen,

$$2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} = -2\varepsilon \varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m\right) \sin mt.$$

Zur Berechnung von $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$ haben wir auf $\frac{d\varphi}{dt}$ dieselben Regeln anzuwenden wie zur Berechnung von $\frac{d\varphi}{dt}$ aus φ. Damit wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon \varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m\right) \sin mt - \varphi_0 \left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m\right) e^{-\varepsilon t}\, m \cdot \cos mt.$$

Beachtet man nun, daſs $\frac{\varepsilon^2}{m} + m = \frac{\varepsilon^2 + m^2}{m} = \frac{k^2}{m}$, so sieht man sofort, daſs die Summation dieser drei Ausdrücke den Wert 0 gibt.

Man erkennt unmittelbar, daſs die Gleichung

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t}\left\{\cos t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{m} \sin t\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}\right\}$$

eine schwingende Bewegung darstellt, wie sie Gauss und Weber bei einem tordierten Drahte beobachteten. Wächst t von 0 ab, so nimmt φ ab, der Draht nähert sich der Gleichgewichtslage, und erreicht dieselbe, wenn das Glied in der Klammer Null wird. Das tritt ein zu einer Zeit t, die sich aus der Gleichung

$$\cos mt + \frac{\varepsilon}{m} \sin mt = 0$$

$$\operatorname{tang} mt = -\frac{\varepsilon}{m}$$

ergibt. Wächst die Zeit weiter, so wird φ negativ, der Draht schwingt auf die andere Seite der Gleichgewichtslage, er erreicht dort den gröſsten Abstand, wenn t einen solchen Wert T hat, daſs

$$T\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = \pi,$$

denn die für die Geschwindigkeit der Bewegung abgeleitete Gleichung zeigt, daſs für diesen Wert von t die Geschwindigkeit gleich Null wird, der zu dieser Zeit erreichte Abstand ist also der Punkt, wo die Bewegung umkehrt. Der Abstand φ_1 ist dann

$$\varphi_1 = -\varphi_0 e^{-\varepsilon T}.$$

Wächst die Zeit wieder um denselben Wert

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}},$$

so befindet sich der schwingende Draht wieder an dem andern äuſsersten Punkte seiner Bahn. Der Abstand wird

$$\varphi_2 = \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}.$$

Der Draht vollführt somit jedesmal in der Zeit T eine Schwingung, und ie auf einander folgenden äufsersten Abstände, oder die Amplituden sind, hne Rücksicht auf das Vorzeichen, zur Zeit

$$0, \quad T, \quad 2T, \quad 3T \cdots\cdots nT,$$

$$\varphi_0, \quad \varphi_0 e^{-\varepsilon T}, \quad \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}, \quad \varphi_0 e^{-3\varepsilon T} \cdots \varphi_0 e^{-n\varepsilon T}$$

der die Amplituden gehören einer geometrischen Reihe an, der Quotient ler auf einander folgenden Amplituden ist

$$\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} = e^{\varepsilon T}.$$

Die Differenz der Logarithmen der Amplituden ist, wenn M der Modulus des Logarithmensystems ist, in welchem wir die Logarithmen nehmen

$$\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n = M \cdot \varepsilon T.$$

Hieraus erkennen wir auch sofort, dafs die Beobachtung des logarithmischen Dekrementes uns ein Mafs für die Gröfse des der Bewegung entgegenstehenden Widerstandes liefert, denn die Gleichung nach ε aufgelöst liefert

$$\varepsilon = \frac{\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n}{MT} = \frac{\varDelta}{MT}.$$

Der Widerstand, welcher der Bewegung entgegensteht, ist somit gleich dem in natürlichen Logarithmen gegebenen logarithmischen Dekrement dividiert durch die Dauer der Schwingungen.

Die Beobachtung der logarithmischen Dekremente der Torsionsschwingungen ist somit ein vortreffliches Mittel, um die Gesetze des denselben entgegenstehenden Widerstandes zu untersuchen. In dieser Weise haben Warburg[1]), Streintz[2]) und besonders Schmidt[3]) den Widerstand der innern Reibung zu bestimmen versucht.

Der so direkt bei den Schwingungen beobachtete Widerstand ist die Summe zweier Widerstände, welche beide der augenblicklichen Geschwindigkeit der Bewegung proportional sind, und von denen der eine daher rührt, dafs die schwingenden Körper eine Reibung an der umgebenden Luft erfahren. Wie man diesen bestimmen und in Rechnung ziehen kann, werden wir bei Besprechung der Luftreibung (§ 117) kennen lernen.

Es ergibt sich nun besonders aus den Versuchen von Schmidt, dafs bei den elastischen Schwingungen den Bewegungen ein Reibungswiderstand entgegensteht, welcher von dem in der elastischen Nachwirkung sich zeigenden Widerstande verschieden ist. Wie Schmidt nämlich gezeigt hat, ist bei einem neu aufgehängten und unten mit einer Kugel belasteten Drahte das von der Luftreibung befreite, also lediglich den innern Widerstand messende logarithmische Dekrement anfänglich viel gröfser als später, dasselbe nähert sich bei längerm Hängen einem kleinsten Werte, den es dann beibehält, wenn der Draht inzwischen keine Veränderung erfährt, welche eine neue elastische Nachwirkung bedingt, und wenn man sich auf so kleine Schwingungen beschränkt, dafs diese selbst keine elastische Nachwirkung

[1]) *Warburg*, Monatsberichte der Berliner Akad. für 1869.
[2]) *Streintz*, Wiener Berichte Bd. LXIX. Poggend. Ann. CLI.
[3]) *Schmidt*, Annalen der Phys. n. F. Bd. 11.

hervorrufen. Jede Beeinflussung des Drahtes, die elastische Nachwirkung bedingt, vergröfsert wieder das logarithmische Dekrement, also den Widerstand. Entlastet man also den Draht oder nimmt die Kugel ab, wodurch bewirkt wird, dafs der Draht mit Nachwirkung sich eine Zeit lang zusammenzieht, so wird bei erneutem Anhängen der Kugel und hervorgerufenen Schwingungen das Dekrement wieder gröfser, um dann bei dauernder gleicher Belastung wieder auf den frühern kleinsten Wert abzunehmen.

Auf diesen Einflufs der elastischen Nachwirkung führt Schmidt es auch zurück, dafs wenn die Amplituden über eine gewisse, aber für jeden Draht durch den Versuch zu bestimmende Grenze vergröfsert werden, die Amplituden nicht mehr einer geometrischen Reihe angehören. Es ändert sich dann der Widerstand in komplicierterem Verhältnisse mit der Geschwindigkeit resp. dem Abstande des schwingenden Drahtes von der Gleichgewichtslage, eben weil infolge der elastischen Nachwirkung die Gleichgewichtslage während der Schwingungen nicht die ursprüngliche bleibt. Wegen des verschiedenen Verhaltens der verschiedenen Substanzen in Bezug auf die elastische Nachwirkung ist deshalb die Grenze, bis zu der die Amplituden genommen werden dürfen, so dafs die logarithmischen Dekremente konstant sind, für die verschiedenen Substanzen verschieden, die Grenze liegt im allgemeinen um so weiter, je gröfser die Elasticitätskoefficienten der betreffenden Substanzen sind.

In welcher Weise der innere Widerstand sich mit den Dimensionen der Drähte ändert, läfst sich aus den Versuchen von Streintz und Schmidt noch nicht mit Sicherheit erkennen. Man wird für jeden Draht, für welchen man den Widerstand etwa bestimmen will, durch direkte Versuche das logarithmische Dekrement der Schwingungen messen müssen.

Zweites Kapitel.

Von den tropfbar flüssigen Körpern.

§ 61.

Konstitution der Flüssigkeiten. Wir haben in § 46 aufser den festen Körpern flüssige Körper kennen gelernt und sie dahin definiert, dafs sie ein festes Volumen besitzen, aber keine feste Gestalt, sondern die Gestalt des Gefäfses annehmen, in welchem sie sich befinden. Die einzelnen Teile der Flüssigkeiten sind nicht, wie die der festen Körper, fest mit einander verbunden, sie können sich vielmehr unter dem Einflufs der geringsten äufsern Kraft gegen einander verschieben und fortwährend ihren Ort verändern, indem jedes Teilchen nach und nach einen bestimmten Platz einnimmt und wieder verläfst, um von einem andern ersetzt zu werden.

Aus dieser, soweit wir beurteilen können [illegible] vollkommen freien Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen gegen einander ergibt sich zunächst, dafs eine flüssige Masse nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn die auf ein Molekül der Flüssigkeit wirkenden [illegible] Kräfte sich das Gleichgewicht [illegible] wenn also die etwa auf das Molekül wirkenden Drucke nach gerad

entgegengesetzten Richtungen genau gleich sind und deshalb sich aufheben. Denn wäre der Druck auf das Molekül nach der einen Richtung stärker als nach der gerade entgegengesetzten, so müfste das Molekül, da es auch dem kleinsten Drucke folgt, sich nach der Richtung der gröfsern Kraft bewegen.

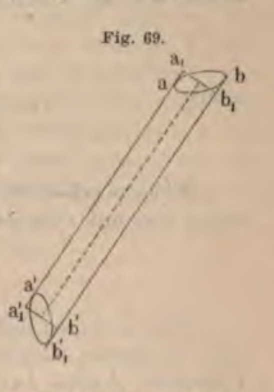
Es folgt weiter, dafs, wenn wir ein ringsgeschlossenes Gefäfs mit Flüssigkeit haben, welche unter der Wirkung irgend welcher Kräfte im Gleichgewicht ist (Fig. 68) und nun durch einen Stempel A einen Druck auf die Flüssigkeit ausüben, dafs dann dieser Druck sich ganz ungeändert durch die Flüssigkeit ausbreiten mufs. Sei der Druck auf den Stempel normal zur Berührungsebene des Stempels und der Flüssigkeit gleich P, so dafs die Flächeneinheit der Berührungsebene, welche die Gröfse S habe, den Druck $\frac{P}{S}$ erhält, so wirkt auf jede im Innern oder in der Grenzfläche der Flüssigkeit gedachte Ebene, deren Fläche gleich s ist, der Druck $\frac{P}{S} \cdot s$, also überall auf die Flächeneinheit der Druck $\frac{P}{S}$.

Fig. 68.



Um dieses nachzuweisen, nehmen wir an, die Flüssigkeit in dem Gefäfse Fig. 68 sei unter der Wirkung der Schwere im Gleichgewicht, und es wirke nun auf den Stempel B eine Kraft, so dafs die Flächeneinheit der Berührungsebene einen normalen Druck p_0 erfahre. Denken wir uns nun von dem Mittelpunkte des Stempels B eine Linie in das Innere der Flüssigkeit von der Länge l, etwa in der Richtung nach dem Mittelpunkte des Stempels A, und um diese Linie einen Kreiscylinder gelegt, dessen Radius gegen die Länge nur sehr klein sei. Die an B anliegende Grenzfläche dieses Cylinders steht dann schief zur Axe, ihre Normale bildet mit der Axe denselben Winkel α, welchen die Normale der Stempelfläche mit der Richtung AB bildet. An der andern Seite denken wir uns den Cylinder ebenfalls durch eine schiefe Endfläche begrenzt $a'b'$ (Fig. 69), welche etwa parallel sei mit der Fläche des Stempels A, deren Normale mit der Axe den Winkel α' bilde. Die Richtung der Axe bilde mit der Vertikalen den Winkel β. Wenn die Flüssigkeit vor der Herstellung des Druckes im Gleichgewicht war, so bleibt sie es auch nach derselben, die Flüssigkeit befindet sich also im Innern des gedachten Cylinders im Gleichgewicht. Da nun aber infolge des Druckes auf ab und der Schwere der im Innern des Cylinders vorhandenen Flüssigkeit eine bewegende Kraft vorhanden ist, so kann die Flüssigkeit wegen der vollkommen freien Beweglichkeit der Teile nur dann in dem Cylinder eingeschlossen und in Ruhe bleiben, wenn die auf die äufsere Begrenzung des Cylinders wirkenden, durch die umgebende Flüssigkeit ausgeübten Drucke gleich den bewegenden Kräften sind, oder wenn die über-

Fig. 69.



haupt auf die Grenzfläche des Cylinders wirkenden Kräfte sich das G
gewicht halten. Denken wir uns die überhaupt auf die Flüssigke
Cylinders durch die Umgebung ausgeübten Drucke jeden in zwei
ponenten zerlegt, deren eine normal zur Grenzfläche des Cylinders
der Stelle, wo die Kraft wirkt, deren andere parallel der Grenzfläc
so müssen die letztern für sich schon im Gleichgewicht sein, da sor
Flüssigkeit im Innern des Cylinders sich gegen einander verschieben
Die zur Oberfläche normalen Drucke und die Schwere der Flüs
stehen dann für sich wieder im Gleichgewicht, weil sonst der Cylin
solcher sich in der umgebenden Flüssigkeit bewegen würde.

Wenn diese Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so haben si
keiner Richtung eine Resultierende; bilden wir also die Summe de
jektionen nach irgend einer beliebigen Richtung, so mufs, welche Ri
wir auch wählen, diese Summe stets gleich Null sein. Projicieren w
die Kräfte, welche, wie wir eben sahen, den Cylinder als solchen be
können, auf die Axe des Cylinders, so sieht man zunächst, dafs die S
aller Projektionen der auf die Seitenfläche des Cylinders wirkenden K
auf die Axe für sich Null ist, da diese Kräfte zur Axe senkrecht si
müssen also ebenfalls für sich Null sein die Summe der auf die A
Cylinders projicierten Komponenten der auf die schiefen Endflächen wir
Drucke und der Schwere der im Cylinder enthaltenen Flüssigkeit.
wir nun den Druck auf die Fläche ab gleich p, den auf die Endfläc
wirkenden gleich p', und bezeichnen wir das Gewicht der Flüssigk
Cylinders mit q, so ist diese Gleichgewichtsbedingung

$$p \cdot \cos\alpha + p' \cdot \cos\alpha' + q \cdot \cos\beta = 0.$$

Bezeichnen wir den Querschnitt unseres Cylinders mit σ, so is
bekannten Sätzen der Stereometrie die Gröfse der schiefen Endfläc
welche wir mit s bezeichnen wollen,

$$s = \frac{\sigma}{\cos\alpha},$$

somit

$$\cos\alpha = \frac{\sigma}{s}.$$

Ebenso erhalten wir für $\cos\alpha'$, wenn wir die Gröfse der schief
fläche $a'b'$ mit s' bezeichnen,

$$\cos\alpha' = \frac{\sigma}{s'}.$$

Das Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders ist nun, nac
falls bekannten Sätzen der Stereometrie, gleich dem Volumen des
Cylinders, dessen Axe gleich ist der Länge der Axe des schief abg
tenen Cylinders, den wir also erhalten, wenn wir durch die Mitte
der schiefen Endflächen die geraden Endflächen $a_1 b_1$ und $a'_1 b'_1$
Bezeichnen wir die Dichtigkeit der Flüssigkeiten, das Gewic
Volumeinheit mit d, so ist das Gewicht q der im Cylinder entl
Flüssigkeit

$$q = \sigma \cdot l \cdot d.$$

Setzen wir die so erhaltenen Werte für cos α, cos α', q in die sich aus dem Gleichgewicht des Cylinders ergebende Gleichung ein, so wird

$$\frac{p}{s} \cdot \sigma + \frac{p'}{s'} \cdot \sigma + \sigma l d \cdot \cos \beta = 0$$

oder

$$-\frac{p'}{s'} \cdot \sigma = \frac{p}{s} \cdot \sigma + \sigma \cdot l d \cdot \cos \beta.$$

Da β der Winkel ist, welchen die Axe des Cylinders mit der Vertikalen bildet, so ist

$$l \cdot \cos \beta = h$$

gleich dem lotrechten Abstande der Mittelpunkte der beiden Endflächen des Cylinders, und wir erhalten dann schliefslich

$$-\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s} + d \cdot h.$$

Die Quotienten $\frac{p}{s}$ und $\frac{p'}{s'}$ liefern uns die auf die Flächeneinheit wirksamen Drucke, vorausgesetzt, dafs die Drucke auf derselben gleichmäfsig verteilt und überall so grofs sind als auf den sehr kleinen Flächen s und s'. Dann sagt also die letztere Gleichung, dafs auf der untern Fläche $a'b'$ des Cylinders ein gegen das Innere des Cylinders gerichteter normaler Druck wirkt, welcher für die Flächeneinheit gleich ist dem auf die Flächeneinheit der obern Endfläche des Cylinders wirkenden Drucke, vermehrt um das Gewicht eines Flüssigkeitscylinders, dessen Querschnitt der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich ist dem vertikalen Abstande der Mittelpunkte der Flächen, welche den Cylinder oben und unten begrenzen.

Da wir nun vorher sahen, dafs in einer Flüssigkeit nur Gleichgewicht sein kann, wenn die auf die Moleküle nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte einander gleich sind, so folgt, dafs eine ebensolche Kraft auf die Flächeneinheit der untern Grenzfläche von innen nach aufsen wirkt, und daraus weiter, da wir über die Lage unseres Cylinders, also über den Winkel β und ebenso über die Winkel α und α' gar keine specielle Voraussetzung gemacht haben, dafs sich der auf irgend eine Fläche im Innern oder an der Grenze der Flüssigkeit wirkende Druck nach einer beliebigen Richtung ganz ungeändert fortpflanzt, so dafs auf die Flächeneinheit immer derselbe Druck wirkt. Setzen wir z. B. in Fig. 68 etwa voraus, dafs die Stempel A, B, C sich in derselben Horizontalebene befinden, so ist h gleich Null, und wir erhalten dann, wenn die Querschnitte der Stempel S, S_1 S_2 sind, für die auf dieselben wirkenden Drucke P, P_1 P_2

$$\frac{P}{S} = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2}$$

oder mit der vorhin gewählten Bezeichnung

$$\frac{P}{S} = p_0$$

$$P_1 = p_0 \cdot S_1; \quad P_2 = p_0 \cdot S_2.$$

Liegen die Stempelflächen nicht in derselben Horizontalebene, so gilt für den fortgepflanzten Druck ganz dasselbe; der auf die im tiefern Niveau liegenden Stempelflächen wirkende Druck wird dann nur vermehrt durch

das Gewicht des Flüssigkeitscylinders, dessen Querschnitt gleich ist dem der tiefer liegenden Stempelflächen, und dessen Höhe gleich ist der Niveaudifferenz der Stempelflächen.

Aus der Gleichmäfsigkeit der Fortpflanzung des Druckes ergibt sich nun weiter, dafs, wenn wir uns im Innern der Flüssigkeit eine kleine ebene Fläche denken, welche durch die vorhandenen Kräfte irgend einen Druck erfährt, dafs der Druck dann unabhängig ist von der Richtung, welche die kleine Fläche hat. Wir mögen die Ebene drehen wie wir wollen, der Druck ist immer derselbe. Die vorhin aus der Beweglichkeit der Moleküle gezogene Folgerung, dafs die auf ein Molekül nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte gleich sein müssen, können wir daher dahin erweitern, dafs die im Innern einer Flüssigkeit auf ein Molekül wirkenden Kräfte nach allen Richtungen des Raumes dieselben sind.

§ 62.

Kompressibilität der Flüssigkeiten. Wir haben im vorigen Paragraphen die gleichmäfsige Fortpflanzung des Druckes, den wir an einer Stelle einer Flüssigkeit ausüben, lediglich als eine Folgerung aus der vollkommen leichten Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen abgeleitet; wir können aber leicht auch den physikalischen Vorgang erkennen, wodurch diese Ausbreitung des Druckes zustande kommt.

Wenn eine Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, so befinden sich die Moleküle derselben in bestimmten durch die gegenseitigen Anziehungen und Abstofsungen bedingten Entfernungen. Wenn wir nun auf eine rings eingeschlossene Flüssigkeit in einer Richtung einen Druck ausüben, so mufs zunächst in dieser Richtung, gerade wie bei den festen Körpern, eine Annäherung der Moleküle stattfinden, bis die infolge der Annäherung derselben vergröfserte Abstofsung der Moleküle gleich ist der durch den äufsern Druck vermehrten Anziehung der Moleküle. Gerade so aber, wie die Moleküle sich in der Richtung des Druckes einander nähern, so nähern sie sich auch in den auf die Druckrichtung senkrechten Dimensionen, und zwar, wie aus der gleichmäfsigen Fortpflanzung des Druckes folgt, um genau die gleiche Gröfse. Darin unterscheiden sich also die Flüssigkeiten von den festen Körpern; drücken wir einen festen Körper in der einen Richtung zusammen, so ist die Querdilatation nur ein Bruchteil der in ersterer Richtung eintretenden Kompression; soll die Ausdehnung nach der Quere verhindert werden, so bedarf es deshalb auch nur eines ebenso grofsen Bruchteils der in der ersten Richtung thätigen Kraft, welche in der Richtung der Querdimensionen der Ausdehnung entgegenwirken mufs. Weil aber bei einer in einem unausdehnsamen Gefäfse eingeschlossenen Flüssigkeit die Moleküle nach allen Richtungen sich gleichmäfsig nähern, deshalb mufs, wenn keine Ausdehnung eintreten soll, von allen Seiten der gleiche Gegendruck wirken.

Die gleichmäfsige Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten können wir somit als eine Folge davon ansehen, dafs die Flüssigkeiten in einer Beziehung ebenso wie die festen Körper elastisch sind; es treten in ihnen Elasticitätskräfte immer dann auf, aber auch nur dann, wenn die Moleküle aus ihrer Gleichgewichtslage so verschoben werden, dafs sie sich einander

nähern; eine Verschiebung der Moleküle ohne Änderung der Dichtigkeit ruft keine elastische Kraft hervor.

Um den Nachweis zu liefern, dafs die gleichmäfsige Fortpflanzung des Druckes in der That eine Folge der durch eine Annäherung der Moleküle geweckten elastischen Kraft ist, haben wir zu zeigen, dafs die Flüssigkeiten in der That durch äufsere Drucke eine Volumverminderung erfahren. Indem wir dann gleichzeitig die durch einen gegebenen Druck hervorgebrachte Volumverminderung messen, können wir die Abhängigkeit der Volumverminderung von dem äufsern Drucke und besonders die Frage untersuchen, ob auch hier, wie bei festen Körpern, die Volumverminderung der Gröfse des Druckes proportional ist. Ist das der Fall, so mufs die durch einen auf die Flächeneinheit wirkenden Druck P hervorgebrachte Volumverminderung v

$$v = \varkappa \cdot P$$

sein, worin $\varkappa$ eine Konstante ist, welche man als den Kompressionskoefficienten der Flüssigkeit bezeichnet. Der reciproke Wert dieses Koefficienten oder

$$\frac{1}{\varkappa} = E$$

ist dann der Elasticitätskoefficient der Flüssigkeiten, jener Koefficient, mit welchem wir die in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens angegebene Volumverminderung multiplicieren müssen, um die durch diese Volumverminderung geweckte elastische Kraft zu erhalten.

Der erste Versuch, um die Kompressibilität der Flüssigkeiten nachzuweisen, wurde von der Academia del Cimento zu Florenz[1]) gemacht, jedoch mit ungünstigem Erfolge. Man nahm unter andern Versuchen eine mit Wasser gefüllte, mit einer Öffnung versehene Hohlkugel von Silber. In die Öffnung wurde ein Stempel mit grofser Gewalt hineingetrieben; aber anstatt einer Zusammendrückung des Wassers beobachtete man, dafs dasselbe durch die Poren des Silbers hindurch gepresst wurde.

Mit günstigerem Erfolge wurde der Versuch im Jahre 1761 von Canton[2]) wiederholt, dem es gelang, den Nachweis zu liefern, dafs das Wasser durch einen äufsern Druck eine Verminderung des Volumens erfuhr. Canton wandte zu seinen Versuchen eine mit einer langen und engen Glasröhre versehene Kugel an. Dieselbe wurde mit Wasser gefüllt, erhitzt, und wenn das Wasser im Kochen war, die Spitzen der Röhre zugeschmolzen. Durch die Abkühlung zog sich dann das Wasser zusammen und reichte bei einer bestimmten Temperatur bis zu einem gewissen Punkte der Röhre. Durch das Zusammenziehen des Wassers entstand über demselben in der Röhre ein luftleerer Raum. Wurde die Spitze abgebrochen, so drang die Luft rasch in die Röhre, und unter ihrem Drucke sah man die Flüssigkeit in der Röhre sinken. Dieses Sinken hatte jedoch zwei Ursachen, einmal die Zusammendrückung des Wassers, dann aber die Vergröfserung des Volumens des Gefäfses dadurch, dafs plötzlich der Druck im Innern desselben um den Druck einer Atmosphäre erhöht wurde. Um die Ver-

[1]) *Fischer*, Geschichte der Physik. Bd. II. p. 207.
[2]) *John Canton*, Experiments to prove that water is not incompressible. Philosophical Transactions of London Royal Society. Vol. XII. Poggend. Ann. Bd. XII. p. 39.

gröſserung des innern Raumes des Gefäſses zu messen, genügt es
äuſsern Druck auf die Gefäſswände gerade so viel zu vermindern, als
der innere Druck vermehrt war; brachte man also die Kugel in den
leeren Raum, so muſste sich ihr Volumen gerade so vermehren wie in
vorigen Falle. Die Vermehrung wurde durch das Sinken des Wass
der engen Röhre gemessen und die so erhaltene Gröſse von der bei
ersten Versuche erhaltenen abgezogen; der Unterschied gab die Kompr
des Wassers. Auf diese Weise war also die Kompressibilität des W
bewiesen. Ähnliche Versuche stellte 1820 Perkins[1]) an mit gleichem E
Die ersten genauer messenden Versuche rühren jedoch von Oersted[2])

Oersted konstruierte einen Apparat, den man Piëzometer oder
piëzometer nennt. Das Piëzometer besteht aus einem weiten Gefäſse (Fig
an dem sich ein sehr enges Glasrohr O befindet, welches in einem kl
Trichter endigt und unverschlossen bleibt.

Das Rohr ist genau cylindrisch und in gleiche Teile geteilt. Zur
muſs nun der Apparat graduiert, d. h. die Kapacität des ganzen Ge
mit der des zwischen zwei Teilstrichen befindlichen Raumes vergl
werden. Wir wollen das Verfahren etwas näher beschreiben, da wir
häufig derselben Aufgabe begegnen.

Fig. 70.



Man wiegt zunächst das leere Gefäſs und
es dann mit Quecksilber; wegen der Enge der
läſst sich das nicht durch einfaches Eing
füllen, weil die im Gefäſse enthaltene Luft
entweichen und deshalb das Quecksilber nich
dringen kann. Man erwärmt daher das Gefäſ
hält den Trichter, in welchem das Rohr O e
unter Quecksilber. Beim Erkalten steigt
durch den Druck der äuſsern Luft das Queck
in die Röhre und das Gefäſs auf. Hört das Q
silber auf zu steigen, so erwärmt man neue
und so fort, bis das Gefäſs ganz mit Queck
gefüllt ist. Um keine Spur Luft in dem Gef
lassen, erwärmt man dann das Gefäſs noc
taucht währenddes seine Spitze in Quecksilbe
läſst es dann auf 0° erkalten, indem man e
sichtig mit schmelzendem Eise umgibt.
einiger Zeit, vielleicht nach einer Viertel
oder bei groſsen Gefäſsen noch länger, nimm
den mit Quecksilber von der Temperatur
füllten Apparat aus dem Eise heraus, trockn
rasch und vorsichtig ab und bestimmt mög
rasch sein Gewicht. Von dem erhaltenen Totalgewicht P zieht ma
Gewicht p des leeren Gefäſses ab und erhält aus dem Quotienten
das Volumen des Gefäſses in Kubikcentimetern, wenn P und p in Gra
gegeben und D das specifische Gewicht des Quecksilbers ist.

[1]) *Perkins*, Philosophical Transactions. Vol. LXXII. 1820. Poggend. Ann.
[2]) *Oersted*, Denkschriften der Kopenhagener Akademie IX. Bd. 1822. Po
Annd. Bd. IX. p. 603.

Darauf erwärmt man das Gefäfs sehr wenig, bewirkt dadurch, dafs was Quecksilber austritt, und läfst es wieder wie vorhin auf 0^0 erlten. Dabei zieht sich das Quecksilber zusammen, und schliefslich wird s Ende des in die Röhre hineinragenden Quecksilberfadens konstant einem eilstriche der Röhre gegenüber stehen, der um n Teilstriche tiefer sei als i der vorigen Wägung. Jetzt wiegt man wieder; und ist das jetzt genndene Gewicht gleich P', so gibt die Verminderung des Gewichtes $P - P'$ n, wieviel Gramme Quecksilber den Raum zwischen jenen n Teilstrichen usfüllen; der Quotient $\frac{P - P'}{D}$ gibt dann diesen Raum in Kubikcentimetern nd der Quotient $\frac{P - p}{n D}$ den Raum zwischen zwei Teilstrichen in derelben Einheit an.

Nach geschehener Kalibrierung wird das Gefäfs in ganz gleicher Weise mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und in den kleinen Trichter ein Tropfen Quecksilber gebracht. Dieser dient einmal als Pfropfen, um das Eindringen von Flüssigkeit in das Gefäfs zu verhüten, dann aber auch als Index, da er während der Kompression in die Röhre hinabgedrückt wird und somit angibt, um wieviel das Volumen der Flüssigkeit kleiner geworden ist. Das Gefäfs wird auf einer Messingplatte befestigt, daneben ein Thermometer L und eine geteilte, unten offene, oben geschlossene, mit Luft gefüllte Röhre K, welche als Druckmesser dient, befestigt, und dann die ganze Vorrichtung in ein mit Wasser gefülltes Gefäfs hinabgelassen, das als Kompressionsapparat dient.

Das Gefäfs E besteht aus einem Cylinder von starkem Glase, der unten in einen Fufs F eingelassen und oben mit einer Fassung versehen ist, in deren Röhre A sich ein beweglicher Kolben D befindet. Man füllt das Gefäfs, während der Kolben sich über A befindet, durch den Hahn B mit Wasser so weit, dafs dasselbe aus einer Öffnung bei A ausfliefst. Man schliefst dann den Hahn und schraubt den Kolben herab. Sobald derselbe unter A herabgeschraubt ist, kann kein Wasser mehr entweichen, und das des Gefäfses wird zusammengedrückt.

Der Druck, den man auf diese Weise ausübt, trifft nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen in ganz gleicher Weise die äufsere Wand des Piëzometers und die in seinem Innern enthaltene Flüssigkeit. Man sieht nun den Index um eine gewisse Anzahl Teilstriche sinken und mifst dadurch die Volumverminderung der im Piëzometer enthaltenen Flüssigkeit. Zugleich wird auch die Luft in der Röhre K komprimiert, und in der Volumveränderung derselben erhalten wir, wie wir später sehen werden, ein Mafs für den ausgeübten Druck.

Man hat auf diese Weise die Volumverminderung gemessen und andererseits den Druck, welcher dieselbe hervorgebracht hat. Dividiert man die Volumveränderung durch das ursprüngliche Volumen und diesen Quotienten durch den auf die Flächeneinheit wirkenden Druck, so erhält man den scheinbaren Kompressionskoefficienten der Flüssigkeit, d. h. die Kompression der Flüssigkeit ohne Rücksicht auf diejenige des Gefäfses.

Oersted fand diesen Koefficienten für Wasser gleich 46 Millionteile, wenn man als Einheit des Druckes den einer Atmosphäre annimmt, d. h. wenn man in einem rings geschlossenen Gefäfse auf jedes Quadratcentimeter

Oberfläche einen Druck von 1,0333 Kilogramm ausübt, so wird die Flüssigkeit um 46 Millionteile ihres ursprünglichen Volumens komprimiert. Oersted hielt dies für die wahre Kompressibilität des Wassers; denn er glaubte, weil der Druck in ganz gleicher Weise auf die äufsere und innere Wand ausgeübt wird, so könne sich die Kapacität des Gefäfses nicht ändern außer ganz unmerklich dadurch, dafs die Wanddicke des Gefäfses etwas geändert wird. Oersted hatte jedoch Unrecht. Denn setzen wir voraus, dafs das Piëzometer, anstatt mit Wasser gefüllt zu sein, ganz und gar von Glas sei, so ist klar, dafs, wenn man dasselbe von aufsen drückt, der Druck sich auf den innern Kern fortpflanzt und dessen Volumen nach den Gesetzen der kubischen Kompression vermindert. Die Kapacität der Hülle mufs sich demnach um die gleiche Gröfse ändern. Ganz dasselbe mufs aber auch der Fall sein, wenn das Gefäfs mit Wasser gefüllt ist; denn so wie in dem eben betrachteten Falle der Kern von der Hülle einen Druck erfährt und nach seiner Zusammenpressung einen ganz gleichen Gegendruck ausübt, die Hülle also ganz genau so stark nach innen wie nach aufsen gedrückt wird, so auch hier, wo der feste Kern durch Wasser ersetzt ist; die Hülle erfährt gleiche Drucke; sowie also in dem Falle des festen Kernes eine Volumveränderung eintrâte, so mufs sie es in diesem Falle auch.

Nennen wir demnach die Kapacität des Piëzometers V, P den ausgeübten Druck, $\varkappa$ den Kompressionskoefficienten des Wassers, so würde bei ganz unverändertem Gefäfse die Volumverminderung, welche man beobachtet, $\varkappa V \cdot P$ sein. Da aber das Gefäfs komprimiert wird, so beobachtet man eine kleinere. Ist nämlich C der kubische Kompressionskoefficient des Gefäfses, so vermindert sich dessen Volum um $C \cdot P \cdot V$, und dadurch mufs die Flüfsigkeit im Gefäfse steigen. Die beobachtete Kontraktion w ist die Differenz beider:

$$w = \varkappa \cdot P \cdot V - C \cdot P \cdot V,$$

oder

$$\frac{w}{P \cdot V} = \varkappa - C.$$

Man beobachtet also die Differenz zwischen dem Kompressionskoefficienten des Wassers und dem kubischen Kompressionskoefficienten des Gefäfses.

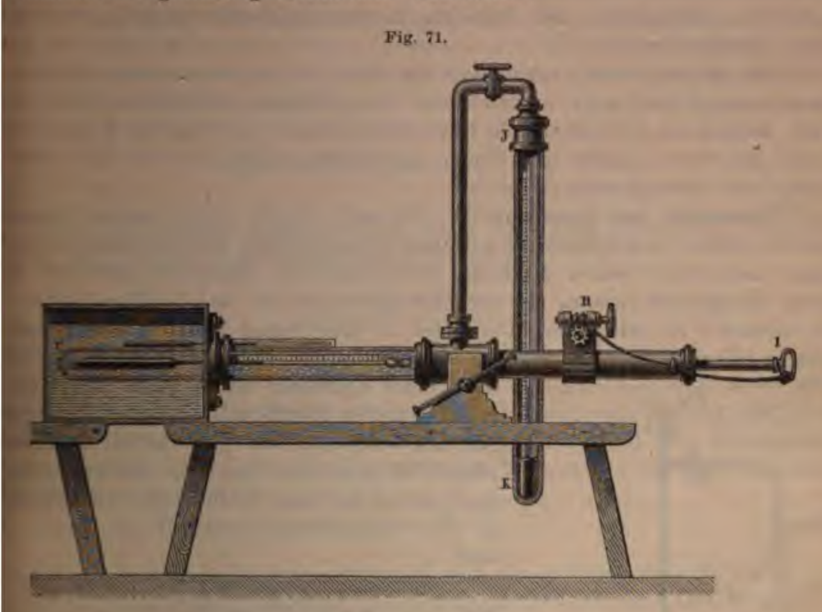
Colladon und Sturm wiesen diesen Irrtum in Oersteds Versuchen nach und unternahmen es, ihn zu korrigieren[1]). Sie stellten eine grofse Reihe von Versuchen mit einem dem Oerstedschen sehr ähnlichen Apparate (Fig. 71) an. Ein Piëzometer A wurde wie das Oerstedsche hergestellt und graduiert und dann in ein weites Gefäfs C mit starken Wänden, welches mit Wasser gefüllt war, eingeschlossen. Letzteres diente als Kompressionsapparat. Der einzige Unterschied besteht darin, dafs sie das Piëzometer horizontal legten und den ausgeübten Druck mit einem fein geteilten, langen und deshalb sehr empfindlichen Quecksilbermanometer KJ mafsen. Dieser Druck wurde mit Hülfe eines Kolbens ausgeübt, dessen Stiel I durch ein Seil gezogen wurde, welches um eine, durch eine Schraube ohne Ende H, bewegliche Walze gerollt war.

---

[1]) *Colladon* und *Sturm*, Annales de chim. et de phys. T. XXXVI. p. 1 Auch *Poggend.* Annalen XII, 39.

Colladon und Sturm bemerkten nun bald auch einige Fehlerquellen, welche an sich zwar sehr klein, auf das endliche Resultat wegen der Kleinheit der zu messenden Gröfsen jedoch von bedeutendem Einflufs wurden. Der Index von Quecksilber in der Röhre des Piëzometers bot manche Unbequemlichkeit, er adhärierte am Glase, bewegte sich nicht regelmäfsig, sondern sprungweise bei Vermehrung des Druckes. Sie wandten deshalb einen Tropfen Schwefelkohlenstoff oder auch eine kleine Luftsäule an und erhielten so regelmäfsig verlaufende Versuche.

Fig. 71.



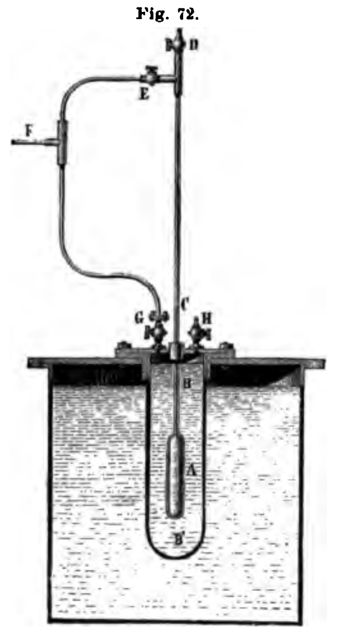
Andererseits ist das Piëzometer ein wahres Thermometer und wegen des grofsen Gefäfses und der engen Röhre sogar ein sehr empfindliches. Jede Temperaturänderung veranlafst daher eine Bewegung des Index; und da jede Zusammendrückung das Wasser erwärmt, jede Ausdehnung wieder abkühlt, so waren die beobachteten Variationen Resultate sehr verwickelter Natur. Man schaffte diese Störung fort, indem man das Kompressionsgefäfs in ein grofses Gefäfs mit Wasser einschlofs, welches dazu diente, die Temperatur konstant zu halten. Die Versuche waren daher sehr genau. Die Messungen mufsten indes wegen der Kompressibilität des Glases korrigiert werden; dazu verfuhren die Physiker folgendermafsen. Sie nahmen einen Glasstab von 1 Meter Länge und 13,3 Quadratmillimeter Querschnitt. Dieser wurde durch ein Gewicht von 8 Kilogramm gezogen und eine Verlängerung von $0^{mm},06$ beobachtet. Er würde durch das gleiche Gewicht um ebensoviel komprimiert worden sein. Der Druck der Atmosphäre ist nun auf den Quadratcentimeter 1,0333 Kilogramm, auf jede Endfläche des Stabes, 13,3 Quadratmillimeter, somit $138^{gr},3$, und da die Verkürzung des Stabes dem pressenden Gewichte proportional ist, so folgt, dafs sich der Stab durch den Druck einer Atmosphäre um $0^{mm},0011$ verkürzt. Dies ist die lineare Kompressibilität für ein Meter Länge und den Druck einer Atmosphäre.

Colladon und Sturm nahmen nun an, dafs ein Druck auf die Endflächen nur eine Verkürzung des Stabes und keine andere Veränderung der Gestalt oder des Querschnittes bewirke. Wenn nach dieser Hypothese ein Druck auf die ganze Oberfläche ausgeübt wird, so mufs sich der Stab nach allen Richtungen hin gleichmäfsig verkürzen. Die Länge l wird $l\,(1-0{,}0000011)$, der Radius der Basis wird $r\,(1-0{,}0000011)$, und das ursprüngliche Volumen $\pi r^2 l$ geht sonach über in $\pi r^2 l\,(1-0{,}0000011)^3$ oder annähernd mit Vernachlässigung der zweiten und dritten Potenzen in $\pi r^2 l\,(1-0{,}0000033)$. Die kubische Kompression wäre sonach die dreifache von der linearen.

Wir sahen jedoch vorhin, dafs ein Stab, der in seiner einen Richtung zusammengedrückt wird, zugleich eine Vergröfserung des Querschnittes erhält; deshalb ist die vorstehende Entwicklung nicht exakt und die Korrektion sowie die von Colladon und Sturm gegebenen Zahlen für die Kompressibilität der Flüssigkeiten zu grofs.

Versuche von Regnault[1]. Regnault wurde durch andere Fragen darauf geführt, sich eingehend mit diesem Gegenstande zu beschäftigen, und seine nach einer neuen Methode unternommenen Versuche gestatten es, beide Kompressibilitäten, die der Flüssigkeit und die des Gefäfses zugleich zu messen. Er gibt dem Piëzometer A eine genau bestimmbare geometrische Gestalt, einer Metallkugel von bekanntem innern und äufsern Radius oder eines Cylinders mit ebenen oder halbkugelförmigen Endflächen, wie in Fig. 72. An das Gefäfs ist eine gut kalibrierte Glasröhre CD angesetzt, die ihrer ganzen Länge nach geteilt ist, und deren Volumverhältnisse in der vorhin beschriebenen Weise bestimmt sind.

Fig. 72.



Man schliefst nun das Gefäfs des Piëzometers in einen mit Wasser angefüllten Kupfercylinder B, der durch einen mittels Schrauben befestigten Deckel verschlossen ist. Durch eine Öffnung des Deckels reicht der Stiel des Piëzometers aus dem Gefäfse hervor, der mit Kitt in der Öffnung befestigt ist. Das Innere der Röhre kann an ihrem obern Ende durch einen Hahn D mit der freien Luft in Verbindung gebracht und dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzt werden. Durch den Hahn E und die Röhre EF kann das Innere der Röhre CD aber auch mit einem mit komprimierter Luft gefüllten Gefäfse in Verbindung gebracht und so beliebig einem starken Drucke ausgesetzt werden oder nicht. Durch die Röhre FG kann dasselbe Gefäfs mit komprimierter Luft, wenn der Hahn G geöffnet und H geschlossen ist, auch einen Druck auf das Wasser des Gefäfses BB ausüben.

[1] *Regnault*, Relation des expériences etc. Mémoires de l'Académie, *Tome* XXI. p. 429. Paris 1847.

Man kann somit 1) auf das Piëzometer einen äufsern Druck ausüben, dem man E schliefst, G und D öffnet und H schliefst; 2) einen innern und äufsern Druck ausüben, wenn man H und D schliefst, G und E öffnet; 3) man kann einen innern Druck allein üben, wenn man D und G schliefst, H und E öffnet.

Man vollführt nach und nach alle drei Kompressionen.

I. Man komprimiert das Wasser im Gefäfs BB. Diesen Versuch haben wir schon § 50 beschrieben bei Betrachtung der kubischen Kompressibilität. Die Flüssigkeit im Piëzometer unterliegt keiner Einwirkung; nur das Gefäfs ist komprimiert, sein Volumen verkleinert, die Flüssigkeit steigt auf. Bezeichnen wir die eingetretene Volumverminderung mit $\Delta V'$, so ist nach § 50 für den Fall der Kugel

$$\frac{\Delta V'}{V} = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P.$$

Die Beobachtung liefert uns den Wert von μ und daraus auch den des kubischen Kompressionskoefficienten des Gefäfses

$$C_1 = 3 \frac{1-2\mu}{E}.$$

II. Man übt innen und aufsen den gleichen Druck P aus; dabei beobachtet man die Volumverminderung der Flüssigkeit, weniger der des Gefäfses. Bezeichnen wir den Kompressionskoefficienten der Flüssigkeit mit $\varkappa$, so erhalten wir für die Volumverminderung der Flüssigkeit aus den Gleichungen des § 50

$$\Delta v_1 = \varkappa \cdot P \cdot V;$$

denn die Flüssigkeit ist eine massive Kugel, somit der Radius R_0 des § 50 gleich Null. Darnach ist auch die Konstante $b = 0$, und der Wert von Δv_1 reduciert sich auf das oben hingeschriebene Glied.

Um die Volumverminderung des Gefäfses zu erhalten, haben wir in den Gleichungen des § 50 $P_1 = P_0$ zu setzen. Damit wird

$$b = 0; \quad c = \frac{1}{3K+k} \cdot P = \frac{1-2\mu}{E} \cdot P,$$

somit die Volumverminderung

$$\Delta v_2 = 3 \frac{1-2\mu}{E} \cdot P \cdot V = C_1 P \cdot V.$$

Die in diesem Falle überhaupt beobachtete Verminderung des Volumens V'' ist die Differenz zwischen der Verminderung des Volumens der Flüssigkeit und jener des Gefäfses,

$$\Delta V'' = \Delta v_1 - \Delta v_2 = \varkappa P V - C_1 P V,$$

$$\frac{\Delta V''}{P \cdot V} = \varkappa - C_1; \quad \varkappa = \frac{\Delta V''}{P \cdot V} + C_1.$$

Da der erste Versuch C_1 geliefert hat, können wir aus diesem den Wert von $\varkappa$ berechnen.

III. Der dritte Versuch liefert eine Kontrole der beiden erstern; übt den Druck P nur im Innern aus. Die beobachtete Volumänderung rührt her von der Kompression der Flüssigkeit und der Ausdehnung Gefäfses, erstere ist wie oben

$$\Delta v_1 = \varkappa P V.$$

Die Ausdehnung des Gefäfses erhalten wir aus den Gleichungen § 50, indem wir P_1 gleich Null setzen; damit wird dieselbe

$$\Delta v = P \cdot V \left\{ \frac{3}{3K+k} \cdot \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{3}{2k} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \right\},$$

somit

$$\Delta V = \Delta v_1 + \Delta v = PV \left\{ \varkappa + \frac{3}{3K+k} \cdot \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{3}{2k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \right\}$$

oder auch, wenn wir K und k durch μ und E ausdrücken,

$$\Delta V = PV \left\{ \varkappa + 3 \frac{(1-2\mu) R_0^3 + \frac{1}{2}(1+\mu) R_1^3}{E(R_1^3 - R_0^3)} \right\}.$$

Da nun die bei dem ersten Versuch beobachtete Volumänderung

$$\Delta V' = 3 \frac{\frac{3}{2}(1-\mu)}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P \cdot V;$$

da ferner bei dem zweiten Versuche die Volumänderung sich ergab

$$\Delta V'' = \left\{ \varkappa - 3 \frac{1-2\mu}{E} \right\} P \cdot V,$$

so folgt

$$\Delta V' + \Delta V'' = \left\{ \varkappa + 3 \frac{(1-2\mu) R_0^3 + \frac{1}{2}(1+\mu) R_1^3}{E(R_1^3 - R_0^3)} \right\} = \Delta V.$$

Es mufs somit die Volumänderung bei dem dritten Versuch g der Summe der Volumänderungen bei dem ersten und zweiten Vers sein, eine Relation, welche Regnault bei allen seinen Versuchen auf genaueste bestätigt fand. Für die Kompressibilität des Wassers erhält aus den Versuchen Regnaults mit der Kupferkugel

$$\varkappa = 0{,}000\,047\,7,$$

aus den Versuchen mit der Messingkugel

$$\varkappa = 0{,}000\,047\,9,$$

wobei als Einheit des Druckes derjenige einer Atmosphäre vorausgesetz Nehmen wir auch hier als Einheit des Druckes den eines Kilogr auf das Quadratmillimeter, so haben wir diese Zahl durch 0,010 33 dividieren, dann wird

$$\varkappa = 0{,}004\,624\,; \quad E = \frac{1}{\varkappa} = 216{,}2.$$

Später hat Grassi[1]) mit den Regnaultschen Apparaten eine Anzah Flüssigkeiten untersucht; in der folgenden Tabelle sind die von ihn fundenen Werte zusammengestellt. Die Werte von $\varkappa$ beziehen sich au Druck einer Atmosphäre.

---

[1]) *Grassi*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXXI.

Name der Flüſsigkeit	Temperatur	Zusammen-drückbarkeit κ für Atm.	Druck in Atmosphären, aus denen die Zusammendrückbarkeit hergeleitet.
ksilber	0°,0	0,000 002 95	—
ser	0,0	0,000 0503	—
. . . .	1,5	515	—
. . . .	4,8	499	—
. . . .	10,1	480	—
. . . .	13,4	477	—
. . . .	18,0	463	—
. . . .	—	460	—
. . . .	25,0	456	—
. . . .	34,5	453	—
. . . .	43,0	442	—
. . . .	53,0	441	—
ʹläther	0,0	0,000 111	3,408
id.	0,0	131	7,820
id.	14,0	140	1,580
id.	13,8	153	8,362
ʹlalkohol.	7,3	0,000 0828	2,302
id.	7,3	853	9,495
id.	13,1	904	1,570
id.	13,1	991	8,97
hylalkohol	13,5	0,000 0913	—
›roform	8,5	0,000 0625	—
›rcalcium Lösung 1	17,5	0,000 0306	—
id. id. 2	15,8	206	—
id. id. 2	41,25	229	—
hsalz id. 1	18,5	321	—
d. id. 2	18,1	257	—
d. id. 2	39,6	263	—
kalium id.	15,5	260	—
ronsalpeter id.	18,1	295	—
a id.	16,6	297	—
rwasser	17,5	436	—
+ 2HO	13,6	242	—
+ 3HO	14,6	250	—
+ 4HO	16,5	271	—
+ 5HO	14,7	279	—
+ 6HO	14,2	283	—
+ 10HO	14,6	315	—

ls Elasticitätskoefficienten, bezogen wie bei den festen Körpern auf amm und Quadratmillimeter,

$$E = \frac{0{,}010\,333}{\varkappa},$$

sich hieraus ergeben

für Quecksilber bei 0° C. E = 3503
„ Wasser „ 0° „ . . . 205
„ „ „ 13°,4 „ . . . 217
„ „ „ 53° „ . . . 234
„ Äthyläther „ 0° „ . . . 93
„ „ „ 14° „ . . . 74

flöste, als er in der Röhre vordrang. Nach Beendigung
ıte dann die während der Wirkung des Druckes ein-
ninderung dadurch erhalten werden, dafs man das Piëzo-
it einmal bis zu der Stelle füllte, bis zu welcher die
ı war, das Gewicht dieser Flüssigkeit bestimmte, dann
um Ende der Röhre füllte und nun das Gewicht der so
r füllenden Flüssigkeit bestimmte. Der Quotient aus
eiden und dem zuletzt gefundenen Gewichte gibt dann,
n von Oersted, die scheinbare Kompression. Um aus
ompressionskoefficienten zu erhalten, hat man zu dem
efundenen Kompression und dem Drucke, der sie her-
chen Kompressionskoefficienten des Glases zu addieren.
en mit einem Druckmesser bestimmt, den wir im § 64
Cailletet begnügt sich damit, die scheinbaren Kom-
ür 1 Atmosphäre anzugeben; dieselben sind in folgen-
zusammengestellt; die in der letzten Kolumne der
Werte des wahren Kompressionskoefficienten $\varkappa$ habe
indem ich den aus Regnaults Beobachtungen (§ 50)
Kompressionskoefficienten des Glases

$$C = 0{,}000\,001\,85$$

ruck zu $\varkappa_1$ hinzuaddiert habe.

t	Temperatur	$\varkappa_1$	Druck in Atmosphären, aus denen $\varkappa$ abgeleitet ist.	$\varkappa$
. .	8° C.	0,000 045 1	705	0,000 046 95
. .	8 „	0,000 098 0	607	0,000 099 85
. .	9 „	0,000 067 6	174	0,000 069 45
. .	9 „	0,000 070 1	305	0,000 071 95
. .	11 „	0,000 072 7	680	0,000 074 55
. .	10 „	0,000 144 0	630	0,000 145 85

d Äthyläther erhaltene Wert stimmt sehr gut mit
nen; der für Alkohol gefundene ist beträchtlich
el darin seinen Grund hat, dafs der von Cailletet
asserhaltig gewesen ist; er gibt dessen specifisches
s einem ziemlich wasserhaltigen Alkohol entspricht.
ol gefundenen Werte, von denen der letzte noch
ı Temperatur entspricht, wodurch die ganze Zu-
es gegen den zweiten erklärt wird, zeigen keines-
hsen der Kompression mit steigendem Druck, wie
gen von Grassi schliefsen müfste.
ıen vorhin schon erwähnten Versuchen den Schlufs,
ucke bei den Flüssigkeiten die Kompressibilität
welche in höheren Temperaturen noch sehr viel
en Temperaturen. Die Abnahme tritt am deut-
ı nicht die Kompressionskoefficienten als mittlere
mten hohen Drucke beobachteten Kompressionen

ableitet, sondern wenn man sie aus den mit wachsendem Drucke beobachteten Volumverminderungen für engere Grenzen der Druckzunahme ableitet. So fand Amagat für Äthyläther bei 13°,7 C. folgende Kompressionskoefficienten für die Druckzunahme von einer Atmosphäre, wenn sie abgeleitet wurden aus den Volumverminderungen, die eintraten, als der Druck zunahm

von	8,53	bis	13,70	Atm.	$\varkappa =$	0,000 168
„	13,70	„	19,47	„	„	0,000 169
„	19,47	„	25,40	„	„	0,000 169
„	25,40	„	30,56	„	„	0,000 162
„	30,56	„	36,45	„	„	0,000 152.

Bis zu 19,47 Atmosphären waren also entsprechend den Beobachtungen von Amaury und Descamps die Koefficienten konstant, bei weiterer Druckzunahme tritt die Verminderung deutlich hervor.

Bei der Temperatur 100° erhielt Amagat folgende Werte

von	8,50	bis	13,90	Atm.	$\varkappa =$	0,000 560
„	13,90	„	19,55	„	„	0,000 540
„	19,55	„	25,60	„	„	0,000 525
„	25,60	„	30,55	„	„	0,000 489
„	30,55	„	36,65	„	„	0,000 474.

Hier zeigt sich schon bei der zweiten Reihe eine erhebliche Abnahme. Hiernach zeigen die Flüssigkeiten das eigenthümliche von Grassi vermutete Verhalten nicht, sie verhalten sich wie alle übrigen Körper, bei denen unter grofsen Drucken die Kompressibilitäten schliefslich abnehmen.

§ 63.

Hydrostatischer Druck. Die im § 61 abgeleitete Gleichung über die im Innern einer Flüssigkeit vorhandenen Drucke setzt uns in den Stand, das Verhalten einer Flüssigkeit in einem offenen Gefäfse und die in derselben vorhandene Verteilung der Drucke zu bestimmen.

Nehmen wir zunächst an, dafs die Flüssigkeit nur der Schwere unterworfen sei, so ergibt sich als erste Folge jener Gleichung, dafs die Oberfläche der Flüssigkeit eben und horizontal sein mufs. Als Bedingung, dafs die Oberfläche einer Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, ergibt sich nämlich unmittelbar, dafs die auf irgend einen Punkt der Oberfläche wirksamen, der Oberfläche parallelen Kräfte, sich gegenseitig aufheben müssen. Denn wenn das nicht der Fall ist, so wird die Flüssigkeit sich nach der Richtung der gröfsern Kraft bewegen müssen. Dieses Aufheben der der Flüssigkeitsfläche parallelen Drucke findet aber nur dann statt, wenn die vorhandenen Drucke normal sind zur Oberfläche und an allen Stellen derselben gleiche Gröfse haben. Denn, sind die Drucke nicht normal, so haben sie eine der Fläche parallele Komponente, welche demnach das Gleichgewicht stören würde; sind die Drucke aber an verschiedenen Stellen verschieden, so tritt ebenfalls, wegen der nach allen Richtungen gleichmäfsigen Fortpflanzung des Druckes, eine der Oberfläche parallele Kraft auf, welche nicht durch einen Gegendruck aufgehoben wird. Diese zwei Bedingungen fallen also streng genommen in eine zusammen, da bei Flüssigkeiten immer, wenn die Drucke an allen Stellen einer Fläche dieselben sind, die Drucke normal zur

che sind. Derartige Flächen, in welchen der normale Druck an allen derselbe ist, nennt man Niveauflächen. Damit können wir also als ›ichgewichtsbedingung einer freien Flüssigkeitsoberfläche den Satz len, dafs dieselbe eine Niveaufläche sein mufs.

Tir erhielten nun § 61 ganz allgemein für den auf die Flächeneinheit ıern einer Flüssigkeit wirkenden Druck, wenn in derselben irgend ıdere Fläche einen Druck erhält, der für die Flächeneinheit p_0 ist,

$$p = p_0 + d \cdot h,$$

d die Dichtigkeit der Flüssigkeit und h den vertikalen Abstand des ›nelementes, auf welchem der Druck für die Flächeneinheit p ist, von bedeutet, auf welchem der Druck p_0 ist.

Es gehören nun alle diejenigen Flächenelemente zu einer Niveaufläche, elche p einen und denselben Wert hat, für welche also

$$p = p_0 + d \cdot h = \text{const.}$$

In einer gegebenen Flüssigkeitsmasse ist demnach für alle Elemente ıstant, für welche

$$h = \text{const.},$$

ı vertikale Abstände von einem gegebenen Punkte alle gleich sind; ist aber eine horizontale Ebene. Da somit die Niveauflächen die horiılen Ebenen sind, so mufs auch die freie Oberfläche einer Flüssigkeit horizontale Ebene sein.

Ganz dasselbe, was von der freien Oberfläche einer Flüssigkeit gilt, gilt auch für die Grenzfläche zweier nicht mischbaren Flüssigkeiten ver›denen specifischen Gewichtes, welche über einander geschichtet sind; ı diese mufs eine horizontale Ebene sein. Es ergibt sich das so unelbar aus dem eben abgeleiteten Satze, dafs die Niveauflächen in einer sigkeit horizontale Ebenen sein müssen, dafs es überflüssig sein wird Beweis besonders zu führen.

Den letztern Fall finden wir in der Regel in der Natur realisiert, inauf den in unseren Gefäfsen vorhandenen Flüssigkeiten die Luft liegt , wie wir im nächsten Kapitel nachweisen werden, auf die Oberfläche n leicht mefsbaren, in jedem Flächenelement gleichen Druck ausübt.

Aus dem soeben bewiesenen Satze, dafs die Niveauflächen im Innern r Flüssigkeit horizontale Ebenen sind, ergibt sich ferner, dafs in einer zontalen, durch die Flüssigkeit gelegten Ebene der Druck auf jedes henelement derselbe und zwar gleich dem Drucke der Flüssigkeitse sein mufs, welche sich über diesem Flächenelement befindet. Sehen nämlich von dem Drucke der Luft ab, so gibt uns unsere Gleichung, der auf die Flächeneinheit einer Ebene, welche in dem vertikalen Abde h unter der Oberfläche der Flüssigkeit sich befindet, wirksame :k p gegeben ist durch den Ausdruck

$$p = d \cdot h.$$

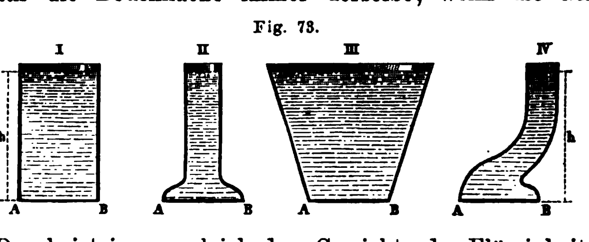
Hat die Fläche im Innern der Flüssigkeit die Gröfse s, so hat der auf ıstende Druck den Wert

$$p \cdot s = s \cdot d \cdot h;$$

er ist also gleich dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, deren Quer in ihrer ganzen Höhe gleich s ist, und deren Höhe gleich h ist.

Hieraus folgt ein merkwürdiger unter dem Namen des hydrostat Paradoxons schon von Pascal ausgesprochener Satz, der Satz nämlicl der Druck, welcher auf dem Boden eines Gefäfses wirkt, nur abl ist von der Gröfse der Bodenfläche und von der Höhe der Flüssigk Gefäfse, nicht aber von der Menge der im Gefäfse enthaltenen Flüss Dieser Satz ist in der zuletzt aufgestellten Gleichung unmittelbar er welche zeigt, dafs der Druck auf eine Fläche s, in einer gegebenen F keit nur abhängig ist von der Gröfse der Fläche und der Höhe Flüssigkeit über der Fläche. Haben wir demnach Gefäfse verschi Form, wie etwa Fig. 73, aber stets gleicher Bodenfläche, so ist der auf die Bodenfläche immer derselbe, wenn die Gefäfse bis zur g Höhe h mit de Flüssigkeit sind, einerlei Gefäfse sich ol weitern oder engern, ob sie rechte oder g Wände haber Druck ist immer gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, welche den Querschnitt s der Bodenfläche und die Höhe h hat.

Fig. 73.



Man kann diesen Satz leicht mit dem Apparate Fig. 74 nach und so gleichzeitig den experimentellen Beweis des allgemeinen liefern, dafs auf die Flächeneinheit einer in der Tiefe h unter der fläche liegenden Ebene ein vertikal abwärts gerichteter Druck wirk gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitscylinders, dessen Quer gleich der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich h ist.

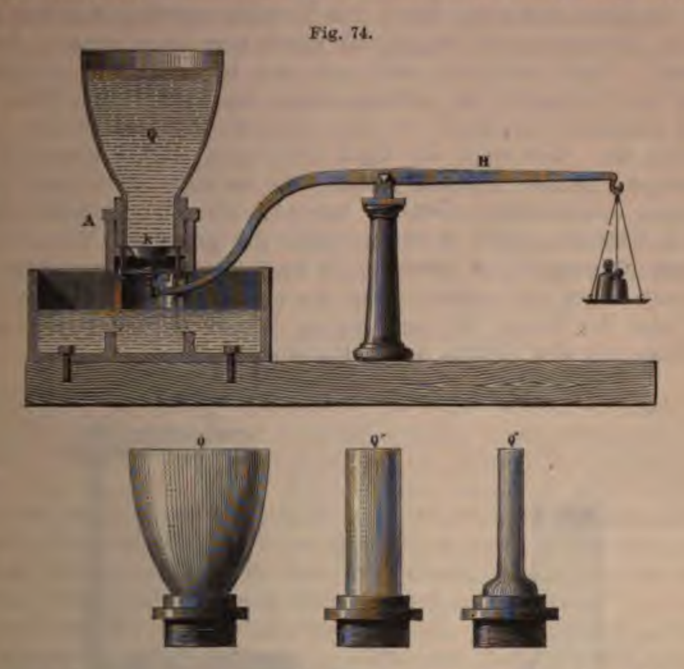
Auf einen hohlen metallischen Cylinder A (Fig. 74) können (verschiedener Form Q, Q', Q'' wasserdicht aufgeschraubt werden. I fäfse sind unten offen; in dem Cylinder A befindet sich aber eine auf welcher die Messingfassungen der Gefäfse unten aufgepafst sind. Boden der Gefäfse bildet dann ein in diese Platte genau eingeschl konisches Ventil k, welches sich von unten nach oben öffnen kann. in das Gefäfs Q Flüssigkeit bis zu einer bestimmten Marke ein ist, so wird das Ventil durch das Gewicht der Flüssigkeit fest in die eingedrückt und wasserdicht geschlossen. Das Ventil kann dann g werden durch einen an dem gleicharmigen Hebel H befestigten Stift das Ventil berührt. Wird in die Wagschale ein Gewicht p gelegt, so der Stift das Ventil mit einem dem Gewichte p gleichen Drucke Höhe; ist nun dieser Druck etwas gröfser als der von oben nach unt richtete Druck der Flüssigkeit auf das Ventil, so öffnet sich dasselbe die Flüssigkeit fliefst in das den hohlen Cylinder A umgebende Gefä

Es bedarf nun, welches der Gefäfse Q, Q', Q'' man auch anw st ts desselben Gewichtes p, um das Ventil zu heben, wenn man a dreien dieselbe Flüssigkeit bis zu der in gleicher Höhe über dem b lichen Marke einfüllt, und zwar ist immer das Gewicht p jem

ssigkeitscylinders vom Querschnitte der Bodenfläche und der Höhe der rke über dem Boden.

Wie wir schon im § 61 zeigten, müssen im Gleichgewichtszustande auf ein Flächenelement im Innern einer Flüssigkeit wirkenden Drucke selben sein, welche Richtung auch die Normale des Flächenelementes itzt. Ebenso wie demnach auf eine horizontale Fläche von der Gröfse s

Fig. 74.



vertikal abwärts gerichteter Druck von der Gröfse sdh wirkt, ebenso fs auch ein vertikal aufwärts gerichteter Druck von derselben Gröfse diese Fläche wirken. Es läfst sich auch dieser Druck leicht durch den rsuch nachweisen. Wenn man nämlich gegen das ere gut abgeschliffene Ende einer Glasröhre g. 75) eine Messingplatte mittels eines durch die ire hindurchgehenden Fadens fest anlegt und n dieses Rohr mit der Platte nach unten in ein Wasser gefülltes Glas taucht, so sieht man, dafs Platte fest an das Glas gedrückt wird, es dringt ne Flüssigkeit in die Röhre, und die Platte fällt t hinab, wenn man den Faden losläfst; ein Be-s, dafs im Innern der Flüssigkeit ein von unten h oben gerichteter Druck vorhanden ist. Man n diesen Druck durch einen gleichen in ent-ngesetzter Richtung angebrachten messen, indem in die Röhre so lange Wasser schüttet, bis die Platte herabfällt. Das hieht, wenn die Flüssigkeit in der Röhre fast genau die Höhe hat, welche Flüssigkeit im Gefäfse hat, um so genauer, je leichter die Platte ist.

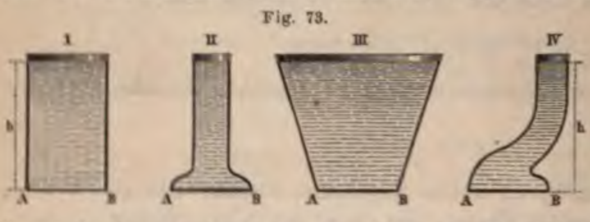
Fig. 75.



er ist also gleich dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnit in ihrer ganzen Höhe gleich s ist, und deren Höhe gleich h ist.

Hieraus folgt ein merkwürdiger unter dem Namen des hydrostatische Paradoxons schon von Pascal ausgesprochener Satz, der Satz nämlich, daſ der Druck, welcher auf dem Boden eines Gefäſses wirkt, nur abhängi ist von der Gröſse der Bodenfläche und von der Höhe der Flüssigkeit i Gefäſse, nicht aber von der Menge der im Gefäſse enthaltenen Flüssigkei Dieser Satz ist in der zuletzt aufgestellten Gleichung unmittelbar erhalte welche zeigt, daſs der Druck auf eine Fläche s, in einer gegebenen Flüssig keit nur abhängig ist von der Gröſse der Fläche und der Höhe h de Flüssigkeit über der Fläche. Haben wir demnach Gefäſse verschieden Form, wie etwa Fig. 73, aber stets gleicher Bodenfläche, so ist der Druc auf die Bodenfläche immer derselbe, wenn die Gefäſse bis zur gleiche Höhe h mit derselbe Flüssigkeit gefül sind, einerlei ob d Gefäſse sich oben e weitern oder ve engern, ob sie sen rechte oder geneig Wände haben; d Druck ist immer gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, welche über den Querschnitt s der Bodenfläche und die Höhe h hat.

Fig. 73.



Man kann diesen Satz leicht mit dem Apparate Fig. 74 nachweis und so gleichzeitig den experimentellen Beweis des allgemeinen Sat liefern, daſs auf die Flächeneinheit einer in der Tiefe h unter der Ob fläche liegenden Ebene ein vertikal abwärts gerichteter Druck wirkt, gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitscylinders, dessen Querschn gleich der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich h ist.

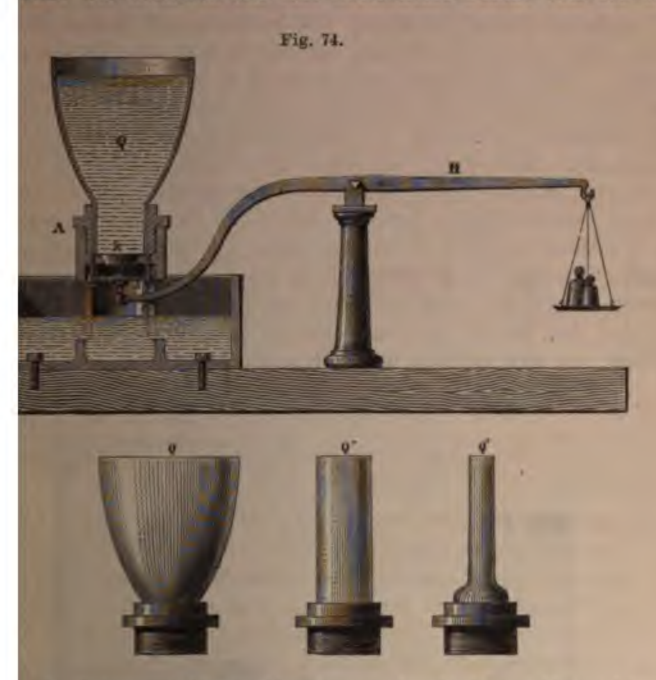
Auf einen hohlen metallischen Cylinder A (Fig. 74) können Gef verschiedener Form Q, Q', Q'' wasserdicht aufgeschraubt werden. Die fäſse sind unten offen; in dem Cylinder A befindet sich aber eine Pl auf welcher die Messingfassungen der Gefäſse unten aufgepaſst sind. Boden der Gefäſse bildet dann ein in diese Platte genau eingeschlif konisches Ventil k, welches sich von unten nach oben öffnen kann. in das Gefäſs Q Flüssigkeit bis zu einer bestimmten Marke eing ist, so wird das Ventil durch das Gewicht der Flüssigkeit fest in die eingedrückt und wasserdicht geschlossen. Das Ventil kann dann g werden durch einen an dem gleicharmigen Hebel H befestigten Stif das Ventil berührt. Wird in die Wagschale ein Gewicht p gelegt, der Stift das Ventil mit einem dem Gewichte p gleichen Drucke Höhe; ist nun dieser Druck etwas gröſser als der von oben nach u richtete Druck der Flüssigkeit auf das Ventil, so öffnet sich dasse die Flüssigkeit flieſst in das den hohlen Cylinder A umgebende G

Es bedarf nun, welches der Gefäſse Q, Q', Q'' man auch selben Gewichtes p, um das Ventil zu heben, wenn m dieselbe Flüssigkeit bis zu der in gleicher Höhe über d Marke einfüllt, und zwar ist immer das Gewicht p

cylinders vom Querschnitte der Bodenfläche und der Höhe der dem Boden.

ir schon im § 61 zeigten, müssen im Gleichgewichtszustande Flächenelement im Innern einer Flüssigkeit wirkenden Drucke in, welche Richtung auch die Normale des Flächenelementes enso wie demnach auf eine horizontale Fläche von der Gröfse s

Fig. 74.



abwärts gerichteter Druck von der Gröfse sdh wirkt, ebenso ein vertikal aufwärts gerichteter Druck von derselben Gröfse äche wirken. Es läfst sich auch dieser Druck leicht durch den hweisen. Wenn man nämlich gegen das abgeschliffene Ende einer Glasröhre ne Messingplatte mittels eines durch die urchgehenden Fadens fest anlegt und Rohr mit der Platte nach unten in ein gefülltes Glas taucht, so sieht man, dafs st an das Glas gedrückt wird, es dringt keit in die Röhre, und die Platte fällt wenn man den Faden losläfst; ein Be- n Innern der Flüssigkeit ein von unten gerichteter Druck vorhanden ist. Man Druck durch einen gleichen in ent- r Richtung angebrachten messen, indem Röhre so lange Wasser schüttet, bis die Platte herabfällt. Das nn die Flüssigkeit in der Röhre fast genau die Höhe hat, welche it im Gefäfse hat, um so genauer, je leichter die Platte ist.

Fig. 75.

Es folgt weiter, dafs auch ein Flächenelement der Seitenwand eines Gefäfses, sei sie vertikal oder geneigt, einen Druck erfahren mufs, der gleich dem Gewichte des Flüssigkeitscylinders ist, der das Flächenelement zur Basis und den vertikalen Abstand des Elementes von der freien Oberfläche zur Höhe hat. Diesem Drucke hält der durch die Festigkeit der Wand bewirkte Gegendruck das Gleichgewicht. Dafs ein solcher Seitendruck vorhanden ist, kann man leicht durch den Versuch nachweisen, indem man an der einen Seitenwand den Gegendruck durch eine Durchbohrung der Wand fortnimmt. Dann tritt nicht nur eine dem innern Drucke folgende Bewegung der Flüssigkeit ein, sondern, wenn das Gefäfs wie in Fig. 76 beweglich aufgestellt ist, tritt eine dem noch übrigen Seitendruck folgende Bewegung ein. Man stellt auf einen hinlänglich starken Schwimmer von Kork ein mit Wasser gefülltes Gefäfs, das an einer Stelle seiner Seitenwand eine verschliefsbare Öffnung hat. Ist die Öffnung geschlossen, so drückt das Wasser gegen A ebenso stark wie gegen A'. Wird nun aber die Ausflufsöffnung bei A geöffnet, so kann das Wasser an dieser Stelle dem Druck folgen und ausfliefsen; an der gegenüberliegenden Stelle bei A' dauert aber der Druck fort, und diesem Drucke folgend bewegt sich der Schwimmer mit dem Gefäfse in der Richtung AA'.

Fig. 76.

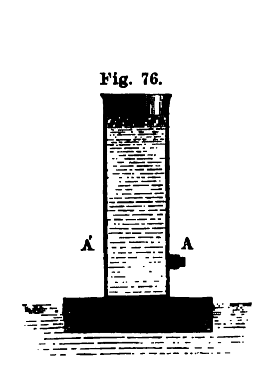
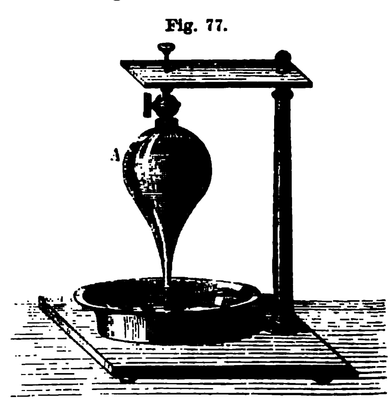


Fig. 77.



Die sogenannten Reaktionsräder beruhen auf dieser Wirkung des Seitendrucks; sie bestehen (Fig. 77) aus einer weitern mit Wasser gefüllten Röhre A, welche um eine mit ihrer Axe zusammenfallende vertikale Axe sich drehen kann. An dem untern Ende befinden sich zwei oder mehrere horizontale Ausflufsröhren, welche in demselben Sinne gekrümmt sind. Beim Ausfliefsen des Wassers aus den Öffnungen dieser Röhren treibt der gegen die den Ausflufsöffnungen gegenüberliegenden Wände gerichtete Druck das Rad herum.

Es ist nach Besprechung der einzelnen Drucke nicht schwierig, den Druck zu bestimmen, welcher auf irgend ein Flächenstück, sei es im Innern sei es an der Wand einer Flüssigkeit, ausgeübt wird; es ist das nur eine Aufgabe der Rechnung. Haben wir, um das an einem einfachen Beispiel zu zeigen, eine ebene Wandfläche von rechteckigem Querschnitt, die wir uns vertikal von der Höhe h und der Breite b denken wollen, so erhalten wir den Druck, den die ganze Wandfläche erfährt, in folgender Weise

Denken wir uns in der Tiefe x unter der Flüssigkeit einen horizontalen Streifen der Wandfläche, dessen Höhe dx eine so kleine ist, dafs wir ihn als ganz in der in der Tiefe x durch die Flüssigkeit gelegten Niveaufläche liegend ansehen können, so ist der Druck, welcher auf diesen Streifen wirkt, gleich dem Produkte des auf die Flächeneinheit der Niveaufläche wirkenden Druckes und des Flächeninhaltes des Streifens. Ersterer ist, wenn wir annehmen, dafs auf der Oberfläche der Flüssigkeit kein Druck lastet, gleich $s \cdot x$, wenn s das specifische Gewicht der Flüssigkeit ist; letzterer ist $b \cdot dx$.

Der auf den Flächenstreifen wirkende Druck ist somit

$$s \cdot b \cdot x \cdot dx.$$

Der auf die ganze Fläche wirkende Druck ist die Summe der auf alle einzelnen Streifen wirkenden, welche die ganze Fläche zusammensetzen. Wir erhalten alle diese einzelnen Drucke, wenn wir x nach und nach alle Werte annehmen lassen, von $x = 0$ bis $x = h$, so dafs der ganze Druck wird

$$P = \int_0^h sb \cdot x dx = \tfrac{1}{2} sbh^2 = \tfrac{1}{2} hfs,$$

wenn wir mit f die Gröfse der Fläche $f = b \cdot h$ bezeichnen. Der Druck ist also gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich der Fläche f ist, und deren Höhe gleich ist der halben Höhe der Flüssigkeit.

Zu ganz demselben Satze gelangt man, wenn man eine Fläche betrachtet, welche gegen die Vertikale geneigt ist; es ist immer der Druck gleich einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist der Wandfläche, und deren Höhe gleich ist der halben vertikalen Entfernung des untern Randes der Wandfläche von dem Niveau der Flüssigkeit.

Ebenso wie den resultierenden normal gegen die Wandfläche gerichteten Druck können wir auch leicht den Angriffspunkt dieser Resultierenden berechnen. Die auf die einzelnen Flächenelemente wirkenden Drucke sind sämtlich parallel, wir haben also nur den Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte aufzusuchen. Zunächst ist klar, dafs der Mittelpunkt der Kräfte in der Halbierungslinie der rechteckigen Fläche liegt, welche wir erhalten, wenn wir die Fläche durch einen vertikalen Schnitt in zwei gleiche Teile teilen. Es liege der Angriffspunkt in dieser Linie im Abstand X von der obern Grenzfläche der Flüssigkeit; bringen wir dann dort eine der Resultierenden gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft an, so ist die Fläche, dieselbe als frei beweglich gedacht, im Gleichgewicht, sie nimmt weder eine fortschreitende noch um irgend eine Axe eine drehende Bewegung an. Denken wir uns deshalb etwa durch die obere Grenze der Flüssigkeit eine in der Fläche liegende horizontale Drehungsaxe gelegt, so mufs in Bezug auf diese die Summe der Drehungsmomente gleich Null sein. Die der resultierenden gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft liefert nun das Drehungsmoment

$$-P \cdot X,$$

worin das negative Vorzeichen bedeutet, dafs das von dieser Kraft herrührende Moment die Fläche entgegengesetzt dreht als die vorhandenen Kräfte.

Der in der Tiefe x auf ein Flächenelement von der Höhe dx wirke Druck ist

$$s \cdot b \cdot x dx;$$

das von diesem herrührende Drehungsmoment ist somit

$$x \cdot s \cdot b \cdot x dx = s \cdot b \cdot x^2 dx.$$

Die Summe aller Drehungsmomente erhalten wir, wenn wir in dies Ausdrucke nach und nach für x alle Werte von 0 bis h einsetzen und d alle die für die einzelnen Elemente erhaltenen Werte summieren, also der Summme

$$\int_0^h s b x^2 dx = \tfrac{1}{3} s b h^3.$$

Somit wird die Gleichung für X

$$P \cdot X = \tfrac{1}{3} s b \cdot h^3$$

oder, wenn wir nach X auflösen und gleichzeitig für P seinen Wert setzen,

$$X = \frac{\frac{1}{3} s b h^3}{\frac{1}{2} s b h^2} = \tfrac{2}{3} h.$$

Der Angriffspunkt liegt also um $\frac{2}{3}$ der Höhe der Flüssigkeit u dem obern Niveau derselben.

In ähnlicher Weise kann man für alle Flächen, ebene oder gekrümm den resultierenden Druck und dessen Angriffspunkt berechnen, wenn a die Rechnungen zuweilen nicht so einfach sind.

§ 64.

Kommunicierende Röhren. Unsere Ausführungen über das Glei gewicht der Flüssigkeiten waren durchaus unabhängig von der Gestalt Gefäfse, in denen die Flüssigkeit enthalten ist. Sie haben daher a

Fig. 78.

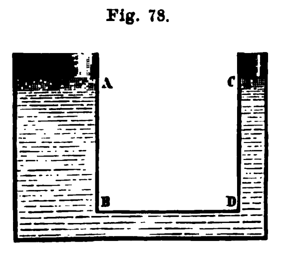
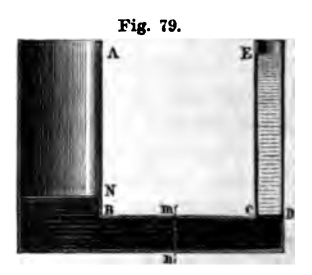


Fig. 79.



Gültigkeit, wenn wir dieselbe in zwei Gefäfse verteilen und diese Gefä so durch eine Röhre mit einander verbinden, dafs die Flüssigkeit in bei gleichsam nur eine Masse bildet. Man nennt solche Gefäfse, weil sie m in Röhrenform angewandt werden, kommunicierende Röhren. Wenn d nach in beiden Röhren AB, CD (Fig. 78) dieselbe Flüssigkeit enthal ist, so mufs, da die Gefäfse kommunicieren, die Flüssigkeiten also eine M bilden, die Oberfläche derselben horizontal oder in beiden Röhren gl

von gleicher Höhe sein, wenn nicht auf eine derselben etwa noch ein besonderer äufserer Druck ausgeübt wird.

Enthält jedoch die eine Röhre, z. B. AB, eine andere Flüssigkeit von der Dichtigkeit d', während die Flüssigkeit in der Röhre CD die Dichtigkeit d hat, so müssen die Oberflächen verschiedene Höhen haben. Sei z. B. in AB (Fig. 79) zuerst Quecksilber gegossen und dann in die Röhre CDE Wasser, so mufs das Wasser höher stehen als das Quecksilber und zwar sovielmal höher, als es specifisch leichter ist wie letzteres.

Denken wir uns eine Scheidewand in mn und in derselben ein Element, dessen Gröfse wir mit o bezeichnen wollen. Von B erhält dasselbe einen Druck, der gleich ist dem Gewichte einer Quecksilbersäule von der Basis o und der Höhe H', die gleich ist dem senkrechten Abstande der durch o gelegten Horizontalebene von der durch N gelegten Ebene, also gleich $o \cdot H' \cdot d'$, wenn wir mit d' die Dichtigkeit des Quecksilbers bezeichnen. Von der andern Seite her erhält das Flächenelement o einen Druck zunächst von einer Quecksilbersäule von der Höhe h, welche vom Niveau des Flächenstückes o bis CD reicht, und von einer Wassersäule von ebenderselben Basis und der Höhe CE. Nennen wir nun die Dichtigkeit des Wassers d und die Höhe CE, H, so ist der Druck, den das Flächenstück von dieser Seite her erfährt, gleich $ohd' + oHd$. Im Zustande des Gleichgewichtes müssen diese Drucke gleich sein, oder es mufs

$$oH'd' = ohd' + oHd,$$

oder

$$(H' - h)d' = Hd;$$

nennen wir nun die Differenz

$$H' - h = NB = H'',$$

so mufs

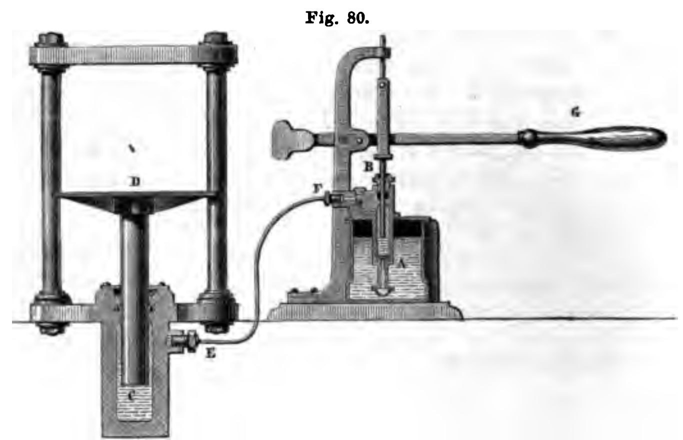
$$\frac{H}{H''} = \frac{d'}{d},$$

oder die beiden Höhen H'' und H der Flüssigkeiten über ihrer Trennungsfläche müssen sich verhalten umgekehrt wie die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten.

In Fig. 78 hält, wie wir sehen, die kleine Wassermasse in der Röhre CD der grofsen Wassermenge in AB das Gleichgewicht. Würde daher die Wassermenge AB fortgenommen und anstatt deren ein Kolben bei B auf die dann entstehende Flüssigkeitsoberfläche gelegt, so müfste dieser ein der Wassersäule AB gleiches Gewicht haben, um den in der Fläche B nach oben gerichteten Druck zu äquilibrieren. Das Gewicht dieses Kolbens zu dem Gewichte der Flüssigkeit in CD verhält sich wie die Querschnitte der Röhren, da sich so das Gewicht der Flüssigkeitssäule AB zu dem der ihr das Gleichgewicht haltenden Flüssigkeitssäule CD verhält. Wenn wir nun auf die Flüssigkeit in der engen Röhre einen Druck p ausüben, so müssen wir, wenn der Kolben in der weiten Röhre diesem Drucke das Gleichgewicht halten soll, diesen mit einem Gewichte P belasten, welches ebensovielmal gröfser ist wie p, als der Querschnitt von AB gröfser ist als der von CD.

In Bramahs hydraulischer Presse (Fig. 80) ist dieser Umstand be
um mit kleinen Kräften grofse mechanische Effekte zu erzielen. Di
besteht im wesentlichen aus einer kleinen Druckpumpe AB, durch v
man Wasser durch die Röhre EF in die weite, durch EF mit AB ko
nicierende Röhre C pumpt. In diese passt wasserdicht der Kolbe
Das in die Röhre C gepumpte Wasser hebt nun den Kolben, der
komprimierenden Gegenstände gegen einen festen Widerhalt drückt.
kann mit einem Drucke von 1 Kilogramm einem Gewichte von 100(
grammen, wenn der Querschnitt der Röhre C zu dem der Pumpenröh
im Verhältnis von 1000 : 1 steht, das Gleichgewicht halten. Dadurc
zugleich unser Satz bewiesen, den wir anfänglich ableiteten, dafs bei
äufsern Drucke auf die Flüssigkeit eines Gefäfses der Druck auf irg
Flächenstück der Wandfläche der Gröfse desselben proportional sei.

Fig. 80.



Bemerken wollen wir hier, dafs bei diesen äufserst grofsen Wirl
mit kleinen Kräften doch auch nur eine Übertragung der Arbeit, ke
winnst an solcher eintritt; denn auch hier gilt der Satz wieder, v
Kraft gewonnen wird, geht an Zeit verloren. Denn soll der Kolben
ein Centimeter gehoben werden, so ist eine tausendmal gröfsere Bew
des Kolbens der Pumpe nötig, da aus dem engen Pumpenrohr die W
menge in das weite Rohr geschafft werden mufs. Auch hier beste
Gleichung, dafs das Produkt der Kraft in den Weg, durch welchen s
wirkt hat, gleich ist dem Produkte der Last in den Weg, um welcl
gehoben ist.

Das Princip der hydraulischen Presse ist in sehr sinnreicher
von Desgoffe angewandt, um grofse Drucke, etwa die in der hydrau
Presse direkt zu messen; das Manometer ist gewissermafsen die U
der hydraulischen Presse. Dasselbe besteht, wie Fig. 81 in perspekti
Ansicht, Fig. 82 im Durchschnitt des untern Teiles zeigt, aus einem s
eisernen Gefäfse V von kreisförmigem Querschnitt, in welchem ein I
stempel D sich auf und nieder bewegen kann. Das Gefäfs enthält (
silber und auf demselben eine dünne Wasserschicht. Zwischen der W
schicht und dem Stempel ist eine feine Kautschukmembran ausge
welche durch den aufgeschraubten Kreisring festgehalten wird, d

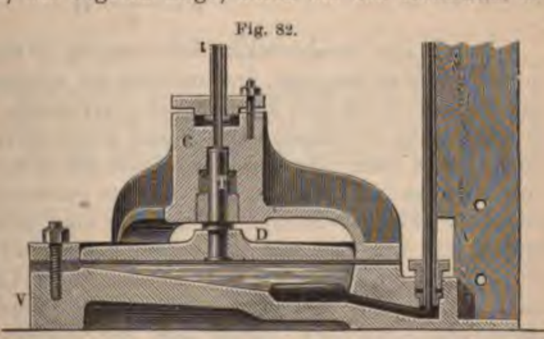
Hülfe der Schrauben so fest angezogen ist, daſs die Membran das Gefäſs V nach oben hin vollkommen wasserdicht absperrt. Auf der Mitte des Stempels D steht ein Stahlcylinder T, welcher durch eine Stopfbüchse in den

Fig. 81.



Hohlraum des Messingcylinders C eintritt, der mit dem die Kautschukmembran befestigenden, auf das Gefäſs aufgeschraubten Ringe aus einem Stücke gearbeitet ist. Der Hohlraum des Cylinders C steht andererseits durch die Röhre t, welche, wie Fig. 82 zeigt, durch die den Hohlraum des Cylinders C oben abschlieſsende Platte hindurchgeführt ist, mit dem Raume in Verbindung, in welchem der Druck ausgeübt wird, also etwa mit dem Hohlraum C der hydraulischen Presse Fig. 80; man gibt zu dem Ende, wenn man den Druck in der hydraulischen

Fig. 82.



Presse messen will, der Wand derselben eine zweite Durchbohrung, an der man das Ende der Röhre t gerade so ansetzt, wie bei E die zur Pumpe führende Röhre angesetzt ist. Das Gefäſs V kommuniciert mit seinem untern Teile mit der seitlich angebrachten Glasröhre AB, welche vor einer Teilung an dem an dem Gefäſse V befestigten vertikalen Ständer fest angebracht ist.

keiten vorausgesetzt, dafs nur die Schwere auf dieselben einwirke; die im § 61 durchgeführten Betrachtungen lassen sich aber auch sofort anwenden, um die Bedingungen des Gleichgewichts zu erhalten, wenn noch andere Kräfte auf die Flüssigkeiten einwirken, wenn z. B. die Flüssigkeit sich in einem rotierenden Cylinder befindet, dessen Rotationsaxe die Axe des Cylinders ist. Wir denken uns, um die an den verschiedenen Stellen der Flüssigkeit wirksamen Drucke zu berechnen, gerade wie § 61 einen kleinen Cylinder mit schiefen Endflächen s und s' von so kleinem Querschnitte σ und so kleiner Länge l, dafs wir überall in diesem Cylinder die auf die Volumeinheit wirkenden Kräfte als gleich und gleich gerichtet ansehen können. Nennen wir die auf die Volumeinheit wirkenden Kräfte k, so treten diese jetzt ganz einfach an die Stelle des Gewichtes d der Volumeinheit, welches wir § 61 als allein wirksam voraussetzen. Ganz dieselben Betrachtungen, welche wir § 61 anstellten, liefern uns dann für den Druck p' auf der Fläche s' des Cylinders

$$\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s} + k \cdot l \cdot \cos\beta,$$

wenn β den Winkel bedeutet, welcher die Axe unseres Cylinders mit der Richtung der resultierenden Kraft, und p den Druck auf die schiefe Endfläche s bedeutet.

Die Bedingung der Niveauflächen ist auch jetzt wieder, dafs in ihnen überall der Druck für die Flächeneinheit derselbe sein mufs; somit mufs, wenn die beiden Endflächen des kleinen Cylinders ein und derselben Niveaufläche angehören sollen,

$$\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s}$$

sein, eine Bedingung, welche erfüllt wird, wenn

$$k \cdot l \cdot \cos\beta = 0.$$

Letztere Bedingung wird aber, da k und l von 0 verschieden sind, nur erfüllt, wenn

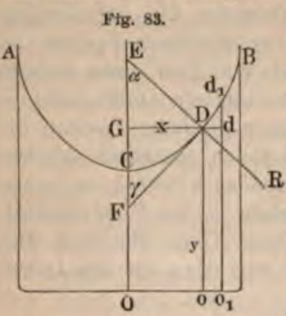
$$\cos\beta = 0, \qquad \beta = 90^0.$$

Ist also die Axe unseres kleinen Cylinders senkrecht zur Richtung der resultierenden Kräfte, so liegt derselbe ganz in einer Niveaufläche, oder die Niveauflächen sind solche, welche an allen Stellen normal zu den resultierenden Kräften sind.

Können wir die Richtung der resultierenden Kräfte bestimmen, so können wir hieraus die Gleichung der Niveauflächen ableiten; wir wollen diese Ableitung für den vorhin schon erwähnten Fall einer Flüssigkeit in einem rotierenden Cylinder durchführen. Die Kräfte, welche dort auf die Flüssigkeit einwirken, sind die Schwere und die Centrifugalkraft; da letztere nur abhängig ist von dem Abstand der betrachteten Flüssigkeitsmasse von der Rotationsaxe und in gleichen Abständen von der Axe dieselbe ist, so folgt, dafs die Niveauflächen Rotationsflächen sind, deren Axe die Rotationsaxe des Cylinders ist. Wir erhalten demnach die Flächen schon vollständig bestimmt, wenn wir einen Schnitt derselben, der durch die Rotationsaxe

gelegt ist, untersuchen. Sei ACB Fig. 83 ein solcher Schnitt und zwar, da wir wissen, daſs die Oberfläche eine Niveaufläche ist, durch die Oberfläche der Flüssigkeit, und OC die Rotationsaxe. Sei ferner DR die Richtung der aus der Wirkung der Schwere und der Centrifugalkraft im Punkte D resultierenden Kraft, welche mit der Vertikalen den Winkel α bilde. An dem Punkte D des Schnittes der Niveaufläche legen wir dann eine Tangente DF, welche bekanntlich in dem Punkte D die Richtung der Kurve angibt; dieselbe schneide die Vertikale unter dem Winkel γ. Da FD senkrecht zu ED sein muſs, so folgt weiter, daſs die Winkel γ und α sich zu einem Rechten ergänzen müssen, oder daſs

Fig. 83.



$$\text{tang } \alpha = \cot \gamma$$

sein muſs.

Wir beziehen nun unsere Kurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Axe der X horizontal, und dessen Axe der Y vertikal sei und mit der Rotationsaxe zusammenfalle. Der Anfangspunkt der Koordinaten sei der Punkt O, in welchem die Rotationsaxe den Boden des Cylinders schneidet. Die Koordinaten des Punktes D seien x und y. Da die Tangente DF mit der Kurve auf ein unendlich kleines Stück zusammenfällt, so verbindet sie zwei unendlich nahe Punkte D und d_1 der Kurve, deren letzterer die Koordinaten $x + dx$ und $y + dy$ hat. Ziehen wir deshalb die dem Punkte d_1 entsprechende Ordinate $d_1 o_1$ und verlängern die x Koordinate GD, bis sie erstere in d schneidet, so erhalten wir das rechtwinklige Dreieck Ddd_1, dessen Winkel $Dd_1d = \gamma$ ist. Demnach ist

$$\text{tang } \alpha = \cot \gamma = \frac{dd_1}{Dd} = \frac{dy}{dx}.$$

Um den Winkel α zu erhalten, sei p das Gewicht, somit $\frac{p}{g}$ die Masse der im Punkte D vorhandenen Flüssigkeit. Auf diese Masse wirkt dann gleichzeitig die Centrifugalkraft, welche, wenn wir die Rotationsgeschwindigkeit mit v bezeichnen, gleich $\frac{v^2 p}{xg}$ ist. Bezeichnen wir die Rotationsdauer des Cylinders mit t, so ist

$$v = \frac{2\pi x}{t},$$

demnach die Centrifugalkraft

$$\frac{4\pi^2}{t^2} x \frac{p}{g}.$$

Da die Schwere vertikal abwärts, die Centrifugalkraft horizontal von der Drehungsaxe fort wirkt, so erhalten wir die Tangente des Winkels, welchen die Resultierende mit der Vertikalen bildet, wenn wir die Centrifugalkraft, die horizontale Komponente der Resultierenden durch die Schwere, also das Gewicht p der Flüssigkeit dividieren. Damit wird

$$\text{tang } \alpha = \frac{4\pi^2}{gt^2} \cdot x.$$

Zur Bestimmung der Niveaufläche erhalten wir somit die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot x.$$

Die Gleichung liefert uns also direkt den Quotienten aus den beiden
nahmen der Koordinaten, wenn wir von einem Punkte der Kurve zum
chstfolgenden übergehen, oder den Zuwachs

$$dy = \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot x \cdot dx,$$

chen die Ordinate y erfährt, wenn die Abscisse x um dx zunimmt.
ch der in der mathematischen Einleitung dargelegten Bedeutung des
egrals und mit Beachtung von E 1 wird daraus

$$y = \tfrac{1}{2} \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot x^2 + \text{const.}$$

Der Wert der Konstanten ergibt sich, wenn wir x gleich Null setzen,
st jener Wert von y, in welchem die Kurve die Rotationsaxe schneidet,
ist das der tiefste Punkt der Flüssigkeitsoberfläche. Nennen wir die
he der Flüssigkeit dort h, so erhalten wir

$$y = \frac{2\pi^2}{g t^2} \cdot x^2 + h.$$

Diese Gleichung ist die bekannte Gleichung einer Parabel, deren Axe
Rotationsaxe des Cylinders ist. Es folgt somit, dafs die Oberfläche
er rotierenden Flüssigkeit ein Rotationsparaboloid ist, dessen Rotations-
die Rotationsaxe des Cylinders ist. Die Flüssigkeit steht am höchsten
t, wo x seinen gröfsten Wert hat, also an der Wand des Gefäfses; die
he H ist dort, wenn wir mit r den Radius des Gefäfses bezeichnen,

$$H = \frac{2\pi^2}{g t^2} \cdot r^2 + h,$$

$$H - h = \frac{2\pi^2}{g t^2} \cdot r^2.$$

Die Erhebung der Flüssigkeit an der Wand über dem tiefsten Punkt
also um so gröfser, je kleiner die Umlaufszeit t ist, je gröfser somit
Rotationsgeschwindigkeit ist, eine Folgerung, die man leicht mit der
ntrifugalmaschine bestätigen kann.

Da die Niveauflächen einander parallele Flächen sind, so folgt, dafs
ch im Innern der Flüssigkeiten dieselben Paraboloide sind, welche der
erfläche parallel sind; der auf den verschiedenen Niveauflächen wirkende
uck nimmt zu, je tiefer dieselben unter der Oberfläche liegen. Da auf
ler Niveaufläche der Druck an allen Stellen derselbe ist, so haben wir,
ı ihn zu bestimmen, nur den Druck aufzusuchen, welchen dieselben dort
alten, wo die Niveauflächen die Rotationsaxe schneiden; man erkennt
m, dafs der Druck dort gleich ist dem Gewichte der Flüssigkeitssäule,
ren Höhe gleich ist dem Abstande der betrachteten Niveaufläche von der
erfläche der Flüssigkeit.

§ 66.

Archimedisches Princip. Wenn ein Körper in eine Flüssigkei
taucht wird, so wird die Oberfläche desselben von der Flüssigkeit ri
umher einen Druck erfahren, welcher an allen Punkten senkrecht g
jedes Element der Oberfläche gerichtet ist, und dessen Gröfse gleich ist
Gewichte der Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist dem Elem
der Oberfläche des Körpers, und deren Höhe gleich ist der Höhe der Flü
keit über diesem Elemente. Wenn wir nun diese rings auf alle Punkte
Körperoberfläche senkrecht wirkenden Druckkräfte in zwei auf eina
senkrechte Komponenten zerlegen, eine horizontale und eine vertikale
ist klar, dafs erstere als von Flüssigkeitsschichten herrührend, welche gl
tief unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, an den entgegengeset
Seiten des Körpers paarweise gleich und entgegengesetzt sind; sie we
daher den Körper nur mehr oder weniger zusammendrücken. Anders je
mit den vertikalen Komponenten, auch diese werden zwar auf den nach
den Körper begrenzenden Elementen der Oberfläche vertikal nach u
auf den untern nach oben, also gerade entgegengesetzt gerichtet sein;
sie sind sich nicht gleich, weil die obern Elemente den Druck einer we
hohen Flüssigkeitssäule erfahren als die unteren. Mit der Differenz d
Drucke wird deshalb der Körper in der Flüssigkeit nach oben getrieben wer

Um die Gröfse dieser Differenz zu erhalten, denken wir uns den Kö
durch eine Schar sehr naher vertikaler Ebenen in eine Reihe sehr schm
Scheiben zerlegt, und diese nochmals durch eine Schar paralleler, e
falls vertikaler, aber zu den erstern senkrechter Ebenen zerschnitten.
durch haben wir den ganzen Körper in ein Aggregat elementarer Pris
zerlegt, deren Endflächen ebenfalls sehr kleine Flächenstücke sind, die
überdies als einander gleich betrachten können. Der Druck nun, den
obere Endfläche dieses Prismas vertikal abwärts erfährt, ist gleich
Drucke eines Flüssigkeitsprismas, dessen Basis gleich ist einem Fläc
element, und dessen Höhe der senkrechte Abstand desselben von der O
fläche der Flüssigkeit ist. Auf die untere Endfläche wirkt ein nach
gerichteter Druck, dessen Gröfse gleich ist dem Gewichte einer Flüssigk
säule mit einer der Gröfse des Elementes gleichen Basis, und mit e
Höhe gleich dem senkrechten Abstande dieses Elementes von der O
fläche. Die Differenz beider Drucke ist also das Gewicht eines Flüssigk
prismas mit einer jenen beiden gleichen Grundfläche und einer der Diffe
jener beiden Abstände gleichen Höhe oder, was dasselbe ist, das Gew
eines jenem betrachteten Prisma an Gröfse gleichen Prismas. Es wird
ein solches Prisma mit einem Drucke aufwärts getrieben, welcher dem
wichte einer ihm an Gröfse gleichen Flüssigkeitsmenge gleich ist. Was
dem einzelnen Prisma gilt, gilt in gleicher Weise auch von allen zusam
wir gelangen daher zu dem Resultate, dafs jeder in eine Flüssigkeit
tauchte Körper einen von unten nach oben gerichteten Druck, einen
trieb, erfährt, der dem Gewichte einer ihm an Volumen gleichen Flü
keitsmenge gleich ist.

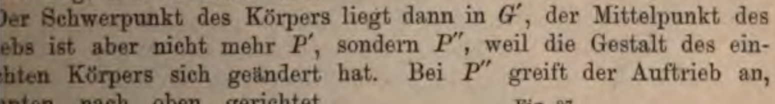
Man spricht diesen Satz auch wohl so aus: Jeder in eine Flüssi
getauchte Körper verliert ein Gewicht, welches gleich ist dem Gewicht
aus der Stelle gedrängten Flüssigkeit.

r, weil $cd > c'd'$ wird, herabfallen und so erst nach einigen Oscilla- zur Ruhe kommen. Körper, welche leichter sind als die Flüssigkeit, lche sie eingetaucht sind, sind also im Gleichgewicht, wenn sie zum nd zwar so weit eingetaucht sind, dafs das aus der Stelle gedrängte r ihrem Gewichte gleich ist.

Die Körper können dann zwar keine fortschreitende, wohl aber noch lrehende Bewegung machen. Soll auch diese nicht stattfinden, so n die beiden auf den Körper einwirkenden Kräfte sich auch gerade engesetzt sein. Das Gewicht des Körpers greift an seinem Schwer- e an, der Auftrieb am Schwerpunkte des aus der Stelle gedrängten rs. Es müssen demnach diese beiden Punkte in einer Vertikalebene , wenn der Körper im Gleichgewicht sein soll. Eine schwimmende ene Kugel ist demnach in jeder Lage im Gleichgewicht, ein Ellipsoid, eine seiner Axen vertikal ist, ein Parallelepiped, wenn seine Kanten al sind.

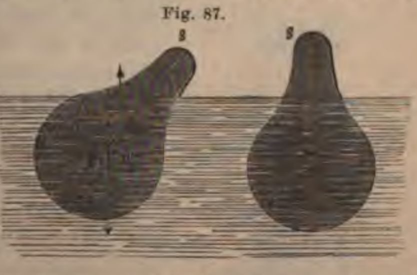
Unter diesen Bedingungen braucht aber das Gleichgewicht noch kein s zu sein; damit das der Fall ist, d. h. damit der Körper bei kleinen derungen seiner Lage immer wieder in seine frühere Stellung zurück- , dazu mufs noch eine dritte Bedingung erfüllt sein. Es mufs nämlich etacentrum des schwimmen- rpers über dem Schwerpunkte , indem dann die auf den mmenden Körper wirkenden immer, bei Schwankungen, ben in seine frühere Lage drehen. Um die Bedeutung Punktes zu erkennen, sei in 6 der schwimmende Körper seiner Lage gebracht, so dafs here Vertikale PG, welche den Schwerpunkt des Körpers und den Mittelpunkt des Auftriebs P die Lage $P'G'$ erhalten habe.

Fig. 86.



Der Schwerpunkt des Körpers liegt dann in G', der Mittelpunkt des ebs ist aber nicht mehr P', sondern P'', weil die Gestalt des ein- hten Körpers sich geändert hat. Bei P'' greift der Auftrieb an, nten nach oben gerichtet, die Schwere, von oben nach Beide Kräfte suchen also Körper eine Drehung zu geben, e ihn von seiner frühern Lage nt; er kehrt also nicht dahin , er war im labilen Gleich- t. Die Vertikallinie, die wir P'' legen, schneidet die Linie welche durch die beiden Schwer- e in der ersten Lage ging, in dem unterhalb G' liegenden Punkte M. Punkt heifst das Metacentrum. Wäre dagegen die Lage des Körpers Fig. 87, und liegt nach der Drehung der Mittelpunkt des Auftriebs so ist das Metacentrum M über dem Schwerpunkte G, beide Kräfte

Fig. 87.



bringen an dem Körper eine Drehung hervor, welche ihn seiner fr Lage nähert; der Körper schwimmt im stabilen Gleichgewicht. Die P'' gelegte Vertikale schneidet die Linie $G'P'$ um so leichter oberha das Metacentrum liegt um so eher über dem Schwerpunkt, je tiefer liegt. Es ist daher für einen Körper, der im stabilen Gleichg schwimmen soll, z. B. Schiffe, das Beste, wenn ihr Schwerpunkt mög tief liegt.

§ 68.

Bestimmung des specifischen Gewichtes fester Körper. sahen in § 66, dafs, wenn die Dichtigkeit d des eingetauchten K gröfser ist als die Dichtigkeit d' der Flüssigkeit, der Körper dann sinkt, dafs er aber soviel an Gewicht verliert, als die Flüssigkeit welche er aus der Stelle drängt. Wir haben nun in § 23 das spec Gewicht eines Körpers dahin definiert, dafs es das Gewicht der Volume sei, wobei als Einheit das Gewicht der Volumeinheit Wasser zu Grun legt wird. Nennen wir das Volumen eines Körpers V, sein speci Gewicht s, so ist sein Gewicht $P = V \cdot s$. Das Gewicht eines gl Volumens Wasser ist dann in der obigen Einheit ausgedrückt V, demnach

$$\frac{P}{V} = \frac{V \cdot s}{V} = s.$$

Kennen wir demnach das Gewicht eines Körpers und das Gewich gleichen Volumens Wasser, so ist der Quotient beider $\frac{P}{V}$ das spec Gewicht des Körpers. Da ein in Wasser untergetauchter Körper soviel an Gewicht verliert, als das Volumen Wasser wiegt, welches der Stelle drängt, so haben wir hier ein v liches Mittel, um das Gewicht eines dem l gleichen Volumens Wasser zu bestimmen und sein specifisches Gewicht zu erhalten.

Fig. 88.



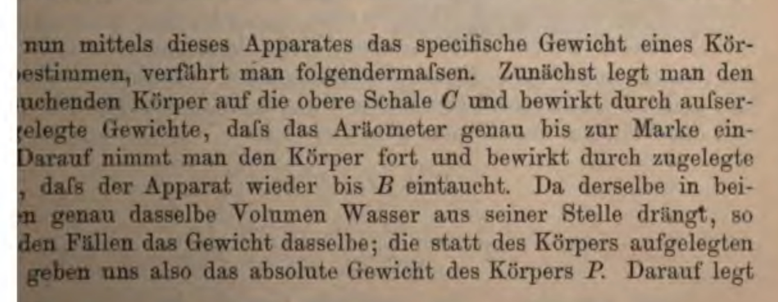
Das einfachste Verfahren, um das spec Gewicht fester Körper zu bestimmen, ist di wendung der hydrostatischen Wage, welch von der gewöhnlichen Wage nur darin untersc dafs die eine Wagschale nicht so tief heral und in der Mitte ihrer untern Fläche mit Häkchen versehen ist. Man hängt an dasselbe (Fi mittels eines sehr feinen Drahtes den zu unters den Körper, bestimmt sein Gewicht in der Luft ihn dann in ein mit Wasser gefülltes Gefäfs und bestimmt sein Gewicht neuerdings. De wichtsverlust ist genau das Gewicht eines den per gleichen Wasservolumens, der Quotient das specifische Gewicht des Körpers.

Es sind hierbei jedoch einige Vorsicht regeln zu beachten. Zunächst haben wir sch merkt, dafs der Draht möglichst fein sein mufs, da sonst auch d diesem aus der Stelle gedrängte Wasser auf den Gewichtsverlust von

influsse ist, wir also nicht das Gewicht einer dem Körper allein an gleichen Wassermenge erhalten.

ier ist notwendig, dafs man reines destilliertes Wasser anwende, dieses die Temperatur 4^0C. habe. Wir werden später sehen, dafs ier bei dieser Temperatur seine gröfste Dichtigkeit besitzt, und cht der Volumeinheit Wasser bei dieser Temperatur die gewählte einheit ist. Hat das Wasser eine andere Temperatur, so bedarf es rrektur, welche aus der gemessenen Ausdehnung des Wassers bererden kann. Einer ähnlichen Korrektur bedarf es wegen der ur der Körper, da auch diese beim Erwärmen lehnen. Man ist nun überein gekommen, das verschiedene Temperaturen verschiedene speciwicht der Körper stets auf die Temperatur des iden Eises, auf 0^0 zu reducieren. In der Lehre Ausdehnung durch die Wärme werden wir die nnen lernen, diese Reduktionen vorzunehmen[1]).

Fig. 89.



zweite auf demselben Princip beruhende Me-Bestimmung des specifischen Gewichtes ist die ng des Nicholsonschen Aräometers. Dasselbe us einem hohlen unten und oben konisch zuge-'ylinder von Messingblech *A* (Fig. 89). Von der s obern Kegels steigt als Verlängerung der Axe ders ein feines Stäbchen *B* auf, an dessen oberm Schale *C* angebracht ist, auf welche man, wie Wagschale, den zu untersuchenden Körper und legen kann. An dem Stäbchen ist durch einen eine feine Marke bei *B* angebracht.

der Spitze des untern Kegels hängt, mittels elförmigen Drahtes daran befestigt, ein Gewicht das nach oben hin eine horizontale Fläche hat, e man den zu untersuchenden Körper legen kann. das Gewicht *D* der Schwerpunkt des Apparates möglichst tief schwimmt derselbe aufrecht und zwar im stabilen Gleichgewicht. icht des Apparates ist so bestimmt, dafs ein Teil desselben, wenn sser getaucht wird, aus dem Wasser hervorragt, und dafs er nur ıflegung von Gewichten auf die Schale *C* bis zu der Marke *B*

nun mittels dieses Apparates das specifische Gewicht eines Körestimmen, verfährt man folgendermafsen. Zunächst legt man den uchenden Körper auf die obere Schale *C* und bewirkt durch aufserelegte Gewichte, dafs das Aräometer genau bis zur Marke ein-Darauf nimmt man den Körper fort und bewirkt durch zugelegte , dafs der Apparat wieder bis *B* eintaucht. Da derselbe in bein genau dasselbe Volumen Wasser aus seiner Stelle drängt, so den Fällen das Gewicht dasselbe; die statt des Körpers aufgelegten geben uns also das absolute Gewicht des Körpers *P*. Darauf legt

[1]) an sehe im III. Band § 9 und § 17.

man dann den Körper in die untere Schale D und nimmt die vorhin gelegten Gewichte wieder fort. Da jetzt der Körper aber in Wasser tau so verliert er an Gewicht, und deshalb sinkt der Apparat nicht wieder B ein. Um das zu bewirken, müssen wir ein Gewicht P' auf die o Schale legen, welches uns den Gewichtsverlust des Körpers im Wasser, das Gewicht einer ihm an Volumen gleichen Wassermenge gibt. Der tient $\frac{P}{P'}$ gibt uns also nach dem Vorigen das specifische Gewicht Körpers.

Dafs wir hier dieselben Korrektionen anbringen müssen wie bei vorigen Verfahren, ist klar; aber selbst dann ist es äufserst schwierig genau richtiges Resultat zu erhalten, besonders weil es wegen der Wir der demnächst zu betrachtenden Kapillarität schwer ist zu bestimmen, der Apparat genau bis zur Marke B eintaucht. Um genaue Resultat erhalten, ist daher die vorige Methode vorzuziehen.

Die beiden bisherigen Methoden beruhen auf der Erfahrung, daf eingetauchter Körper im Wasser an Gewicht verliert. Man kann als Methode noch die Umkehr der ersten hinzufügen, den Satz benutzend, das Gewicht des mit Wasser gefüllten Gefäfses durch das Eintauchen Körpers gerade soviel an Gewicht zunimmt, als der Körper verliert.

Man wiegt ein Gefäfs mit Wasser ab und bestimmt dann die Gewi zunahme, welche es erhält, wenn der neben der Wage aufgehängte K von bekanntem Gewichte in das Wasser hinabgesenkt wird. Der Quo des bekannten Gewichtes des Körpers und dieser Gewichtszunahme ist das gesuchte specifische Gewicht des Körpers. Dieses Verfahren ist b ders bei der Untersuchung grofser und schwerer Körper anzuwenden, i es keine besondern, an grofsen Wagen schwer anzubringenden Vorrichtu erfordert.

Alle diese Methoden können jedoch nur benutzt werden, wenn es darum handelt, das specifische Gewicht von Körpern zu bestimmen, w nicht porös, nicht in Wasser löslich und schwerer als Wasser sind. die Körper porös, so mufs man sie mit einem sehr feinen Lack überstrei so dafs sowohl das Gewicht als auch das Volumen der Körper mögl wenig geändert wird, und da man dadurch das Eindringen des Wasse den Körper gehindert hat, verfahren wie vorhin; sind die Körper in W löslich oder leichter als Wasser, so wendet man statt des Wassers Flt keiten an, in denen sich der Körper nicht löst, oder die ein geringeres fisches Gewicht haben. Das Verfahren bleibt dann ungeändert dasselb das Gewicht des Körpers P, sein Gewichtsverlust in der betreffenden Fl keit gleich P'', sein specifisches Gewicht gleich s, das der Flüssigkeit gle und das Volumen des Körpers gleich v, so ist

$$P = vs, \quad P'' = vs'',$$

$$\frac{P}{P''} = \frac{s}{s''}, \quad s = s'' \cdot \frac{P}{P''}.$$

Kennt man also s'', das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so sich s berechnen.

d die zu untersuchenden Körper pulverförmig, so lassen sich die benen Methoden zur Bestimmung ihres specifischen Gewichtes nicht n; in einem solchen Falle verfährt man am besten so, daſs man ie von einer gewogenen Quantität des Pulvers aus einem Gefäſs te Menge Wassers, oder im Falle das Pulver in Wasser löslich hter als Wasser ist, einer andern Flüssigkeit bestimmt. Man bezu sogenannte Pyknometer, wie Fig. 90 ein solches darstellt. Es ine Fläschchen, welche einen weiten Hals haben, in welchen stöpsel eingeschliffen ist, so nn er eingesetzt ist, ein ganz ter immer gleicher Raum im bgeschlossen ist. Da man, wie rwähnt, bei diesen Versuchen ie Temperatur der Flüssigkeit nuſs, so wendet man als Glaswie Fig. 90 zeigt, sehr bequem mometer an. An dem Gefäſs r eine kapillare Röhre c an-, welche oben ausgeweitet ist ebenfalls mit einem eingeriebasstöpsel verschlossen werden n der kapillaren Röhre ist bei Iarke.

Fig. 90.



n füllt das Gefäſs zunächst mit schlieſst es, während das ka-Rohr offen ist, durch Einsetzen psels bei h und tupft dann, man es auf konstanter Temhält, das Wasser bis zur Marke n schlieſst die kapillare Röhre gt das Gefäſs ab. Es habe das P. Darauf öffnet man das und schüttet eine gewogene t p des zu untersuchenden hinein. Man schlieſst wieder, s Wasser bis m ab und wiegt Man findet jetzt das Gewicht P'. richt P' ist dann gleich dem fundenen Gewicht P, vermehrt um das Gewicht p des eingeschütteten aber vermindert um das Gewicht π des von dem Pulver ver-Wassers, oder

$$P' = P + p - \pi,$$

$$\pi = P + p - P'.$$

ist das specifische Gewicht des Pulvers

$$s = \frac{p}{\pi} = \frac{p}{P + p - P'}.$$

Bei diesem Verfahren mufs man dafür sorgen, dafs das Pulver keine Luft eingeschlossen hält; am besten ist es, dafs man vor dem letzten Wägen das Wasser bis nahe zum Sieden erhitzt und dann erst, nach eingetretener Abkühlung, schliefst und nach dem Abtupfen wägt.

§ 69.

Bestimmung des specifischen Gewichtes der Flüssigkeiten. Zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten kann man ebenfalls eine Reihe von Methoden anwenden, von denen mehrere auf der Bestimmung des Gewichtsverlustes eingetauchter Körper beruhen, andere nicht.

Von letzteren machen wir zwei namhaft. Die genaueste ist die, dafs man die im vorigen Paragraphen beschriebenen Pyknometer bis zur Marke einmal mit Wasser füllt, abwiegt und durch Abziehen des vorher bestimmten Gewichtes des Gläschens das Gewicht des im Gefäfse enthaltenen Wassers bestimmt. Darauf füllt man dasselbe Gefäfs wieder bis zur Marke mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und bestimmt auf gleiche Weise das Gewicht derselben. Man hat auf diese Weise direkt das Gewicht gleicher Volumina Wasser und der zu untersuchenden Flüssigkeit, der Quotient beider gibt das specifische Gewicht der Flüssigkeit.

Eine zweite Methode beruht auf dem Satze, dafs in zwei kommunicierenden Röhren die Höhen verschiedener Flüssigkeiten sich umgekehrt wie ihre specifischen Gewichte verhalten. Vor einem Mafsstabe (Fig. 91) sind zwei Glasröhren befestigt, welche vertikal herabsteigen und unten so umgebogen sind, dafs zwei kürzere aufsteigende Arme entstehen, welche bei A so vereinigt sind, dafs die beiden Röhren gleichsam nur eine mehrfach gekrümmte Röhre bilden. Man giefst nun in die eine Wasser und zugleich in die andere die zu untersuchende Flüssigkeit. Auf diese Art erhält man zwei durch eine Luftschicht getrennte Flüssigkeitssäulen. Wenn man nun die Flüssigkeitsmengen so reguliert, dafs das Niveau derselben in den umgebogenen Röhrenschenkeln gleich hoch und das des Nullpunktes der Teilung ist, so sind die Höhen der Flüssigkeiten in den senkrechten Röhren ihrem specifischen Gewichte umgekehrt proportional. Ist die Höhe der Wassersäule h, die der Flüssigkeit gleich h', die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich d', die des Wassers gleich 1, so ist

$$h : h' = d' : 1,$$

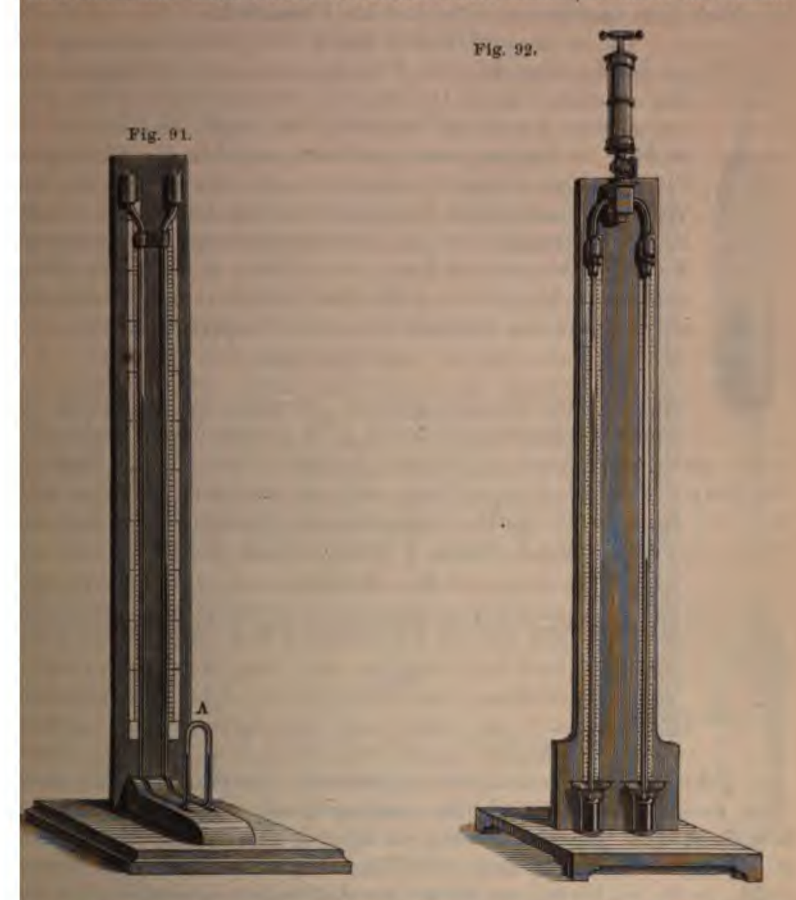
$$d' = \frac{h}{h'}.$$

Eine etwas andere Anordnung des Apparates zeigt Fig. 92. Die vertikalen Röhren tauchen unten in zwei abgesonderte Gefäfse, welche mit den zu vergleichenden Flüssigkeiten gefüllt sind. Oben kommunicieren sie mittels eines gebogenen Rohres mit einander und durch einen verschliefsbaren Hahn mit einer kleinen Luftpumpe. Pumpt man bei geöffnetem Hahn durch Heraufziehen des Kolbens etwas Luft aus, so steigen die Flüssigkeiten durch den äufsern Luftdruck zu Höhen, welche ihren specifischen Gewichten umgekehrt proportional sind. Schliefst man also den Hahn oben und mifst die Höhen, so erhält man daraus gerade wie vorhin das specifische Gewicht der einen Flüssigkeit, wenn das der andern bekannt ist.

)ie andern Methoden zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssig- beruhen auf dem Gewichtsverlust eingetauchter Körper. Die ein- e und genaueste dieser Methoden ist die, dafs man einen passend ge- n Körper, etwa ein kleines Glasröhrchen, welches unten und oben hmolzen ist, nachdem man etwas Quecksilber hineingebracht hat, an sehr feinen Drahte, wie in Fig. 93, befestigt. Man wiegt denselben und bestimmt dann seinen Gewichtsverlust einmal, wenn er in Wasser

Fig. 92.

Fig. 91.



cht ist, und dann, wenn er sich in der zu untersuchenden Flüssigkeit et. Diese Gewichtsverluste geben dann die Gewichte von Flüssigkeits- n, deren Volumen gleich ist dem des eingetauchten Körpers, die nten der Gewichtsverluste also das specifische Gewicht der zu unter- den Flüssigkeit.

Auch das Nicholsonsche Aräometer kann man, wie leicht ersichtlich 1 dem Zwecke anwenden. Man bestimmt zunächst das Gewicht des ates; dasselbe sei A; man taucht es dann in Wasser, und damit es r Marke einsinke, sei ein Gewicht p erforderlich. Da das Aräometer umt, so ist das Gewicht des dem eingetauchten Teile an Volumen

gleichen Wassers gleich $A + p$. Darauf taucht man es in die zu untersuchende Flüssigkeit, und ist p' das jetzt aufzulegende Gewicht, damit es bis zur Marke einsinkt, so ist $A + p'$ das Gewicht einer der vorigen Wassermenge an Volumen gleichen Flüssigkeitsmenge. Der Quotient beider oder

$$\frac{A + p'}{A + p} = s$$

ist gleich dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit.

Fig. 93.

Da es im praktischen Leben sehr häufig notwendig ist, das specifische Gewicht von Flüssigkeiten zu bestimmen, ohne daſs eine möglichst groſse Genauigkeit erfordert wird, so hat man noch ein anderes Verfahren ersonnen, um leicht und schnell das Geforderte zu leisten; man bestimmt nämlich die Dichtigkeit von Flüssigkeiten mittels Aräometer von veränderlichem Volumen. Während man mittels des Nicholsonschen Aräometers die Dichtigkeit der Flüssigkeiten aus den verschiedenen Gewichten gleicher Volumen ableitet und dann, wenn P das Gewicht der Flüssigkeit von der Dichtigkeit D, p das der Flüssigkeit von der Dichtigkeit d ist, die gesuchte Dichtigkeit aus der Proportion erhält,

$$D : d = P : p,$$

verfährt man bei den jetzt zu betrachtenden Apparaten so, daſs man ein konstantes Gewicht P in verschiedene Flüssigkeiten eintaucht und das Volumen beobachtet, welches dieses aus der Stelle drängt. Der Körper sinkt stets so tief ein, daſs die verdrängte Flüssigkeit seinem Gewichte P gleich ist. Sinkt er nun in die Flüssigkeit von der Dichtigkeit D so tief ein, daſs er ein Volumen V aus der Stelle drängt, so ist

$$P = V \cdot D.$$

Drängt er in einer andern Flüssigkeit das Volumen v aus der Stelle, so ist

$$P = v \cdot d$$

und daher

$$v \cdot d = V \cdot D; \quad d : D = V : v.$$

Nehmen wir also z. B. eine cylindrische Glasröhre, welche unten und oben, nachdem etwas Quecksilber hineingebracht, zugeschmolzen ist, um zu bewirken, daſs sie stets aufrecht schwimmt, und daſs sie bis zu einem bestimmten, etwa in der Mitte der Röhre liegenden Punkte in Wasser einsinkt, so ist es leicht, aus dieser ein Aräometer zu machen, bei welchem eine einfache Ablesung genügt, um die Dichtigkeit der Flüssigkeit, in die es getaucht ist, zu erhalten. Man bezeichnet die Stelle, bis zu welcher die Röhre (Fig. 94) in Wasser einsinkt, durch eine Marke, setzt daneben die Zahl 100 und teilt nun die Länge der Röhre von diesem Teilstriche aus nach unten hin in 100 gleiche Teile, und trägt ebenso die Teilung auch noch nach oben hin fort. Der Rauminhalt zwischen zwei Teilstrichen entspricht dann, da wir die Röhre als cylindrisch voraussetzten, $^1/_{100}$ des Rauminhaltes der Röhre von unten bis zum Teilstriche 100. Tauchen wir nun diese Röhre in eine Flüssigkeit, in welche sie bis zum Teilstriche 80 einsinkt, so schlieſsen wir daraus, da sie eine ihrem Gewichte gleiche Flüssig-

enge aus ihrer Stelle drängt, dafs 80 Volumteile dieser ebensoviel als 100 Volumteile Wasser. Wir haben demnach für das specifische t dieser Flüssigkeit s

$$s : 1 = 100 : 80,$$
$$s = {}^{100}/_{80} = 1{,}25;$$

die Röhre dagegen bis zum Teilstriche 120 ein, so ist

$$s = {}^{100}/_{120} = 0{,}833;$$

überhaupt die Röhre in irgend eine Flüssigkeit bis zum Teilstrich n haben wir für ihr specifisches Gewicht $\frac{100}{n}$.



Fig. 94. Fig. 95.

iese Aräometer bestimmen demnach das speci- Gewicht einer Flüssigkeit aus der Vergleichung lumens derselben mit dem Volumen einer gleichen tsmenge Wasser. Sie führen daher den Namen eter.

an gibt ihnen meist eine andere Form (Fig. 95). klar, dafs die Apparate eine um so gröfsere Ge- eit liefern, je weiter zwei Teilstriche von einander t sind. Zu dem Ende wählt man sehr dünne , und damit sie dann nicht zu lang und somit eholfen werden, setzt man unten ein Stück einer Röhre daran. Die Teilung kann dann nur sch aufgetragen werden; man verfährt folgender- . Man bringt in die Röhre etwas Quecksilber, so as Gewicht des Apparates gleich p wird, taucht Wasser und bezeichnet die Stelle, bis zu welcher inkt, mit 50. Darauf vermehrt man durch Hinzu- von Quecksilber sein Gewicht auf $2p$, $3p$ und ihn wieder in Wasser. Das doppelte und drei- Gewicht verdrängt die doppelte und dreifache rmenge, der Apparat sinkt also tiefer ein. Die bis zu der er bei doppeltem Gewichte einsinkt, net man mit 100, die bei dreifachem Gewichte 0 und teilt nun den Raum zwischen 50 und 100, als zwischen 100 und 150, in 50 gleiche Teile. um zwischen 50 und 100 ist die Hälfte von dem den das Instrument ausfüllt, wenn es bis zu 100 t; der Raum zwischen zwei Teilstrichen also ieses Raumes. Man gibt nun schliefslich dem te das Gewicht $2p$ und schliefst ihn dann oben. Im Wasser taucht derselbe bis zum Teilstriche 100 ein; wir können ihn daher jetzt so benutzen wie das einfachere Aräometer; taucht er in eine Flüssig- s zum Teilstriche n, so ist $\frac{100}{n}$ ihr specifisches Gewicht.

ber auch so erhält der Apparat immer noch eine bedeutende Länge rd dadurch zum praktischen Gebrauche unbequem. Man verfertigt selten Apparate, welche zugleich dazu dienen, das specifische Gewicht

von Flüssigkeiten zu bestimmen, welche schwerer oder leichter sind als Wasser, sondern meist solche, welche nur für die eine oder andere Art von Flüssigkeiten bestimmt sind.

Ist das Instrument für schwerere Flüssigkeiten bestimmt, so bezeichnet man den Punkt oben an der Röhre, bis zu welchem sie beim Gewichte $2p$ in Wasser einsinkt, mit 100, und ganz unten über der weitern Röhre beim Gewicht p mit 50, gibt dem Apparate das Gewicht $2p$ und graduiert wie vorhin. Ist es für die Bestimmung des specifischen Gewichtes leichterer Flüssigkeiten bestimmt, so richtet man das Gewicht p des Apparates so ein, dafs er in Wasser getaucht bis gerade über die weite Röhre eintaucht, und bei dem Gewichte $2p$ bis oben. Der Apparat erhält dann das Gewicht p, und der untere Punkt wird mit 100, der obere mit 200 bezeichnet; das specifische Gewicht ergibt sich dann wie vorhin.

Häufig findet man auch auf den Aräometerskalen anstatt oder neben der der Teilung entsprechenden Zahl die Angabe des specifischen Gewichtes verzeichnet, welche dem nebenstehenden Teilstriche entspricht; also neben dem Teilstriche 100 — 1, neben dem 120 dann 0,833, 150 — 0,666, 200 — 0,5; eine einfache Ablesung ergibt dann das gesuchte specifische Gewicht.

Aräometer für besondere Flüssigkeiten. Wenn zwei Flüssigkeiten verschiedenen specifischen Gewichtes, die sich mit einander mischen, zusammengegossen werden, so hängt das specifische Gewicht des Gemisches von den Mengenverhältnissen der einzelnen Flüssigkeiten ab. Kennt man daher für alle Mischungen ihre specifischen Gewichte, so kann man mittels der Aräometer die Bestandteile des Gemisches kennen lernen. Für einzelne Flüssigkeiten sind diese Untersuchungen durchgeführt und am genauesten für Alkohol, da es im praktischen Leben vielfach von Wichtigkeit ist, den Procentgehalt eines Weingeistgemisches mit Schnelligkeit bestimmen zu können. Auf den ersten Blick sollte man glauben, dafs nichts einfacher sei, als aus dem specifischen Gewichte eines Flüssigkeitsgemisches den Gehalt desselben an der einen oder andern zu bestimmen, indem man das specifische Gewicht aus den Mengenverhältnissen berechnet. Darnach würde z. B. ein Gemisch von 50 Volumen Wasser und 50 Volumen Alkohol ein Gemisch von 100 Volumen geben, dessen specifisches Gewicht gerade in der Mitte dessen des Alkohols oder des Wassers läge, also, da das des Alkohols gleich 0,794, das des Wassers bei 15° C. gleich 0,9991 ist, gleich 0,8866 sein würde.

Dem ist jedoch nicht so, und zwar deshalb nicht, weil bei der Mischung zweier Flüssigkeiten meist eine Änderung des Volumens eintritt.

Giefst man z. B. Alkohol und Wasser zu gleichen Teilen zusammen, so ist das Volumen des Gemisches nicht gleich der Summe der Volumina, sondern kleiner. Es tritt eine Kontraktion der Flüssigkeiten ein; das specifische Gewicht ist demnach gröfser als das vorhin berechnete.

Nach den neuesten Versuchen von Baumhauer[1]) geben:

---

[1]) *von Baumhauer*, Mémoire sur la densité etc. des mélanges d'alcool et d'eau. Amsterdam, 1860. Etwas von diesen verschiedene Werte ergeben sich aus den *Versuchen* von *Mendelejeff*, Poggend. Ann. Bd. CXXXVIII.

...me Wasser.	Weingeist.	Mischung.	Volume Wasser.	Weingeist.	Mischung.
100	0	100	40	60	94,8
90	10	99,4	30	70	96,2
80	20	98,2	20	80	96,7
70	30	97,2	10	90	97,7
60	40	96,4	0	100	100
50	50	96,0			

Daraus ergibt sich das specifische Gewicht *s* bei 15° C.:

Mischung aus Volumen.		
Wasser.	Weingeist.	*s*
100	0	0,9991
90	10	0,9857
80	20	0,9750
70	30	0,9645
60	40	0,9511
50	50	0,9338
40	60	0,9131
30	70	0,8897
20	80	0,8635
10	90	0,8338
0	100	0,7941

Wenn man nun ein Volumeter so einrichtet, dafs es in Wasser ge-
...at bis zu einem mit 0 bezeichneten Punkte eintaucht, so wird es in
...ischen aus Alkohol und Wasser tiefer eintauchen. Bezeichnet man
Punkte, bis zu denen es in Flüssigkeiten vom specifischen Gewichte
...57, 0,9750 etc. einsinkt, mit 10, 20 · ·, so erhält man ein Alkoholometer,
...hes in ein Weingeistgemisch eingetaucht durch eine einfache Ablesung
...bt, wieviel Volumprocente das Gemisch an reinem Alkohol enthält.

So sind die Alkoholometer von Tralles [1]) eingerichtet, welche in Deutsch-
... meist gebraucht werden, um den Alkoholgehalt des käuflichen Spiritus
...estimmen.

Es ist jedoch zu bemerken, dafs die Zahlen für das specifische Gewicht
... Alkohols, wie schon erwähnt, und so auch die der Gemische nur für
... bestimmte Temperatur gelten, nämlich für 15° C. Deshalb gelten auch
...Angaben der Alkoholometer nur für diese oder eine andere Temperatur,
...der sie graduiert sind. Um jedoch den Apparat auch für andere Tem-
...turen brauchbar zu machen, hat Tralles eine Tabelle aufgestellt [2]), aus
...her man für jede Temperatur den Alkoholgehalt eines Gemisches ent-
...nen kann, wenn man beobachtet hat, bis zu welchem Punkte bei dieser
...peratur der Apparat in das Gemische eintaucht. Deshalb ist an den
...ten Alkoholometern auch ein Thermometer angebracht.

Vielfach ist auch an den Alkoholometern selbst die Korrektion bemerkt,
...he man für die verschiedenen Temperaturen anzubringen hat. In der
...ern Röhre am untern Teile des Apparates ist neben dem Thermometer

[1]) *Tralles*, Gilbert Annalen XXXVIII. 349—431.
[2]) *Tralles* a. a. O.

eine Skala befestigt, auf der dann neben dem normalen Thermometerstand, für welchen das Instrument graduiert ist, 0 verzeichnet ist und darüber oder darunter, wieviel Procente man von der Angabe des Alkoholometers abziehen oder derselben hinzufügen mufs, wenn das Thermometer einen höhern oder tiefern Stand hat.

Aufser den Alkoholometern müssen wir noch die Aräometer von Beaumé erwähnen, welche vielfach in Gebrauch sind, obwohl sie direkt weder etwas über die Dichtigkeit der Flüssigkeiten, noch über ihre Zusammensetzung aussagen. Beaumé konstruierte zwei Aräometer, das erste graduierte er so, dafs er den Punkt, bis zu dem es in Wasser eintauchte, mit 0, und den, bis zu welchem es in einer Lösung von 15 Teilen Kochsalz auf 85 Wasser eintauchte, mit 15 bezeichnete. Die Teilung wurde dann weiter nach unten fortgesetzt. Der Apparat gibt in Schwefelsäure-Hydrat 66 Grade an und in konzentrierter Salpetersäure 36.

Für Flüssigkeiten, welche leichter sind als Wasser, wurde der Punkt, bis zu welchem der Apparat in eine Lösung von 10 Teilen Kochsalz auf 90 Wasser taucht, mit 0, in Wasser mit 10 bezeichnet und die Teilung nach oben hin fortgesetzt. In käuflichem, meist 80—90procentigem Spiritus zeigt der Apparat 34—38 Grade[1]).

§ 70.

Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern.

In unseren bisherigen Entwicklungen über die Gesetze des Gleichgewichtes der flüssigen Körper haben wir keine Rücksicht genommen auf die Wirkung von Kräften, welche an den Gefäfswänden zwischen den Molekülen der festen Wand und denen des flüssigen Körpers thätig sind, also gemäfs unserer Benennung in § 58 und 46 auf die Wirkung der Adhäsion der flüssigen an die festen Körper und die Kohäsion der Flüssigkeiten.

Von dem Dasein beider Kräfte kann man sich leicht überzeugen. Taucht man ein reines Glasstäbchen in Wasser und zieht es dann heraus, so sieht man, dafs eine Wasserschicht an demselben haftet. Hält man es vertikal, so sammelt sich an seinem untern Ende ein Tropfen an, der nicht herabfällt, sondern der Wirkung der Schwere entgegen an dem Stäbchen haften bleibt. Diese einzige Thatsache beweist das Dasein der Adhäsion des flüssigen Körpers an den festen sowohl als auch das der Kohäsion der einzelnen Teile der Flüssigkeit. Denn die zunächst am Glase anhängende Wasserschicht wird durch die Adhäsion des Wassers am Glase getragen und der übrige Teil des Tropfens durch die Kraft, mit welcher die einzelnen Wasserteilchen an einander haften.

Aus diesem Versuche geht zugleich hervor, dafs in diesem Falle sowohl die Kohäsion der Flüssigkeit als auch die Adhäsion derselben am Glase gröfser ist als die Wirkung der Schwere; denn nur dann ist es möglich, dafs der Tropfen, der Schwere entgegen, getragen wird. Der Versuch zeigt aber weiter, dafs hier auch die Adhäsion des Wassers am Glase gröfser ist als die Kohäsion der Wasserteile unter einander; denn beim Heraus-

---

[1]) Weiteres *Meissner*, Die Aräometrie in ihrer Anwendung auf Chemie und Technik. Wien, 1816.

ziehen des Stabes wurden die an dem Stabe haftenden Wasserteile von ihrer Umgebung losgerissen, mit welcher sie durch die Kohäsion zusammenhängen.

Nicht immer ist das jedoch der Fall; denn wenn wir den Glasstab in Quecksilber tauchen, so bleibt kein Quecksilber daran haften, er wird von demselben nicht benetzt. Dafs aber auch hier eine Adhäsion des Quecksilbers am Glase vorhanden ist, läfst sich durch einen andern Versuch zeigen. Hängt man nämlich eine Platte mittels dreier Fäden an dem einen Arm einer Wage horizontal auf und äquilibriert sie durch Gewichte, welche auf die andere Wagschale gelegt werden, so bringt das geringste Übergewicht, auf die Wagschale gelegt, eine Erhebung der Glasplatte hervor. Nähert man aber der Platte von unten ein weites, mit Quecksilber gefülltes Gefäfs so weit, dafs die untere Fläche der Glasplatte die Oberfläche des Quecksilbers gerade berührt, so bedarf es auf der andern Wagschale bedeutender Zulage, um die Platte von dem Quecksilber loszureifsen, ein Beweis, dafs sie mit einer gewissen Kraft am Quecksilber haftet, dafs also auch das Quecksilber am Glase adhäriert.

Die Kohäsion der verschiedenen Flüssigkeiten sowohl als die Adhäsion derselben Flüssigkeit an verschiedene feste Körper ist verschieden. Während Quecksilber Glas nicht benetzt, also an Glas nicht so stark adhäriert, dafs die Kohäsion der Quecksilberteile überwunden werden kann, wird Gold vom Quecksilber benetzt. Während reines Glas vom Wasser benetzt wird, vermag eine fettige Glasscheibe die Kohäsion der Wasserteile nicht zu überwinden.

Bei denjenigen Substanzen, bei welchen die Adhäsion an feste Körper gröfser ist als die Kohäsion der flüssigen Teile, kann obiges Verfahren, welches wir anwandten, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase nachzuweisen, dazu dienen, die Kohäsion der Flüssigkeit zu messen. Gay-Lussac[1]) hat für einige Flüssigkeiten, welche am Glase adhärieren, dieses Verfahren angewandt und mit einer Scheibe von 118,366 Millim. Durchmesser folgende Resultate erhalten:

Flüssigkeit		Specifisches Gewicht	Gewichte
Wasser	bei 8°,5 C.	1	59,40 gr.
Alkohol	„ „ „	0,8196	31,08 „
Alkohol	„ 10° „	0,8595	32,87 „
Alkohol	„ 8 „	0,9415	37,15 „
Terpentin-Öl	„ 8 „	0,8694	34,10 „

Die angegebenen Gewichte sind diejenigen, welche bei langsamem Auflegen der Gewichte gerade die benetzte Platte loszureifsen imstande waren. Ganz dieselben Resultate erhielt Gay-Lussac, als er die Glasscheibe der vorigen Versuche durch eine Kupferscheibe ersetzte, was einen neuen Be-

[1]) *Gay-Lussacs* Versuche in La Place Supplément à la Théorie de l'action capillaire. II. Supplement zum 10. Buche der Mécanique céléste. Daraus *Gilbert*, Annalen Bd. XXXIII. p. 320 ff.

weis dafür liefert, dafs durch diese Versuche wirklich die Kohäsion der Flüssigkeiten gemessen wird.

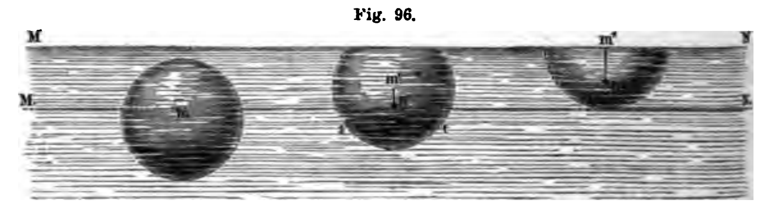
Bei Flüssigkeiten, welche nicht benetzen, kann man dieses Verfahren benutzen, um die Adhäsion zu messen. Gay-Lussac stellte derartige Versuche an, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase zu erhalten; die Zahlen jedoch, welche er erhielt, schwankten um ein Bedeutendes, zwischen 158gr. und 296gr., je nachdem er die Übergewichte rasch oder langsam auflegte. Der Grund dieser Schwankung liegt zum Teil in der Reibung des Quecksilbers am Glase, wie wir später nachweisen werden.

§ 71.

Normaldruck in der Oberfläche der Flüssigkeiten. Aus den im vorigen Paragraphen mitgeteilten Thatsachen folgt erstens, dafs die benachbarten Moleküle einer Flüssigkeit sich anziehen, und zweitens, dafs die Moleküle eines in eine Flüssigkeit getauchten festen Körpers ebenfalls die benachbarten Teile der Flüssigkeit anziehen. Bei der Bestimmung des Gleichgewichtszustandes einer Flüssigkeit müssen wir daher auf diese beiden Kräfte Rücksicht nehmen; es wird daher zunächst unsere Aufgabe sein, zu untersuchen, in welcher Weise sie Änderungen des von uns bisher betrachteten Zustandes hervorbringen können. Beginnen wir mit der Anziehung der Flüssigkeitsteile auf einander, und setzen wir bei dieser wie bei der zweiten Art von Kräften voraus, dafs die Kräfte sich nur auf unmefsbare Entfernungen erstrecken, dafs sie unmerklich werden, sobald die Entfernungen mefsbar sind[1]).

Betrachten wir zu dem Ende eine flüssige Masse, welche durch irgend eine Oberfläche MN (Fig. 96) begrenzt ist, und untersuchen die Resultierende aller auf die Moleküle m, m', m'' von den benachbarten Molekülen ausgeübten Anziehungen. Seien zu dem Ende die mit den Radien r, welche als unendlich klein vorausgesetzt werden, um die betreffenden Moleküle beschriebenen Kugeln die Anziehungssphären derselben, so dafs also auch nur die in dieser Kugel befindlichen Moleküle anziehend auf m, m', m'' wirken.

Fig. 96.



Auf das Molekül m wirken die ringsum ganz gleichmäfsig verteilten Moleküle der Flüssigkeit anziehend ein; dasselbe wird also nach allen Richtungen des Raumes mit gleicher Stärke angezogen, die auf m wirkenden Kräfte halten sich daher das Gleichgewicht, das Molekül verhält sich gerade so, als wenn keine Kräfte auf dasselbe einwirkten.

[1]) *La Place*, Théorie capillaire im Supplement zum 10. Buche der Mécanique céléste, daraus *Gilbert*, Annalen XXXIII.

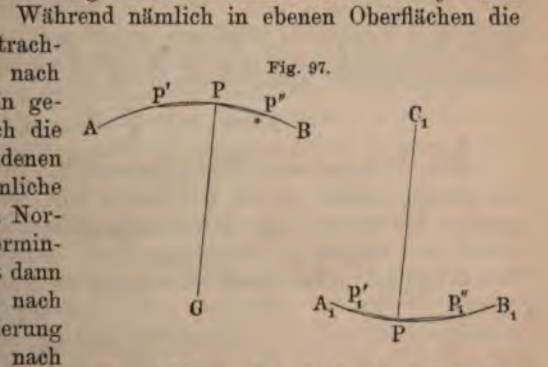
Das Molekül m'', welches gerade in der Oberfläche der Flüssigkeit t, wird jedoch nicht nach allen Richtungen mit gleicher Stärke an- gen. Nur die untere Hälfte seiner Anziehungssphäre ist mit Flüssigkeits- ekülen angefüllt, die obere nicht. Die anziehenden Kräfte der die un- Halbkugel ausfüllenden Moleküle haben nun, wie unmittelbar klar ist, zur Oberfläche MN senkrechte Resultierende R, da in den der Ober- he parallelen Schichten die Moleküle rings um m'' ganz gleichmäfsig eilt sind. Das Molekül m'' und somit alle in der Oberfläche befind- en Flüssigkeitsmoleküle werden durch eine gegen die Oberfläche senk- te Kraft gegen das Innere der Flüssigkeit gedrückt.

Ähnliches gilt für das Molekül m', welches um weniger als r unter Oberfläche der Flüssigkeit liegt. Auch dessen Anziehungssphäre ist t ganz mit Flüssigkeit angefüllt, und unterhalb st wirkt eine Quantität ssigkeit auf dasselbe ein, deren Anziehung nicht durch eine nach oben chtete Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird; auch an m' greift er eine zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte, gegen das Innere der- en gerichtete Kraft R' an, die jedoch kleiner ist als R.

Dasselbe ist der Fall mit allen Molekülen, welche um weniger als nter der Oberfläche liegen, deren Anziehungssphären also zum Teil t mit Flüssigkeit angefüllt sind. Legen wir daher parallel der Ober- he im Innern der Flüssigkeit eine Fläche, welche von der Oberfläche r absteht, so werden alle in dieser Schicht liegenden Moleküle nach n gezogen. Diese Schicht wird also z. B. auf eine Flüssigkeitskugel ken wie ein elastisches Häutchen, welches sich zusammenzuziehen sucht, r auf jede Flüssigkeit, die in einem Gefäfse steht, einen rings gegen Innere der Flüssigkeit gerichteten Druck ausüben, da sie auch an den den Wänden begrenzten Flächen vorhanden sein mufs. Man nennt daher e Schicht das Flüssigkeitshäutchen und diesen Druck den Normaldruck.

Dieser Normaldruck der Flüssigkeiten mufs verschieden sein je nach Gestalt der Oberfläche. Während nämlich in ebenen Oberflächen die ssigkeit nur durch die betrach- n Molekularwirkungen nach n gezogen wird, tritt in ge- mmten Oberflächen durch die der Oberfläche vorhandenen eküle noch eine eigentümliche nnung hinzu, welche den Nor- ldruck vermehrt oder vermin- t. Eine Vermehrung tritt dann , wenn die Oberfläche nach sen konvex, eine Verminderung n, wenn die Oberfläche nach sen konkav ist. Denn ist AB (Fig. 97) ein Durchschnitt durch eine vexe, A_1B_1 ein solcher durch eine konkave Oberfläche, so erkennt man ht, dafs die gegenseitigen Anziehungen der in der Oberflächenschicht enden Flüssigkeitsteilchen eine der Normale parallele Komponente liefern, che bei den konkaven Flächen nach aufsen, bei den konvexen Flächen h innen gerichtet ist. Man nennt diese von der Form der Oberfläche ängige Komponente die Oberflächenspannung.

Fig. 97.



weis dafür liefert, daſs durch diese Versuche wirklich die Kohäsion der Flüssigkeiten gemessen wird.

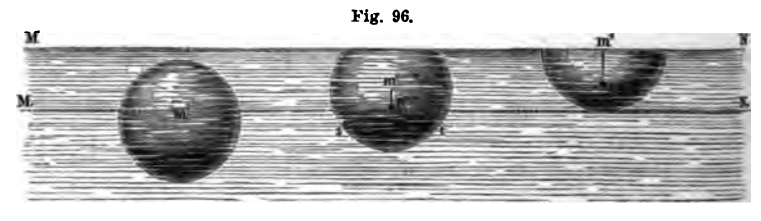
Bei Flüssigkeiten, welche nicht benetzen, kann man dieses Verfahren benutzen, um die Adhäsion zu messen. Gay-Lussac stellte derartige Versuche an, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase zu erhalten; die Zahlen jedoch, welche er erhielt, schwankten um ein Bedeutendes, zwischen 158$^{gr.}$ und 296$^{gr.}$, je nachdem er die Übergewichte rasch oder langsam auflegte. Der Grund dieser Schwankung liegt zum Teil in der Reibung des Quecksilbers am Glase, wie wir später nachweisen werden.

§ 71.

Normaldruck in der Oberfläche der Flüssigkeiten. Aus den im vorigen Paragraphen mitgeteilten Thatsachen folgt erstens, daſs die benachbarten Moleküle einer Flüssigkeit sich anziehen, und zweitens, daſs die Moleküle eines in eine Flüssigkeit getauchten festen Körpers ebenfalls die benachbarten Teile der Flüssigkeit anziehen. Bei der Bestimmung des Gleichgewichtszustandes einer Flüssigkeit müssen wir daher auf diese beiden Kräfte Rücksicht nehmen; es wird daher zunächst unsere Aufgabe sein, zu untersuchen, in welcher Weise sie Änderungen des von uns bisher betrachteten Zustandes hervorbringen können. Beginnen wir mit der Anziehung der Flüssigkeitsteile auf einander, und setzen wir bei dieser wie bei der zweiten Art von Kräften voraus, daſs die Kräfte sich nur auf unmeſsbare Entfernungen erstrecken, daſs sie unmerklich werden, sobald die Entfernungen meſsbar sind[1]).

Betrachten wir zu dem Ende eine flüssige Masse, welche durch irgend eine Oberfläche MN (Fig. 96) begrenzt ist, und untersuchen die Resultierende aller auf die Moleküle m, m', m'' von den benachbarten Molekülen ausgeübten Anziehungen. Seien zu dem Ende die mit den Radien r, welche als unendlich klein vorausgesetzt werden, um die betreffenden Moleküle beschriebenen Kugeln die Anziehungssphären derselben, so daſs also auch nur die in dieser Kugel befindlichen Moleküle anziehend auf m, m', m'' wirken.

Fig. 96.



Auf das Molekül m wirken die ringsum ganz gleichmäſsig verteilten Moleküle der Flüssigkeit anziehend ein; dasselbe wird also nach allen Richtungen des Raumes mit gleicher Stärke angezogen, die auf m wirkenden Kräfte halten sich daher das Gleichgewicht, das Molekül verhält sich gerade so, als wenn keine Kräfte auf dasselbe einwirkten.

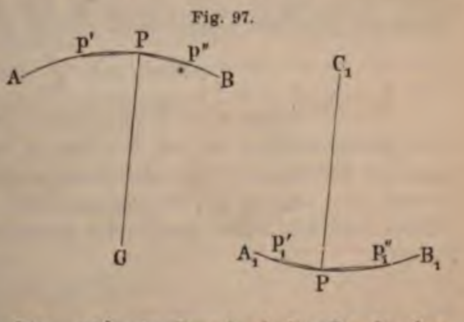
[1]) *La Place*, Théorie capillaire im Supplement zum 10. Buche der Mécanique céléste, daraus *Gilbert*, Annalen XXXIII.

Das Molekül m'', welches gerade in der Oberfläche der Flüssigkeit t, wird jedoch nicht nach allen Richtungen mit gleicher Stärke an- gen. Nur die untere Hälfte seiner Anziehungssphäre ist mit Flüssigkeits- ekülen angefüllt, die obere nicht. Die anziehenden Kräfte der die un- Halbkugel ausfüllenden Moleküle haben nun, wie unmittelbar klar ist, zur Oberfläche MN senkrechte Resultierende R, da in den der Ober- e parallelen Schichten die Moleküle rings um m'' ganz gleichmäfsig eilt sind. Das Molekül m'' und somit alle in der Oberfläche befind- n Flüssigkeitsmoleküle werden durch eine gegen die Oberfläche senk- te Kraft gegen das Innere der Flüssigkeit gedrückt.

Ähnliches gilt für das Molekül m', welches um weniger als r unter Oberfläche der Flüssigkeit liegt. Auch dessen Anziehungssphäre ist t ganz mit Flüssigkeit angefüllt, und unterhalb st wirkt eine Quantität sigkeit auf dasselbe ein, deren Anziehung nicht durch eine nach oben chtete Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird; auch an m' greift r eine zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte, gegen das Innere der- n gerichtete Kraft R' an, die jedoch kleiner ist als R.

Dasselbe ist der Fall mit allen Molekülen, welche um weniger als nter der Oberfläche liegen, deren Anziehungssphären also zum Teil t mit Flüssigkeit angefüllt sind. Legen wir daher parallel der Ober- e im Innern der Flüssigkeit eine Fläche, welche von der Oberfläche r absteht, so werden alle in dieser Schicht liegenden Moleküle nach n gezogen. Diese Schicht wird also z. B. auf eine Flüssigkeitskugel en wie ein elastisches Häutchen, welches sich zusammenzuziehen sucht, auf jede Flüssigkeit, die in einem Gefäfse steht, einen rings gegen Innere der Flüssigkeit gerichteten Druck ausüben, da sie auch an den den Wänden begrenzten Flächen vorhanden sein mufs. Man nennt daher Schicht das Flüssigkeitshäutchen und diesen Druck den Normaldruck.

Dieser Normaldruck der Flüssigkeiten mufs verschieden sein je nach Gestalt der Oberfläche. Während nämlich in ebenen Oberflächen die sigkeit nur durch die betrach- Molekularwirkungen nach n gezogen wird, tritt in ge- nmten Oberflächen durch die der Oberfläche vorhandenen ekküle noch eine eigentümliche nnung hinzu, welche den Nor- druck vermehrt oder vermin- . Eine Vermehrung tritt dann wenn die Oberfläche nach en konvex, eine Verminderung n, wenn die Oberfläche nach en konkav ist. Denn ist AB (Fig. 97) ein Durchschnitt durch eine vexe, $A_1 B_1$ ein solcher durch eine konkave Oberfläche, so erkennt man ht, dafs die gegenseitigen Anziehungen der in der Oberflächenschicht enden Flüssigkeitsteilchen eine der Normale parallele Komponente liefern, che bei den konkaven Flächen nach aufsen, bei den konvexen Flächen innen gerichtet ist. Man nennt diese von der Form der Oberfläche ängige Komponente die Oberflächenspannung.



Um die Gröfse dieser Oberflächenspannung und ihre Abhängigkeit von der Gestalt der Oberfläche zu bestimmen[1]), sei Fig. 97 P ein Punkt der Oberflächenschicht, welche in dem Schnitt AB derselben liege, und sei m das im Punkte P vorhandene Massenteilchen der Flüssigkeit. Ein im Punkte p' vorhandenes Massenteilchen m', welches von m die äufserst kleine Strecke r entfernt ist, wird dann auf das Massenteilchen m mit einer Kraft wirken, welche wir dem Produkte der Massen $m \cdot m'$ und irgend einer Funktion der Entfernung $f(r)$ proportional, also gleich $m \cdot m' \cdot f(r)$ setzen können; von der Funktion $f(r)$ wissen wir nur, dafs sie verschwindet, sobald r gröfser als der Radius der Wirkungssphäre wird. Ein in demselben Schnitt in derselben Entfernung r bei p'' gelegenes Massenteilchen m' wird dann auf das Massenteilchen m genau dieselbe Wirkung $mm'f(r)$ ausüben. Diese Wirkungen sind nach den Verbindungslinien Pp' resp. Pp'' gerichtet.

Zerlegen wir diese Wirkungen jede in zwei Komponenten, die eine senkrecht, die andere parallel der im Punkte P errichteten Normale der Oberfläche, so heben sich die senkrecht zur Normale wirkenden Komponenten als einander gleich und entgegengesetzt gerichtet auf. Die der Normale parallel gerichteten Komponenten dagegen summieren sich, sie geben also eine auf das bei P liegende Massenteilchen m wirkende Kraft

$$2 \cdot m \cdot m' \cdot f(r) \cdot \cos p'PC.$$

In der Nähe des Punktes P, und soweit die Wirkungssphäre der Moleküle reicht, fällt, welches auch die Gestalt der Oberfläche ist, der Schnitt AB mit einem Kreisbogen zusammen, dessen Mittelpunkt in C liegt, dessen Radius ϱ der Krümmungsradius des Schnittes AB im Punkte P ist. Daraus folgt, da das über dem Durchmesser eines Kreises beschriebene Dreieck, dessen dritte Ecke in der Peripherie liegt, an dieser dritten Ecke rechtwinklig ist, dafs

$$\cos p'PC = \frac{p'C}{2PC} = \frac{r}{2\varrho},$$

somit dafs die aus der Wirkung von p' und p'' auf P resultierende der Normale parallele Komponente gleich ist

$$2mm'f(r) \cdot \frac{r}{2\varrho} = mm'f(r)\frac{r}{\varrho}.$$

Die Wirkung aller Flüssigkeitsteilchen in dem Normalschnitt AB auf das Massenteilchen m bei P erhalten wir, wenn wir für alle je zwei in gleicher Entfernung liegenden Massenteilchen, deren Abstand von P zwischen 0 und dem Radius der Wirkungssphäre enthalten ist, denselben Ausdruck bilden und alle diese Ausdrücke summieren, also in der Summe

$$\Sigma mm'f(r) \cdot \frac{r}{\varrho}.$$

Da jedes Glied dieser Summe den Faktor $\frac{1}{\varrho}$ hat, so können wir diesen Faktor herausschreiben und erhalten dann

$$\frac{1}{\varrho}\Sigma mm'f(r) \cdot r = \frac{h}{\varrho},$$

wenn wir die Summe mit dem Zeichen h bezeichnen.

[1]) Man sehe *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXV. p. 622.

Denken wir uns jetzt einen zweiten Normalschnitt durch den Punkt P der Oberfläche gelegt, welcher senkrecht zu dem Normalschnitt AB ist und den Krümmungsradius ϱ' hat, so gilt für diesen ganz dieselbe Entwicklung. Wir erhalten deshalb für die Wirkung der in diesem Schnitt der Oberfläche liegenden Flüssigkeitsteilchen auf das Teilchen bei P

$$\frac{h}{\varrho'}$$

und für die Wirkung beider Schnitte

$$h\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) \cdot$$

Denken wir uns jetzt die ganze Oberfläche um den Punkt P durch unzählig viele Paare von je zwei zu einander senkrechten durch den Punkt P gelegter Normalschnitte gegeben, so wird die gesamte durch die Gestalt der Oberfläche bewirkte Spannung gleich sein der Summe aller der Spannungen, die wir für jedes Schnittpaar erhalten. Für irgend ein beliebiges Schnittpaar, deren Krümmungsradien ϱ_n und ϱ'_n sind, wird die Spannung sein

$$h\left(\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n}\right),$$

und die ganze Summe können wir dann bezeichnen mit

$$\Sigma h\left(\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n}\right) \cdot$$

Bezeichnen wir nun mit R den Radius der stärksten Krümmung, also den kleinsten Krümmungsradius, mit R_1 den Radius der schwächsten Krümmung, also den gröfsten bei den Schnitten vorkommenden Krümmungsradius, so ist nach einem von Euler bewiesenen Satze immer

$$\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1},$$

oder die Summe der reciproken Werte der Krümmungsradien zweier zu einander senkrechter Schnitte hat bei einer gegebenen Oberfläche immer denselben Wert und ist gleich der Summe der reciproken Werte des gröfsten und kleinsten Krümmungsradius. Wir können demnach aus obiger die Oberflächenspannung darstellenden Summe den konstanten Faktor herausschreiben und erhalten dann für dieselbe

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \cdot \Sigma h.$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommende Summe Σh können wir noch in folgender Weise näher definieren. Wir bezeichnen den auf die Flächeneinheit einer Kugeloberfläche vom Radius 1 infolge der Oberflächenspannung resultierenden Druck mit H. Indem wir dann den eben abgeleiteten Ausdruck für die Oberflächenspannung auf die Einheit der Oberfläche beziehen unter der Voraussetzung, dafs die Fläche überall dieselbe Krümmung hat als im Punkte P, erhalten wir aus demselben die Oberflächenspannung der Kugel vom Radius 1, indem wir $R = R_1 = 1$ setzen, somit

$$2 \cdot \Sigma h = H; \quad \Sigma h = \frac{H}{2}.$$

Damit wird dann die Oberflächenspannung für eine irgendwie gekrüm
Fläche

$$\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right).$$

In einer Ebene ist eine solche Oberflächenspannung nicht vorhan
da dort die zur Normale parallelen Komponenten gleich Null werden.
gibt auch unser Ausdruck zu erkennen; denn bei einer Ebene werden so
R als R_1 unendlich grofs, ihre reciproken Werte also gleich Null.

Bei einer nach aufsen konvexen Oberfläche tritt diese Oberflä
spannung zu dem in einer ebenen Oberfläche derselben Flüssigkeit
handenen Normaldruck hinzu, indem der aus dieser Oberflächenspan
resultierende Druck, der in jedem Normalschnitt gegen den Mittelpunkt
Krümmung gerichtet ist, gegen das Innere der Flüssigkeit wirkt.

Bei einer nach aufsen konkaven Fläche A_1B_1 Fig. 97 ist der Nor
druck um diese Gröfse kleiner als in der Ebene, da die auch hier geg
gerichtete Oberflächenspannung nach aufsen wirkt. Nennen wir den
die Flächeneinheit bezogenen Normaldruck in einer ebenen Oberfläche
selben Flüssigkeit K, so erhalten wir für den in einer gekrümmten (
fläche vorhandenen Normaldruck[1])

$$P=K\pm\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right),$$

worin das positive Vorzeichen für konvexe, das negative Vorzeichen
konkave Flächen gilt. Unterscheiden wir die Krümmung der Oberfläch
konvex oder konkav, dadurch, dafs wir die Vorzeichen der Radien p
für konvexe, negativ für konkave Radien wählen, so können wir in un
Ausdrucke dem zweiten Gliede allgemein das positive Vorzeichen g
also setzen

$$P=K+\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right).$$

Dafs ein solcher Unterschied des Normaldruckes in nach aufsen
vexen und nach aufsen konkaven Flächen in der That vorhanden ist,
eine bekannte Erscheinung an Seifenblasen. Die Wände einer kugelförm
mit Luft gefüllten Seifenblase sind auf der äufsern Seite konvex, au
innern konkav gekrümmt. Auf der äufsern Seite ist daher, wenn wi
Radius der Seifenblase mit R bezeichnen, der gegen den Mittelpunkt
Kugel gerichtete Druck

$$P=K+H\frac{1}{R},$$

auf der innern Seite der von dem Mittelpunkt fortgerichtete Druck

$$P_1=K-H\frac{1}{R},$$

---

[1]) Der Satz wurde zuerst abgeleitet von *Thomas Young*, Philosophical T
actions of London Royal Society for 1805 p. 65; von *La Place*: Sur l'action
laire. Supplément au X livre du traité de mécanique céléste; von *Poisson*:
velle théorie de l'action capillaire. Paris 1831; von *Gauss*: Principia gen
theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. Commentat. societ. reg. Gött
T. VII. 1832 p. 43 ff. Man sehe auch *Mousson* Poggend. Ann. Bd. CXLII. p.

wenn wir den Radius der innern Kugelfläche wegen der sehr geringen Dicke der flüssigen Hülle gleich dem der äuſsern Kugelfläche setzen. Die beiden Drucke liefern als Resultierende einen gegen den Mittelpunkt gerichteten Druck

$$P - P_1 = 2H \frac{1}{R}\,.$$

Man kann diesen Druck leicht wahrnehmen. Denn schlieſst man das Rohr, durch welches man die Blasen dargestellt hat, mit dem Finger, so behält die Blase ihre ursprüngliche Gröſse; wenn man das Rohr aber öffnet, so sieht man, wie die Kugel allmählich kleiner wird, indem jetzt die in der Blase vorhandene Luft jenem Drucke folgen und aus dem Rohr entweichen kann.

§ 72.

Einfluſs der Wände. Auch die festen Körper üben, wie wir sahen, auf die Flüssigkeitsteilchen eine anziehende Wirkung aus, es muſs also an den Wänden eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäſses zwischen den Teilen der festen Wand und den Flüssigkeitsteilchen eine Wechselwirkung stattfinden. Diese Einwirkung muſs sich in doppelter Weise geltend machen.

Zunächst muſs, worauf Poisson[1]) zuerst aufmerksam machte, in der Nähe einer in eine Flüssigkeit eingetauchten Wand eine Änderung in der Dichtigkeit der Flüssigkeiten bewirkt werden. Wenn die Lage der einzelnen Moleküle im Innern der Flüssigkeit von den Anziehungen der umgebenden Moleküle abhängt, so muſs, wenn die Anziehung der Wandschicht eine andere ist als die Anziehung einer an derselben Stelle gedachten Flüssigkeitsschicht, die Verteilung der Moleküle in derselben eine andere werden, als inmitten der Flüssigkeit. Ist die Anziehung der Wand auf die Flüssigkeitsmoleküle eine stärkere, so müssen in der der Wand nächsten Flüssigkeitsschicht mehr Moleküle sich ansammeln als in anderen parallel dieser im Innern der Flüssigkeit liegenden Schichten. Die der Wand zunächst liegende Flüssigkeitsschicht muſs demnach eine gröſsere Dichtigkeit erhalten als die übrige Flüssigkeit. Diese Verdichtung muſs sich bis auf eine gewisse Entfernung von der Wandfläche erstrecken, denn die unmittelbar an der Wand anliegende verdichtete Schicht muſs eine ähnliche Wirkung auf die folgende Schicht ausüben, als die Wand auf die erste Schicht, welche indes nicht ganz so stark sein kann als die Anziehung der Wand selbst. In dieser Weise erkennt man, daſs die Verdichtung an der Wand am gröſsten sein muſs, und daſs mit Entfernung von der Wand die Dichtigkeit allmählich abnehmen muſs, bis sie in einem gewissen Abstande von derselben die normale der Flüssigkeit wird.

Das Entgegengesetzte muſs eintreten, wenn die Anziehung der Wand auf die Flüssigkeit eine kleinere ist als jene einer an der Stelle der Wand gedachten Schicht derselben Flüssigkeit.

Die in der Nähe der Wand befindlichen Moleküle erhalten dann gegen die Flüssigkeit hin einen stärkeren Antrieb als gegen die Wand, es können deshalb in der Nähe der Wand nicht so viele Moleküle vorhanden sein, als in entsprechenden Schichten im Innern der Flüssigkeit.

---

[1]) *Poisson*, Nouvelle theorie de l'action capillaire. Paris 1831. Im Auszuge von *Link*, Poggend. Ann. XXV und XXVII.

Zweitens aber mufs in der Nähe der Wand eine Krümmung der Oberfläche der Flüssigkeit eintreten, es kann die Flüssigkeit, wenn wir etwa in eine solche, deren Oberfläche horizontal ist, eine vertikale Wand eintauchen, nicht bis an die Wand hin eine horizontale ebene Oberfläche erhalten, welche die Wand unter einem rechten Winkel schneidet, sie mufs vielmehr die Wand unter einem andern Winkel schneiden, welcher von den Anziehungen der Wand zur Flüssigkeit und von der Kohäsion der Flüssigkeit abhängig ist.

Um das zu erkennen, und zugleich zu bestimmen, von welchen Umständen die Gröfse dieses Winkels abhängt, sei Fig. 98 AB eine feste vertikale Wand, welche in eine Flüssigkeit eintaucht, deren Oberfläche in hinreichendem Abstande von der Wand horizontal sei. Die Oberfläche der Flüssigkeit sei in der Nähe der Wand nach aufsen konkav gekrümmt, und das letzte an der Wand anliegende Flüssigkeitselement schneide die Wandfläche unter dem Winkel $BCD = \vartheta$. Es sei also CD Tangente an der Flüssigkeitsoberfläche im Schnittpunkte.

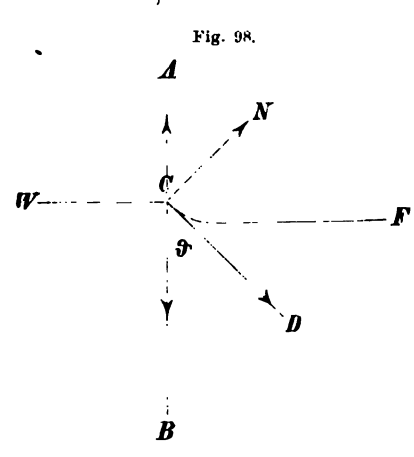


Fig. 98.

Auf das letzte Flüssigkeitselement in der Oberfläche wirken dann eine Reihe von Kräften, welche bei der Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen sich sämtlich aufheben müssen, wenn das Teilchen im Gleichgewicht sein soll. Diese Kräfte sind erstens ein gewisser Zug in der Richtung CN, normal zur Oberfläche in C, herrührend von der Oberflächenspannung der gegen die Wand gekrümmten Flüssigkeit, zweitens ein Zug nach der Richtung der Tangente CD, welche die Tangentialkomponente der in der Oberfläche wirksamen Kräfte ist. Bei der Betrachtung der in der Oberfläche thätigen Kräfte im vorigen Paragraphen fiel diese Kraft heraus, weil in der freien Oberfläche der Flüssigkeit diese Kräfte rings um den betrachteten Punkt dieselben waren, somit sich gegenseitig aufhoben. Hier aber, wo das in C befindliche Flüssigkeitselement nur nach der Seite der Flüssigkeit hin eine Anziehung von in der Oberfläche befindlichen Flüssigkeitsmolekülen erfährt, ist diese Tangentialkomponente der oberflächlichen Anziehungen sehr erheblich. Drittens üben die in dem Winkel ϑ vorhandenen Moleküle der Flüssigkeit einen Zug aus, dessen Richtung innerhalb des Winkels ϑ liegt, und dessen Stärke wesentlich abhängt von der Verdichtung der Flüssigkeit an der Oberfläche der Wand. Dazu kommt viertens die Anziehung der festen Wand, also aller Moleküle, welche in einer von C aus mit dem Radius der Wirkungssphäre in das Innere des festen Körpers beschriebenen Halbkugel liegen, auf das Flüssigkeitselement. Die Richtung des sich hieraus ergebenden resultierenden Zuges würde einfach die zur Wand normale Richtung CW sein, wenn wir die Wand als ganz homogen betrachten dürfen. Das wird indes nicht der Fall sein, vielmehr wird die in die Flüssigkeit tauchende Wandschicht durch die Anziehung

ssigkeit eine Lockerung erfahren haben, infolge deren die Anziehung ern Hälfte der Halbkugel ohne Zweifel eine etwas andere geworden diejenige der obern Hälfte. Die Richtung der Resultierenden wird in den Winkel WCA fallen.

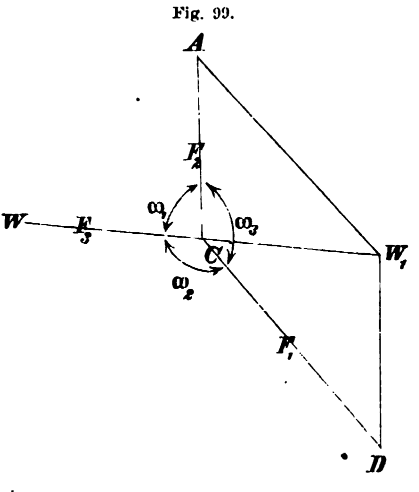
ı diesen molekularen Anziehungen würde dann noch die Wirkung hwere kommen, welche wir indes gegenüber den molekularen Anzen nach den Bemerkungen des § 70 als verschwindend klein auſser ıssen dürfen.

Vir bilden nun von allen diesen Kräften ihre Komponenten erstens l CD, sei diese Komponente gleich F_1, zweitens parallel AB, sei leich F_2, und zwar positiv, wenn dieselbe nach A hin, also von der keit nach auſsen gerichtet ist und drittens parallel CW, sei diese F_3.

ie Resultierende F_1 hängt nur von der Anziehung der Flüssigkeit s betrachtete Element ab, dieselbe wird deshalb einfach proportional vorigen Paragraphen abgeleiteten Oberflächenspannung respektive nstanten H gesetzt werden dürfen, da der hauptsächlichste Teil dieser ierenden die tangentiale Komponente der in der Oberfläche liegenden keitsteilchen ist, welche nach der Bezeichnung des vorigen Paran proportional $\Sigma m m' f(r)$ ist. Die Kräfte F_2 und F_3 dagegen hängen lich von der Anziehung des Festen und des Flüssigen ab, also von lhäsion des Flüssigen zum Festen.

ie Bedingung des Gleichgewichtes ist nun, daſs diese an dem Flüssigemente wirkenden Kräfte sich aufheben. Stellen F_1, F_2, F_3 (Fig. 99) öſse und Richtung nach die drei resultierenden Kräfte dar, so erman sofort aus der Bedingung eichgewichtes, daſs je zwei dereine Mittelkraft geben müssen, der dritten an Gröſse gleich, ler Richtung nach entgegen- sein muſs, daſs die drei Kräfte erhalten müssen wie die Seiten Dreiecks, welches aus den Kräft den Nebenwinkeln der Winkel, mit einander bilden, konstruiert Denn bilden wir mit den Kräften l F_2 das Kräfteparallelogramm, ſs, wenn Gleichgewicht vorhann soll, die Diagonale $CW_1 = CW$ ıd WW_1 muſs eine gerade Linie Demnach ist in dem Dreieck der Winkel ACW_1 der Nebendes Winkels ω_1, welchen F_2 mit einander bilden, der Winkel $AW_1C = DCW_1$ ist Nebenwinkel inkels ω_2, den F_1 und F_3 einschlieſsen, und schlieſslich CAW_1 ist winkel von ω_3. Da nun in einem Dreiecke sich die Seiten verhalten Sinus der Gegenwinkel, so können wir die Gleichgewichtsbedingung en

Fig. 99.



$$\frac{F_1}{\sin\omega_1} = \frac{F_2}{\sin\omega_2} = \frac{F_3}{\sin\omega_3},$$

wo wir an Stelle der Sinus der Dreieckswinkel die Sinus der Nebenwinkel, welche die Kräfte mit einander einschliefsen, geschrieben haben.

Nennen wir den Nebenwinkel von ω_3, den Winkel, welchen das letzte Oberflächenelement mit der Wandfläche bildet, ϑ, so ist nach dem verallgemeinerten pythagoräischen Lehrsatz

$$C W_1^2 = F_3^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos\vartheta,$$

somit die Bedingung des Gleichgewichtes für den Winkel ϑ

$$\cos\vartheta = \frac{F_1^2 + F_2^2 - F_3^2}{2 F_1 F_2}.$$

In unserem specielleren Falle ist der der Seite F_1 gegenüberliegende Winkel, da wir F_2 parallel der Wandfläche F_3 senkrecht zu derselben genommen haben, ein Rechter, somit

$$F_1^2 - F_3^2 = F_2^2,$$

und demnach

$$\cos\vartheta = \frac{F_2}{F_1}.$$

Es folgt somit, dafs der Winkel ϑ, unter welchem die Oberfläche der Flüssigkeit die Wandfläche schneidet, nur von dem Verhältnis der beiden Kräfte F_2 und F_1 abhängig ist, von denen die zweite nur von der Kohäsion der Flüssigkeit, welche nach der vorhin gemachten Bemerkung der Konstanten in dem Ausdrucke für die Oberflächenspannung gleich gesetzt werden kann, und F_2 wesentlich von der Adhäsion des Flüssigen zum Festen abhängt. Es folgt somit, dafs ein und dieselbe Flüssigkeit Wandflächen eines und desselben festen Körpers immer unter demselben Winkel, den man als den Randwinkel bezeichnet, schneiden mufs.

Die Krümmung der Oberfläche gegen den festen Körper hin kann sich nicht auf das letzte Flüssigkeitselement beschränken, sie mufs vielmehr sich bis zu einem gewissen Abstande von der Wandfläche erstrecken, der erheblich gröfser ist als der Radius der Wirkungssphäre. Je weiter wir uns aber von der Wand entfernen, um so mehr mufs der Winkel ϑ sich einem Rechten nähern, die Oberfläche mufs allmählich in die ebene übergehen. Zunächst erkennt man, dafs mit einer Entfernung von der Wand innerhalb des Radius der Wirkungssphäre des festen Körpers F_2 kleiner werden mufs, er wird aber noch nicht in einem dem Radius der Wirkungssphäre gleichen Abstande zur Null, da, wie wir sahen, in der Nähe der festen Wand eine Änderung in der Dichtigkeit der Flüssigkeiten eintritt. Die in der Dichtigkeit geänderten Flüssigkeitsschichten wirken aber auf die in der Richtung gegen die Flüssigkeiten weiter folgenden in demselben Sinne nur schwächer ein als die feste Wand auf die nächstliegenden, deshalb nimmt der Zähler des Ausdruckes für $\cos\vartheta$ mit Entfernung von der Wand stetig ab. Von da ab, wo derselbe gleich Null geworden ist, treten wieder die gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen der Flüssigkeit ein, es bleibt nur der in der Ebene vorhandene Normaldruck übrig, dem die elastische Reaktion der unter der Oberfläche liegenden Flüssigkeit das Gleichgewicht hält, die Oberfläche stellt sich wieder normal zu den wirksamen Kräften.

Der Winkel ϑ ist ein spitzer, wenn F_2 positiv ist, wenn also die *sämtlichen* parallel der Wand gerichteten Kräfte von der Oberfläche die

keit nach aufsen gerichtet sind, es ist das stets der Fall, wenn die keit die Wand benetzt, wie wir schon daraus schliefsen können, dafs dem Falle an einer vertikal aus der Flüssigkeit gezogenen Wand keit mit emporheben können. Deshalb sieht man auch stets, dafs ie Wand benetzende Flüssigkeit sich an der Wand emporzieht. Die che nimmt die Fig. 98 dargestellte Gestalt an.

er Winkel ϑ ist ein stumpfer, wenn F_2 negativ ist, das heifst wenn ntlichen der Wand parallelen Komponenten der Kräfte, welche wir r vorigen Zerlegung erhalten, gegen das Innere der Flüssigkeit, in ichnung also nach unten gerichtet sind. Es ist das dann der Fall, die Wand nicht von der Flüssigkeit benetzt wenn also eine in die Flüssigkeit einge- e vertikale Wand keine Flüssigkeit mit zuheben imstande ist. In dem Falle, z. B. wir eine Glaswand in Quecksilber tauchen, wir auch, dafs die Oberfläche in der Nähe and herabgedrückt wird, sie nimmt die in 00 dargestellte Form an, sie ist in der der Wand nach aufsen konvex gekrümmt.



Fig. 100.

e hier durchgeführten Betrachtungen zeigen, zwei Fällen an einer festen Wand über- kein Gleichgewichtszustand eintreten kann, h erstens wenn $F_2 > F_1$, denn in dem Falle n wir für den $\cos\vartheta$ einen Wert, der gröfser 1, und zweitens, wenn die Summe der zur normalen Komponenten negativ ist, die ierende F_3 also von der Wand gegen die Flüssigkeit gerichtet ist. Welche inungen dann eintreten müssen, werden wir später kurz besprechen.

Venn wir der einen festen Wand in einer Flüssigkeit eine andere in hend kleiner Entfernung gegenüberstellen, oder wenn wir in die keit eine enge, sogenannte kapillare eintauchen, so mufs die ganze Ober- im Innern gekrümmt werden. Wenn üssigkeit die Wand benetzt, so mufs h in der Röhre rings an der Wand ziehen und ein Durchschnitt durch die che mufs die Gestalt MON Fig. 101 ehmen. Wird die Wand von der Flüssig- icht benetzt, so mufs diese rings an der herabgedrückt werden, ein Durchschnitt die Gestalt $M_1 O_1 N_1$ Fig. 101 B an.

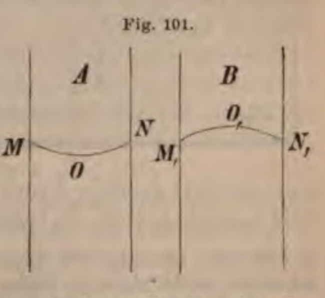


Fig. 101.

n Röhren von kreisförmigem Querschnitt mufs diese Fläche eine Ro- fläche werden, da dann jeder Durchschnitt durch die Oberfläche der keit dieselbe Gestalt haben mufs. Ist der Durchmesser der Röhre u grofs, so ist die Fläche sehr nahe eine Kugelfläche, wir wollen sie Segment einer solchen betrachten[1]).

[1]) Diese Annahme ist strenge genommen nur für sehr enge Röhren gültig. he darüber aufser *Poisson* a. a. O. *Hagen*, Poggend. Ann. Bd. LXVII p. 1.

Wir haben bei der Bestimmung des Winkels ϑ erwähnt, daſ
Wirkung der Schwere bei Betrachtung der an der Wand wirksamen K
auſser Acht gelassen werden kann. Es folgt daraus, daſs der als I
winkel bezeichnete Winkel ϑ bei derselben Flüssigkeit und derselben
stanz der Wandfläche auch immer derselbe sein muſs. Wir werden s
daſs die Erfahrung diese Folgerung bestätigt[1]).

Wir wollen den konstanten Randwinkel stets mit ϑ, seinen N
winkel, wenn wir denselben in unsere Gleichungen einführen, zum U
schiede mit dem groſsen griechischen Buchstaben Θ bezeichnen.

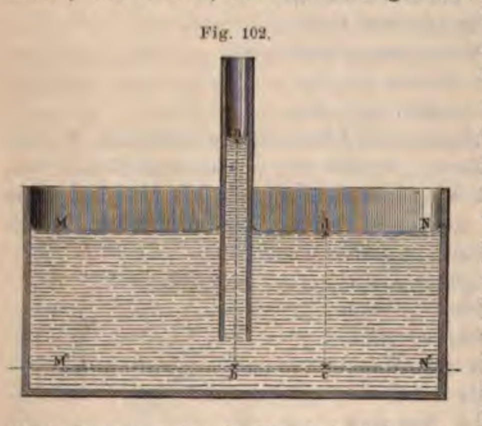
§ 73.

Niveauveränderungen in kapillaren Röhren. Da, wie w
§ 71 sahen, der molekulare Druck, den eine Flüssigkeitsoberfläche
die Wirkung der Flüssigkeitsmoleküle auf sich selbst erfährt, versch
ist je nach der Gestalt der Oberfläche, so folgt, daſs durch die Veränd
der Oberfläche das Niveau einer Flüssigkeit in engen Röhren ein andere
muſs als in damit kommunicierenden weiten Röhren oder als in einem w
mit Flüssigkeit gefüllten Gefäſs, in welches die enge Röhre eingetauch

Beginnen wir mit dem Falle, wo die Röhre benetzt wird, die Fl
keitsoberfläche also konkav ist.

Wenn die Oberfläche einer Flüssigkeit konkav ist, so ist, wi
sahen, der Druck, den die Flüssigkeitshaut nach dem Innern der Fl
keit ausübt, kleiner als
ebenen Flächen. Wird
in eine Flüssigkeitsmasse
ebener Oberfläche MN (Fig.
z. B. Wasser, eine enge Röh
stellt, deren Wände benetzt
den, so ist auſserhalb der I
der vertikal herabgehende D
der aus der Schwere der Fl
keit und dem Normaldruc
sammengesetzt ist, gröſser a
Innern der Röhre. Auswär
wenn wir mit g den aus der
kung der Schwere hervorg
den Druck bezeichnen, der
tikal abwärts gehende Druck in jedem der Einheit gleichen Stücke der
fläche gleich $g + K$, im Innern der Röhre aber gleich $g + K - q$, wen

Fig. 102.



E. Desains, Annales de chim. et de phys. 3. Série. T. LI. *Wertheim*, Ar
de chim. et de phys. 3. Série. T. LXIII.

[1]) Der Satz von der Konstanz des Randwinkels wurde zuerst von *T*
Young lectures on natural philosophy II p. 685. 1807. Young works I p.
(Encycl. Britt. 1816) abgeleitet. Man sehe *Quincke*, Annalen der Physi
Chemie, neue Folge, Bd. II, p. 147 ff. Ähnlich leitet ihn ab *Moutier* C. R.
p. 612. In anderer Weise gelangen *La Place*, Théorie capillaire im Suppl
zum 10. Buche der Mécanique céleste, daraus *Gilbert*, Annalen Bd. X
Poisson, Nouvelle théorie de l'Action capillaire, Paris 1831, *Gauss*, pri
generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. Com. soc. reg. Gött
T. VII. p. 43 ff. 1832, *Mousson*, Poggend. Ann. Bd. CXLVII, p. 405 ff. zu
ichen Resultate.

e Oberflächenspannung mit q bezeichnen. Legen wir durch die Flüssigkeit
ne mit der Oberfläche parallele Ebene $M'N'$, so mufs über dieser in der Röhre
e Flüssigkeit soviel höher stehen als aufserhalb, dafs das Gewicht der
ber dem äufseren Niveau gehobenen Flüssigkeit gleich ist der Differenz
wischen dem vertikal abwärts gerichteten Drucke in einem dem Quer-
hnitt der Röhre gleichen Flächenstücke des äufseren ebenen Niveaus und
emselben in der Oberfläche der Flüssigkeit im Innern der Röhre. Denn
ir wissen, dafs eine der Schwere unterworfene Flüssigkeit nur dann im
leichgewicht sein kann, wenn der Druck in allen Punkten einer horizon-
len Schicht derselbe ist. Denken wir uns nun in c ein dem Querschnitt
der Röhre gleiches Flächenstück, so ist der dort wirksame Druck, wenn
ir gleichzeitig mit s die Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnen,

$$s \cdot f \cdot cd + f \cdot K.$$

Im Punkte b senkrecht unter der Röhre wirkt das Gewicht der Flüssig-
eitssäule ba vom Querschnitt f, das Gewicht des Meniskus, welcher über
r durch a gelegten Ebene gehoben ist, das mit m bezeichnet werde, und
e Vertikalkomponente der in der gekrümmten Fläche wirkenden Ober-
ächenspannung. Um zunächst die letztere zu bestimmen, denken wir uns
n Flächenelement df in der Oberfläche, welches mit der Horizontalebene
n Winkel φ bildet. Der Normaldruck in diesem Elemente $(K - q)df$
ldet dann mit der Vertikalen denselben Winkel φ, und die vertikale Kom-
nente ist somit

$$\cos\varphi\,(K - q)\,df.$$

Cos $\varphi \cdot df$ ist nun aber die horizontale Projektion des Flächenelemen-
s df; somit ist die vertikale Komponente der in dem Flächenelement
irkenden Oberflächenspannung gleich dem Produkte aus dieser Spannung
die horizontale Projektion des Flächenelements. Was für dieses Element
lt, gilt für alle; somit ist die vertikale Komponente der Oberflächen-
annung einfach gleich $(K - q) \cdot f$, da der Querschnitt der Röhre die
rizontale Projektion der Oberfläche in der Röhre ist.

Der in b wirksame Druck ist somit

$$s \cdot f \cdot ab + m + (K - q) \cdot f,$$

d die Bedingung des Gleichgewichtes wird

$$s \cdot f \cdot ab + m + (K - q) \cdot f = s \cdot f \cdot cd + f \cdot K$$

ler

$$s \cdot f\,(ab - cd) + m = q \cdot f.$$

Wird die Röhre von der Flüssigkeit nicht benetzt, tauchen wir z. B.
ne Glasröhre in Quecksilber, so ist die Oberfläche der Flüssigkeit in der
öhre konvex (Fig. 103). Dadurch ist nach dem Frühern der vertikal ab-
ärts gehende Druck im Innern der Röhre gröfser als aufserhalb, und es
klar, dafs deshalb die Höhe der Flüssigkeit in der Röhre kleiner sein
ufs als aufserhalb.

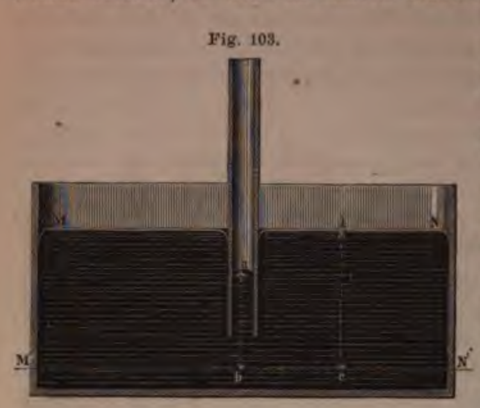
In ganz gleicher Weise wie vorhin folgt dann wieder, dafs der Ge-
chtsunterschied der Flüssigkeitssäulen $cd \cdot s \cdot f$ und $ab \cdot s \cdot f + m$ der
fferenz der vertikalen Drucke bei a und d gleich sei; es mufs

$$s \cdot f\,(ab - cd) + m = -\,qf.$$

in:

Diese Folgerungen lassen sich leicht durch den Versuch bestätigen. Tauchen wir eine enge Glasröhre in eine Flüssigkeit, welche die Röhrenwände benetzt, so wird im Innern derselben die Oberfläche der Flüssigkeit konkav, und die Flüssigkeit erhebt sich bedeutend über das Niveau der äufsern Flüssigkeit. Umgekehrt zeigt sich eine Depression bei konvexer Oberfläche beim Eintauchen einer Röhre in das sie nicht benetzende Quecksilber. Man kann diese Thatsache sehr anschaulich machen bei Anwendung U-förmig gebogener Glasröhren (Fig. 104), deren einer Schenkel sehr weit, der andere aber sehr eng ist. Füllt man ein solches Rohr mit Wasser, so sieht man, wie in Fig. 104, dafs das Wasser in dem engen Schenkel um vieles höher steht als im weiten, während die Oberfläche der Flüssigkeit in dem weiten Rohre eine viel geringere Krümmung besitzt als in dem engen Rohre. Das Umgekehrte zeigt sich, wenn man in dasselbe Glasrohr Quecksilber giefst. Das Quecksilber steht dann, wie Fig. 105, im engen Rohre viel tiefer als im weiten Rohre.

Fig. 103.



Durch einen andern Versuch kann man es sehr deutlich bestätigen, dafs, wie wir soeben nachwiesen, die Erhebung der Flüssigkeiten bei benetzenden, die Depression bei nicht benetzenden, nur von der Krümmung der Oberfläche abhängig ist. Versieht man ein anderes Gefäfs (Fig. 106) mit einer engen Röhre a, und taucht dieselbe so weit in Wasser, dafs das untere Ende der engen Röhre unter die Oberfläche des Wassers reicht, so steigt das Wasser bis zu einer gewissen Höhe h über dem äufsern Niveau; zieht man nun das Gefäfs aus der Flüssigkeit allmählich heraus, so mufs in der engen Röhre das Wasser immerfort die Höhe h über dem Niveau des äufsern Wassers besitzen, weil, wie wir sahen, die Höhe, bis zu der die Flüssigkeit ansteigt, proportional ist der durch die Krümmung der Oberfläche entstehenden Druckdifferenz. Und das mufs selbst der Fall sein, wenn ein Teil des weiten Gefäfses aus der Flüssigkeit hervorragt. Denn der Druck in b hängt, wie wir früher sahen, nicht ab von der Form des Gefäfses, sondern nur von der Höhe ba der Flüssigkeit über b. Wie der Versuch zeigt, kann man auf diese Weise ziemlich grofse Flüssigkeitssäulen heben.

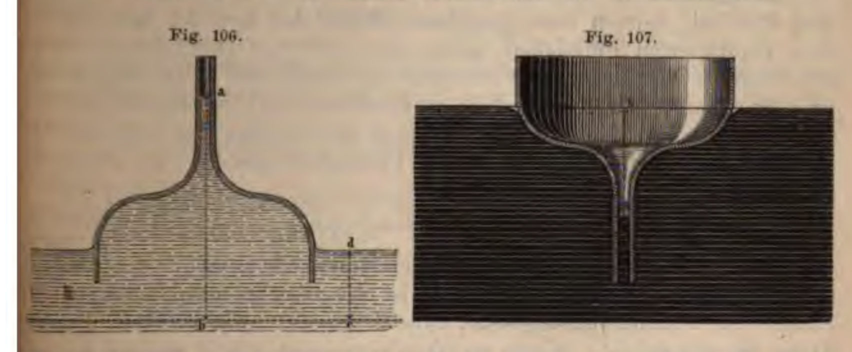
Fig. 104. Fig. 105.



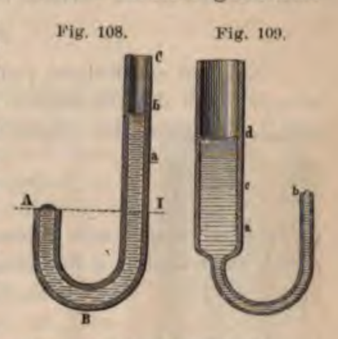
Taucht man dieses Gefäfs umgekehrt, wie in Fig. 107, in Quecksilber, so ist die Depression ab des Quecksilbers dieselbe, als wenn man eine Glasröhre von der Weite der engen angesetzten Röhre in Quecksilber eintauchen würde, wie es nach dem Vorigen die Theorie verlangt.

Einen noch evidenteren Versuch führt La Place in seiner „Théorie capillaire" an.

Taucht man ein heberförmiges Glasröhrchen, wie ABC (Fig. 108), senkrecht so tief in Wasser, daſs der kürzere Schenkel ganz untergetaucht ist, so steigt das Wasser in dem längern Schenkel bis zu einer gewissen Höhe a über das Niveau der äuſsern Flüssigkeit AJ. Zieht man nun das


Fig. 106. Fig. 107.

Röhrchen heraus, so bildet sich bei A ein konvexer Tropfen, und sofort sieht man, wie die Flüssigkeit in dem längern Schenkel höher steigt bis b, weil jetzt in der konvexen Oberfläche bei A der vertikal abwärts gerichtete Druck gröſser ist als vorher in der ebenen Oberfläche der äuſsern Flüssigkeit. Nimmt man nun den Tropfen vorsichtig fort, so wird die Konvexität bei A kleiner, und man sieht dann, daſs dem entsprechend die Flüssigkeit in BC sinkt; hat man schlieſslich die Begrenzungsfläche der Flüssigkeit in A durch fortgesetzte Wegnahme des Tropfens eben gemacht, so ist die Höhe der Flüssigkeit in BC wieder ebenso, wie sie war, als das Röhrchen in das Wasser eingetaucht war. Wenn man dann durch vorsichtiges Zulegen von Tröpfchen in A die frühere Konvexität wieder herstellt, so steigt auch das Wasser in BC wieder zu seiner frühern Höhe an.


Fig. 108. Fig. 109.

Einen ähnlichen Versuch gibt La Place an, um zu zeigen, daſs die Depression und Erhebung der Flüssigkeit der gleichen Ursache angehören.

Gieſst man in eine Glasröhre (Fig. 109), bei welcher der weitere Schenkel länger ist als der enge, Alkohol, so wird zunächst der Alkohol in dem engen Schenkel höher stehen als im weiten. Durch langsames und vorsichtiges Nachtröpfeln von Alkohol bewirkt man nun, daſs die Flüssigkeit in dem engen Schenkel gerade das Ende erreicht; zunächst bleibt die Oberfläche konkav, und der Alkohol steht im weitern Schenkel gerade soviel tiefer als vorher. Durch weiteres vorsichtiges Nachtröpfeln kann man dann bewirken, daſs die Oberfläche der Flüssigkeit bei b erst eben, dann wie bei dem vorigen Versuche ein konvexer Tropfen wird. Man beobachtet dann auch, daſs bei ebener Begrenzung in b die Flüssigkeit im weiten Schenkel nahezu die gleiche Höhe hat als im engen, und bei konvexer, daſs die

Flüssigkeit in dem weiten viel höher steht; ein Beweis, dafs die Erhebung oder Depression in einer Röhre nur von der Gestalt der Oberfläche und somit von der Oberflächenspannung abhängt.

§ 74.

Steighöhen in verschiedenen Räumen. Wir gelangten vorhin zu dem Resultat, dafs in einer kapillaren Röhre das Gewicht der gehobenen oder deprimierten Flüssigkeit gleich sein mufs der Druckdifferenz in der gekrümmten Oberfläche der Flüssigkeit im Innern der Röhre und in einem dem Querschnitt der Röhre gleichen Flächenstücke der ebenen Oberfläche.

Behalten wir die vorhin gebrauchte Bezeichnung bei und setzen die Differenz $ab - cd$, die Steighöhe der Flüssigkeit gleich h, so erhalten wir zur Bestimmung derselben

$$sfh + m = \pm qf,$$

wobei zu beachten ist, dafs q die mittlere Oberflächenspannung der flüssigen Oberfläche in der Röhre ist, das heifst die Oberflächenspannung für die Einheit der Fläche, vorausgesetzt, dafs dieselbe an allen Punkten der Oberfläche die gleiche ist. Wenn wir das Vorzeichen von q wie im § 71 bestimmen, also positiv setzen, wenn die Fläche konvex nach aufsen, dagegen negativ, wenn die Fläche nach aufsen konkav ist, können wir das doppelte Vorzeichen auf der rechten Seite fortlassen und schreiben

$$sfh + m = - qf.$$

Nehmen wir Röhren von kreisförmigem Querschnitt und solchem Durchmesser, dafs die Oberfläche im Innern derselben ein Kugelsegment ist, so erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung der Oberflächenspannung

$$q = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right),$$

da in einer Kugel alle Krümmungsradien und an allen Stellen gleich und gleich dem Radius ϱ der Kugel sind,

$$q = \frac{H}{\varrho},$$

somit für das Gewicht der in einer solchen Röhre gehobenen Flüssigkeit

$$sfh + m = - \frac{H}{\varrho} f \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit hängt somit ab von dem Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche und dem Querschnitt der Röhre. Dieser Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche läfst sich direkt aus dem Radius der Röhre bestimmen. Ist ab (Fig. 110) die Röhre und usl die Oberfläche der Flüssigkeit, o der Mittelpunkt der kugelförmigen Oberfläche und der Radius der Röhre gleich r, so ist

$$ou = \varrho = \frac{uv}{\cos ouv} = \frac{r}{\cos ouv}.$$

Legen wir nun im Punkte u an die Oberfläche der Flüssigkeit eine Tangente, so bildet diese mit der Röhrenwand nach der Seite der Flüssigkeit hin den Winkel ϑ, welcher für dieselbe Flüssigkeit und für dasselbe

ıl der Röhrenwand konstant ist, da ϑ der, wie wir sahen, unter dieser
setzung konstante Winkel ist, unter welchem die Oberfläche der
keit die Wand der Röhre schneidet. Da nun *ou* senkrecht zur
ıte und *uv* senkrecht zur Röhrenwand *ua* in *u* ist, so folgt, dafs der
vuo das Supplement von ϑ, also gleich Θ ist, somit

$$ou = \varrho = \frac{r}{\cos \Theta}\,.$$

ɩtzen wir diesen Ausdruck in die oben erhaltene Gleichung für das
t der gehobenen Flüssigkeit ein, so wird

$$sfh + m = -H \cdot \cos \Theta \cdot \frac{f}{r} = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{f}{r} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2).$$

ːe Gleichung zeigt unmittelbar, dafs, wenn der Randwinkel $\vartheta < 90^0$,
ssigkeit in der engen Röhre höher steht, da dann cos ϑ und damit
positiven Wert hat, dafs dagegen, wenn $\vartheta > 90^0$ eine Depression
ssigkeit stattfindet.
ı der Querschnitt der Röhre

$$f = r^2 \pi,$$

ıuch

$$sfh + m = H \cdot \cos \vartheta \cdot \pi \cdot r,$$

$$\frac{sfh + m}{2 \pi r} = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3).$$

Fig. 110.

ɜr Nenner auf der linken Seite ist der innere Um-
ɜr Röhre; den Quotienten aus dem Gewichte der
ıen Flüssigkeit und dem Röhrenumfange können
nit bezeichnen als das von der Längeneinheit der
ungslinie zwischen Flüssigkeit und fester Wand
ıe Flüssigkeitsgewicht, und gelangen dann zu dem
lafs dieses Gewicht unabhängig ist von der Weite
ıhre und nur abhängt von der Beschaffenheit der
keit und derjenigen der festen Wand, da die Kon-
H und ϑ nur von dieser abhängen.
ıvidieren wir die Gleichung (2) durch *f*, so wird

$$sh + \frac{m}{f} = H \cdot \cos \vartheta \, \frac{1}{r}\,;$$

ı vorausgesetzten engen Röhren können wir nun das Gewicht des
ıs vernachlässigen und erhalten dann

$$sh = H \cdot \cos \vartheta \, \frac{1}{r}$$

$$h = \frac{H}{s} \cdot \cos \vartheta \, \frac{1}{r} = a^2 \cos \vartheta \, \frac{1}{r}\,,$$

ɾir, nach der von Poisson eingeführten Bezeichnung, $\frac{H}{s} = a^2$ setzen.
ɜ folgt also, dafs bei hinreichend engen cylindrischen Röhren des-
Materials die Steighöhen oder Depressionen einer Flüssigkeit dem
ɪsser der Röhren umgekehrt proportional sind.

Dieser Satz, den schon ältere Physiker aus ihren Beobachtungen ableiteten, so der Jesuit Honoratius Fabry[1]) um die Mitte des 17. Jahrhunderts, ist in neuerer Zeit durch sehr genaue Beobachtungen bestätigt worden, zunächst von Gay-Lussac, welcher auf Anregung von La Place Versuche zur Prüfung der Theorie anstellte[2]). Die Röhren, welche Gay-Lussac anwandte, waren sorgfältig kalibriert und ihr Durchmesser aus dem Gewichte eines Quecksilberfadens von gemessener Länge folgendermafsen bestimmt. Ist die Länge des Quecksilberfadens in der Röhre gemessen gleich l, das Gewicht desselben gleich g, das specifische Gewicht des Quecksilbers gleich s und der Radius der Röhre gleich r, so ist

$$g = r^2 \pi l s$$

$$r = \sqrt{\frac{g}{\pi l s}}.$$

Die Röhren, in welchen die Steighöhen verglichen wurden, waren zugleich in einer durchbohrten Metallplatte befestigt, welche auf den eben abgeschliffenen Rand eines grofsen Glasgefäfses gelegt wurde. Das Gefäfs konnte durch Stellschrauben so gerichtet werden, dafs die Ebene, auf der die Metallplatte lag, genau horizontal und somit die Röhren genau vertikal waren. Nun wurde das Gefäfs mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, die Röhren im Innern durch mehrmaliges Aufsaugen der Flüssigkeit vorsichtig benetzt und dann die Höhe der Flüssigkeitssäulen in den Röhren gemessen.

Die von Gay-Lussac erhaltenen Resultate sind folgende:

Flüssigkeit	Durchmesser der Röhre $2 \cdot r$	Steighöhe h	$2rh$
Wasser	1,294 Millim.	23,379 Millim.	30,262
	1,903 „	15,903 „	30,263
Alkohol vom specif.	1,294 „	9,398 „	12,164
Gew. 0,8196	1,903 „	6,389 „	12,158

Man sieht, dafs die Werte für $2rh$ bei den verschiedenen Beobachtungen fast genau dieselben sind, dafs also wirklich die Steighöhen der Flüssigkeit in verschiedenen Röhren desselben Materials dem Durchmesser der Röhren umgekehrt proportional sind.

Dasselbe Resultat bestätigen die Versuche von Brunner[3]), Desains[4]), Bède[5]), Simon[6]) u. a. für Röhren, deren Querschnitte hinreichend klein sind, so dafs die Voraussetzung einer kugelförmigen Oberfläche erfüllt ist.

Die für das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit erhaltene Gleichung

$$s h f + m = - q f$$

[1]) *Gehlers* physikalisches Wörterbuch. Artikel Kapillarität.
[2]) *Gay-Lussac*, Versuche in *La Place* Théorie capillaire. Supplem. zum 10. Buche der Mécanique céleste. *Gilberts* Annalen Bd. XXXIII. p. 316 ff.
[3]) *Brunner*, Poggendorffs Annalen Bd. LXX.
[4]) *E. Desains*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. LI.
[5]) *Bède*, Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles. T. XXX. 1861.
[6]) *Simon*, Ann. de chim. et de phys. III. Sér. T. XXXII.

können wir immer unmittelbar anwenden, wenn in kapillaren Räumen die Krümmung der Oberfläche und damit die Oberflächenspannung an allen Stellen dieselbe ist; es ist das z. B. auch der Fall zwischen zwei einander sehr nahe gegenüber gestellten parallelen Platten. Dort ist die Flüssigkeitsoberfläche ein Teil einer Cylinderfläche, indem nach der einen Richtung hin die Flüssigkeit gar keine Begrenzung hat. Ein durch die Flüssigkeitsoberfläche parallel den Platten gelegter Schnitt schneidet die Oberfläche demnach in einer geraden Linie, der Krümmungsradius dieses Schnittes ist unendlich grofs. Ein senkrecht zu den Platten gelegter Schnitt schneidet die Oberfläche dagegen in einem Kreisbogen, dessen Radius ϱ sei. Die Gleichung für die Oberflächenspannung

$$q = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)$$

geht daher in diesen Fällen über in

$$q = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot$$

Ist nun (Fig. 111) ab ein Durchschnitt senkrecht zur Ebene der Platten, $ov = ou = \varrho$ der Krümmungsradius des Schnittes, d der Abstand der Platten, so erhalten wir auch hier wieder

$$\varrho = \frac{uv}{\cos ouv} = \frac{d}{2 \cdot \cos \Theta}$$

$$q = -H \cdot \cos \Theta \cdot \frac{1}{d} = H \cos \vartheta \frac{1}{d}$$

und das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit wird

$$shf + m = H \cos \vartheta \frac{1}{d} \cdot f.$$

Nehmen wir ein Stück von der Länge l, so ist $l \cdot d = f$ gleich dem Querschnitt des auf dieser Länge zwischen den Platten eingeschlossenen Raumes, und es wird

Fig. 111.

$$\frac{shf + m}{2l} = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta.$$

Da die Oberfläche der Flüssigkeit jede der beiden Platten in der Länge l berührt, bedeutet die linke Seite der Gleichung wieder das Gewicht der an der Längeneinheit der Berührungslinie gehobenen Flüssigkeit; es ergibt sich für diese somit derselbe Wert wie in kapillaren Röhren, der nur von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und der festen Wand abhängt.

Für die Steighöhe h erhalten wir

$$h + \frac{m}{s} = \frac{H}{s} \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{d} = a^2 \cos \vartheta \frac{1}{d},$$

worin für hinreichend kleine Werte von d das Gewicht m des Meniskus außer Acht gelassen werden kann.

Die Steighöhe zwischen zwei parallelen Platten ist sonach umgekehrt proportional dem Abstande der beiden Platten; oder die Steighöhe zwischen

parallelen Platten ist halb so grofs als in Röhren gleichen Durchmessers. Der Versuch bestätigt dies; denn Gay-Lussac fand bei den schon vorhin erwähnten Messungen für einen Abstand der Platten von 1,069 Millimeter die Steighöhe des Wassers gleich 13,574 Millimeter, woraus das Produkt $dh = 14{,}524$ sich ergibt, welches nur wenig von der Hälfte des Wertes von $2rh = 30{,}262$ abweicht.

Ist die Krümmung der Oberfläche in einem Raume nicht an allen Stellen dieselbe, so läfst sich das Gewicht der ganzen gehobenen Flüssigkeit nicht so einfach berechnen, wohl aber die Steighöhe an irgend einer Stelle dieses Raumes. Denn ist für irgend ein Flächenelement df der gröfste Krümmungsradius R, der kleinste R_1, so gilt für dieses unmittelbar die § 73 abgeleitete Gleichung

$$shdf = -\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)df,$$

da, wenn wir das Flächenelement uns unendlich klein denken, das Gewicht des Meniskus gleich Null ist; es ergibt sich daraus

$$sh = -\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \qquad h = -\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Man kann hiernach z. B. sehr leicht die Steighöhen an den verschiedenen Stellen des Zwischenraumes zwischen zwei Platten erhalten, welche (wie Fig. 112) so aufgestellt sind, dafs sie sich in einer vertikalen Linie schneiden, so dafs also ihre einander zugewandten Flächen mit einander einen sehr kleinen Winkel bilden. Bezeichnen wir den Abstand a eines Punktes in der Halbierungsebene des Winkels von dem Scheitel des Winkels mit x, so ist der Abstand x der Platten in diesem Punkte

Fig. 112.



$$d = c \cdot x,$$

wenn c eine Konstante bedeutet, deren Wert von der Neigung der Platten gegen einander abhängt. Da wir den Winkel, den die Platten bilden, als klein voraussetzen, so ist der Abstand der Platten überall so klein, dafs wir den senkrecht zur Halbierungsebene des Winkels durch die Oberfläche geführten Schnitt als einen Kreisbogen ansehen dürfen, dessen Radius dann gerade wie bei parallel gestellten Platten gegeben ist durch

$$\varrho = \frac{d}{2\cos\Theta} = \frac{cx}{2\cos\Theta} = -\frac{cx}{2\cos\vartheta}.$$

Dieser Krümmungsradius ist überall der kleinste; die Halbierungsebene des Winkels schneidet die Oberfläche nach der schwächsten Krümmung, deren Radius ein überall so grofser ist, dafs wir seinen reciproken Wert gegenüber dem reciproken Wert des eben bestimmten kleinsten Krümmungsradius vernachlässigen dürfen. Dann ergibt sich für die Höhe h in einem Abstande x von der Schnittlinie der Platten

$$h = \frac{a^2\cos\vartheta}{cx}.$$

Es ergibt sich somit, dafs die Steighöhen der Entfernung des betrachten Punktes a von dem Scheitel des Winkels umgekehrt proportional sind, ler dafs die Halbierungsebene des Winkels die Oberfläche in einer gleichitigen Hyperbel schneidet, deren Asymptoten die Vertikale, in welcher e Innenseiten der Platten sich schneiden, und die Horizontale sind, welche . der Halbierungsebene der Winkel liegt. Denn es werden

$$\text{für } x = 0 \quad h = \infty \quad \text{und für } h = 0 \quad x = \infty.$$

Eine Messung der zusammengehörigen Werte von h und x bei der ig. 112 dargestellten Zusammenstellung bestätigt diese Folgerung.

In ähnlicher Weise können wir die Steighöhe an einer vertikalen ebenen 'and, die Gestalt der Oberfläche der an der Wand emporgehobenen Flüssigit und das Gewicht dieser Flüssigkeit erılten. Sei Fig. 113 AB ein Durchschnitt r vertikalen ebenen Wand, und CD ein ırchschnitt durch die Oberfläche der an r Wand emporgezogenen Flüssigkeit. Die eighöhe h der Flüssigkeit in einem Punkte ist dann

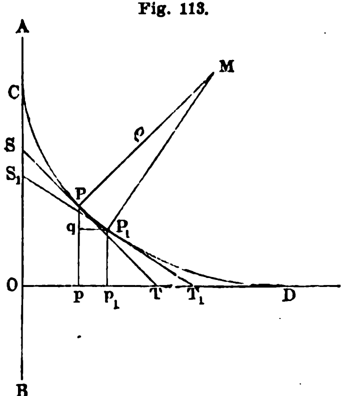


Fig. 113.

$$h = -\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Ist die Wand eben, so schneidet ein r Wand parallel geführter Schnitt die erfläche in einer geraden Linie, der Krümıngsradius dieses Schnittes ist also undlich grofs, sein reciproker Wert somit ich Null. Wir erhalten daher für die eighöhe im Punkte P, wenn wir den Krümmungsradius des Schnittes CD Punkte P mit ϱ bezeichnen,

$$h = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Beziehen wir die Schnittkurve auf ein rechtwinkliges Koordinatenstem, dessen Anfangspunkt im Punkte O liegt, wo die passend verlängerte rizontale Flüssigkeitsfläche die Wand schneiden würde, und dessen Axen e horizontale OD und die vertikale OA sind, so würden wir die Gestalt s Schnittes CD und damit die der flüssigen Oberfläche erhalten, wenn ir den Krümmungsradius der Schnittkurve im Punkte P durch die Kodinaten dieses Punktes $Pp = h$ und $pO = x$ ausdrücken würden. Die urchführung dieser Rechnung ist aber ohne ausgedehnte Anwendung der öhern Analysis nicht möglich; wir begnügen uns deshalb damit, die Steigöhe in einer etwas andern Weise auszudrücken, welche uns gestattet, die teighöhe im Punkte C, wo die Schnittkurve die Wand schneidet, und das ewicht der gehobenen Flüssigkeit zu berechnen.

Wir drücken zu dem Ende den Krümmungsradius ϱ aus durch den 'inkel χ, welchen die im Punkte P an die Schnittkurve gelegte Tangente T mit der Axe OA bildet, also durch den Winkel TSO. Für ein undlich kleines zwischen den Punkten P und P_1 gelegenes Stück ds der hnittkurve fällt dieselbe mit dem an P gelegten Krümmungskreise zu mmen. Ist also M der Mittelpunkt des Krümmungskreises, und bezeichne

wir den Winkel PMP_1, den die beiden von M nach P und P_1 gezogenen Radien mit einander bilden, mit $d\tau$, so ist

$$ds = \varrho \cdot d\tau$$

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Legen wir nun in dem Punkte P_1 die Tangente $S_1 T_1$ an die Schnittkurve, so ist, da die Tangenten eines Kreises zu den Radien senkrecht sind, der Winkel $d\tau$, den die beiden Radien mit einander bilden, gleich dem, welchen die beiden Tangenten mit einander bilden. Dieser Winkel ist aber gleich der Zunahme, welche der Winkel χ erfährt, welchen die Tangente ST mit OA bildet, wenn dieselbe anstatt an den Punkt P an den folgenden Punkt P_1 gelegt wird. Denn der Winkel $T_1 S_1 O = \chi + d\chi$ ist Außenwinkel des von den beiden Tangenten gebildeten Dreiecks; der eine Gegenwinkel ist $TSO = \chi$, der andere der Winkel $d\tau$, welchen die beiden Tangenten mit einander bilden. Darnach ist

$$d\tau = d\chi,$$

somit

$$\varrho = \frac{ds}{d\chi}.$$

Ziehen wir nun von dem Punkte P_1 die Senkrechte $P_1 q$ auf die Ordinate Pp, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $PP_1 q$ der Winkel $qPP_1 = \chi$, somit

$$\frac{Pq}{PP_1} = \cos\chi.$$

Pq ist die Änderung der Steighöhe h, wenn wir in der Schnittkurve von einem Punkte zu dem nächstfolgenden übergehen. Setzen wir diese Änderung gleich dh, so wird, da $PP_1 = ds$,

$$\frac{dh}{ds} = \cos\chi; \qquad ds = \frac{dh}{\cos\chi}.$$

Damit wird dann

$$\varrho = \frac{dh}{\cos\chi\, d\chi}$$

und

$$h = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\cos\chi\, d\chi}{dh},$$

oder

$$2h \cdot dh = -a^2 \cos\chi\, d\chi.$$

Da sich nun h um dh ändert, wenn sich χ um $d\chi$ ändert, so folgt aus dieser Gleichung nach schon mehrfach benutzten Sätzen der Einleitung und den Regeln E 1 und E 4

$$h^2 = C - a^2 \cdot \sin\chi.$$

Die Konstante C bestimmt sich, wenn wir beachten, daſs dort, wo die Flüssigkeit horizontal, somit $\chi = 90^0$ ist, die Steighöhe $h = 0$ ist, somit

$$0 = C - a^2; \quad C = a^2.$$

Damit wird

$$h^2 = a^2 (1 - \sin\chi).$$

In dem Punkte C, in welchem die Schnittkurve die Wand schneidet, ıt der Winkel χ gleich dem Winkel ϑ; dort wird somit die Steighöhe h_0

$$h_0 = a \cdot \sqrt{1 - \sin\vartheta} = \sqrt{\frac{H}{s}(1 - \sin\vartheta)}.$$

Die Steighöhe hängt also nur ab von der Beschaffenheit der Flüssig- eit und der festen Wand.

Das Volumen der an einer Wandstrecke von der Länge l gehobenen lüssigkeit erhalten wir, wenn wir die Fläche CBO mit der Länge l mul- plicieren. Die Fläche CBO ist gleich der Summe aller der unendlich leinen Vierecke Ppp_1P_1, in welche wir die Fläche zerlegen, wenn wir ıs von allen Punkten P der Kurve die Ordinaten Pp gezogen denken. ennen wir die Abstände dieser Ordinaten dx, so ist $h \cdot dx$ der Flächen- halt eines jeden solchen Vierecks, und die Summe aller Produkte $h\,dx$, ənn h von h_0 dem Werte an der Wand bis zu Null abnimmt, liefert uns nn die ganze Fläche. Ersetzen wir in dem Produkte $h\,dx$, h durch den s der Gleichung

$$h = -\frac{a^2}{2} \cdot \cos\chi \frac{d\chi}{dh}$$

h ergebenden Wert, so wird

$$h \cdot dx = -\frac{a^2}{2} \cdot \cos\chi \cdot d\chi \cdot \frac{dx}{dh}.$$

In diesem Ausdrucke ist unter Beachtung, dafs mit wachsendem x die he h kleiner wird, für ein positives dx also dh negativ ist,

$$\frac{dx}{dh} = \frac{qP_1}{qP} = -\operatorname{tang}\chi;$$

ıit wird

$$h\,dx = \frac{a^2}{2} \cdot \cos\chi \cdot \operatorname{tang}\chi \cdot d\chi = \frac{a^2}{2} \sin\chi\, d\chi,$$

l die Fläche CDO wird

$$CDO = \int_{\chi=\vartheta}^{\chi=\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \sin\chi\, d\chi,$$

dem Werte $x = 0$ oder $h = h_0$ der Wert $\chi = \vartheta$ und dem Werte $h = 0$ Wert $\chi = \frac{\pi}{2} = 90^0$ entspricht. Die Summe wird nach E VIII und E 3

$$CDO = -\frac{a^2}{2}\left\{\cos 90^0 - \cos\vartheta\right\} = \frac{a^2}{2} \cdot \cos\vartheta.$$

Das für die Länge l gehobene Volumen erhalten wir, wenn wir diese ıche mit l multiplicieren, und das Gewicht, wenn wir das Volumen mit Dichtigkeit s der Flüssigkeit multiplicieren. Das für die Längeneinheit ıobene Flüssigkeitsgewicht wird demnach

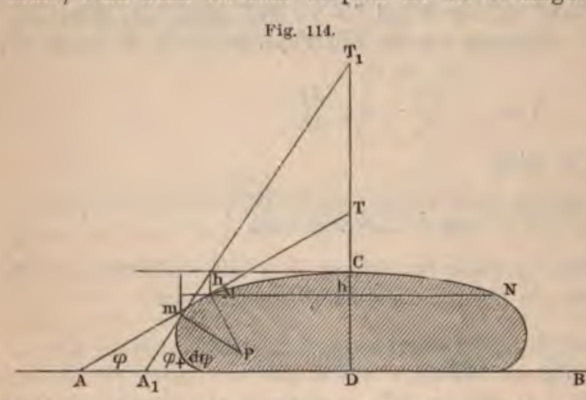
$$G = \frac{a^2 s}{2} \cdot \cos\vartheta = \frac{H}{2} \cdot \cos\vartheta.$$

Wir gelangen also auch hier zu demselben Resultat, dafs das Gewicht der an der Längeneinheit gehobenen Flüssigkeit nur von den beiden Konstanten H und ϑ abhängig ist, ein Satz, der ganz allgemein gilt, welches auch die Gestalt des Raumes ist, in welchem die Flüssigkeit emporsteigt.

§ 75.

Bildung von Tropfen auf horizontaler Ebene. Wenn man auf eine horizontale Ebene eine Flüssigkeit möglichst langsam auffliefsen läfst, so sammelt sich dieselbe auf der Ebene in Form von Tropfen an, deren Gestalt ebenfalls durch die Kohäsion der Flüssigkeit und ihre Adhäsion an der Substanz der Unterlage bedingt ist. Zunächst erkennt man leicht, dafs ein solcher Tropfen durch der Ebene parallele Schnitte in Kreisen geschnitten werden mufs, dafs also seine Oberfläche eine Rotationsfläche sein mufs; denn auch bei dem Tropfen ist die Bedingung des Gleichgewichtes, dafs in allen Punkten der Oberfläche die normal zu derselben nach innen und nach aufsen gerichteten Kräfte einander das Gleichgewicht halten müssen. Denken wir uns nun durch einen Tropfen (Fig. 114) eine mit der Unterlage AB parallele Ebene MN gelegt, so ist in den Punkten der Oberfläche, welche von dem Schnitte getroffen werden, der von innen nach aufsen gerichtete Druck überall derselbe und zwar gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Höhe gleich ist dem Abstande des höchsten Punktes C des Tropfens von der Ebene MN. Es mufs deshalb auch in allen Punkten des Schnittes der normal nach innen gehende Druck derselbe, oder es mufs die Oberfläche in allen Punkten des Schnittes MN gleich gekrümmt sein. Das ist aber nur der Fall, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Axe durch den Scheitel C des Tropfens geht.

Fig. 114.



Zur Untersuchung der Gestalt des Tropfens genügt es deshalb, die Gestalt einer durch die Axe CD des Tropfens gelegten Schnittkurve zu bestimmen.

Wir gelangen dazu in folgender Weise. Der im Punkte M gegen das Innere des Tropfens gerichtete Normaldruck ist bezogen auf die Flächeneinheit

$$P = K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Diesem Drucke hält der an derselben Stelle von innen nach aufsen gerichtete Druck das Gleichgewicht, der sich zusammensetzt aus dem Nor[illegible]ck in dem höchsten Punkte des Tropfens und dem Gewichte eine[illegible] [illegible]itssäule, deren Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist, un[illegible]

ren Höhe gleich ist dem vertikalen Abstande h des höchsten Punktes des ropfens von dem Punkte M.

Ist der Tropfen nicht zu klein, so ist im Punkte C die Oberfläche des ropfens eine horizontale Ebene; der Normaldruck ist somit gleich K. Ist e Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich s, so ist der von innen nach aufsen richtete Druck

$$P = K + h \cdot s.$$

Damit wird die die Gestalt der Oberfläche liefernde Gleichgewichts-dingung

$$h \cdot s = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Ist die Tropfengröfse ziemlich beträchtlich, so kann man den reci-oken Wert des Krümmungsradius jenes Schnittes, den wir in M senkrecht dem Schnitte $MCND$ legen, vernachlässigen; bezeichnen wir dann den rümmungsradius des Schnittes $MCND$ im Punkte M mit ϱ, so wird die eichgewichtsbedingung

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Wir können nun, gerade so wie im vorigen Paragraphen, den Wert n ϱ durch h, den Winkel φ, welchen die in M an den Schnitt gelegte ngente mit der Horizontalen bildet, und den Zuwachs, welchen dieser inkel φ erfährt, wenn wir vom Punkte M zu dem nachfolgenden Punkte des Schnitts übergehen, dessen Tiefe unterhalb der an C gelegten Tan-nte $h + dh$ ist, ausdrücken. Ist nämlich die Länge des Elementes Mm ich ds, und der Winkel, den die beiden nach M und m gezogenen Krüm-mgsradien im Krümmungsmittelpunkte mit einander bilden, $d\tau$, so ist nächst wieder

$$ds = \varrho\, d\tau.$$

Nun ist $d\tau$ gleich dem Winkel, den die beiden Tangenten AT und $A_1 T_1$ t einander bilden, von denen die erste im Punkte M, die zweite im nkte m an den Schnitt gelegt ist. Dieser Winkel ist aber gleich dem wachs $d\varphi$ des Winkels φ, den die Tangente mit der Horizontalen bildet. mnach ist

$$ds = \varrho\, d\varphi.$$

Andererseits ist aber

$$\frac{dh}{ds} = \sin\varphi;$$

nit ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{dh},$$

d

$$2h\, dh = \frac{H}{s} \cdot \sin\varphi\, d\varphi.$$

Daraus ergibt sich aber

$$h^2 = -\frac{H}{s} \cdot \cos\varphi -$$

n

Zur Bestimmung der Konstanten erhalten wir, da für den ob Punkt des Tropfens, für welchen $h = 0$ ist, auch der Winkel φ gl wird, da die in C an den Schnitt gelegte Tangente horizontal ist,

$$0 = -\frac{H}{s} + \text{const.}$$

$$\frac{H}{s} = \text{const.},$$

somit

$$h^2 = \frac{H}{s}(1 - \cos\varphi).$$

Um die Höhe des ganzen Tropfens zu erhalten, müssen wir für Winkel einsetzen, unter welchem der Schnitt des Tropfens die horiz Fläche schneidet. Nach § 72 ist der Winkel, unter welchem eine Fl keit die feste Wand schneidet, immer derselbe Randwinkel ϑ, dort v Tropfen die Ebene schneidet ist demnach

$$\varphi = \vartheta,$$

somit wird die Höhe T des Tropfens gegeben durch

$$T^2 = \frac{H}{s}(1 - \cos\vartheta).$$

Für Flüssigkeiten, welche die Wand benetzen, ist der Winkel ϑ kleiner als 90^0, da diese Flüssigkeiten an einer vertikalen Wand ein kave Oberfläche bilden; es ist deshalb $\cos\vartheta$ positiv, somit

$$T < \sqrt{\frac{H}{s}}.$$

Bei Flüssigkeiten, welche die Unterlage nicht benetzen, die a einer vertikalen Wand eine nach oben konvexe Oberfläche bilden, gröfser als 90^0, somit $\cos\vartheta$ negativ und

$$T > \sqrt{\frac{H}{s}}.$$

Da nun bei solchen Tropfen der Winkel φ, welcher an der Kup Tropfens gleich Null ist, stetig, wenn man auf die Schnittkurve l Basis des Tropfens fortschreitet, bis zu dem Werte $\varphi = \vartheta > 90^0$ v so mufs an einer Stelle der Schnittkurve $\varphi = 90^0$ werden, also die Ta senkrecht stehen. An dieser Stelle hat somit der Tropfen seinen g Durchmesser. Nennen wir den vertikalen Abstand dieser Stelle v Tropfenkuppe t, so ist dort

$$t = \sqrt{\frac{H}{s}} = a.$$

Aus den Werten von T und t erhält man somit

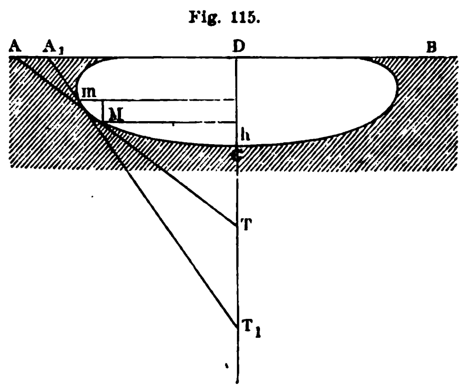
$$T^2 = t^2(1 - \cos\vartheta)$$

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{T^2}{t^2}.$$

Die Beobachtung der Höhen T des ganzen Tropfens und t des Abstandes : Stelle, an welcher der Tropfen den gröfsten Durchmesser hat, von der ppe des Tropfens, liefert also direkt und getrennt von einander die erte der Gröfse a und des Winkels ϑ, wenn die Flüssigkeiten die Wand :ht benetzen.

Dasselbe, was Tropfen für :ht benetzende Flüssigkeiten ben, liefern uns Luftblasen, :lche wir unter einer ebenen rizontalen Fläche in einer betzenden Flüssigkeit bilden. Ist B (Fig. 115) etwa eine Glasohe, welche auf Wasser sich bedet, und bringen wir eine Luftse unter die Fläche, so mufs se Luftblase dieselbe Gestalt nehmen, welche ein die Unterje nicht benetzender Tropfen nimmt, wie eine der im Beginne ses Paragraphen gemachten ganz gleiche Überlegung ergibt. Die Gleichwichtsbedingung für die Oberfläche ergibt sich in ganz ähnlicher Weise. Punkte M ist der gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Normaldruck

Fig. 115.



$$P = K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

In dem tiefsten Punkte C der Blase ist der Normaldruck, wenn die ise nicht zu klein ist, gleich K; bezeichnen wir die vertikale Erhebung Punktes M über C mit h und die Dichtigkeit der Flüssigkeit mit s, so anen wir diesen Druck K gleich setzen

$$K = P + h \cdot s,$$

der Druck in C um das Gewicht der Flüssigkeitssäule von der Höhe h sfser sein mufs als in dem um h höher liegenden Punkte M. Diese bei- Gleichungen liefern dann, genau wie bei dem Tropfen,

$$h \cdot s = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Drücken wir den Krümmungsradius ϱ wieder durch den Winkel $D = \varphi$ aus, so wird ganz in derselben Weise wie vorhin

$$h^2 = -\frac{H}{s} \cdot \cos\varphi + \text{const.}$$

Dort wo die Grenzfläche der Blase die Platte AB schneidet, wird φ ich dem Winkel Θ, also in diesem Falle gleich dem Supplement des ndwinkels ϑ. Für den tiefsten Punkt C der Blase wird $h = 0$ und ichzeitig $\varphi = 0$ $\cos\varphi = 1$.

Demnach ist auch jetzt

$$-\frac{H}{s} +$$

Daraus ergibt sich

$$h^2 = \frac{H}{s}(1 - \cos\varphi).$$

Da die Wand der Blase die Fläche AB unter dem Winkel Θ schn
so wird die Höhe T der Blase

$$T^2 = \frac{H}{s}(1 - \cos\Theta) = \frac{H}{s}(1 + \cos\vartheta).$$

An der Stelle des gröfsten Durchmessers wird $\varphi = 90^0$; cos φ
Nennen wir den vertikalen Abstand dieser Stelle von der Kuppe der Bl
so ist

$$t^2 = \frac{H}{s},$$

somit

$$\frac{T^2}{t^2} = 1 + \cos\vartheta = 2\cos^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{T\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{t}.$$

Wie demnach aus der Beobachtung von Tropfen der Flüssigk
welche die Unterlage nicht benetzen, kann aus der Beobachtung von
blasen zwischen einer Ebene und einer dieselbe benetzenden Flüssi
jede der Gröfsen H und ϑ gesondert bestimmt werden.

§ 76.

Kapillaritätskonstanteu. Die in den letzten Paragraphen darg
Theorie der Kapillarerscheinungen zeigt, dafs dieselben wesentlich vo
Gröfsen a^2 und ϑ abhängig sind, von denen die erstere, oder genaue
Produkt derselben in die Dichtigkeit der Flüssigkeit, die Gröfse H
Mafs für die Kohäsion dieser Flüssigkeit ist, da sie uns die Oberflä
spannung in der Flächeneinheit einer Kugelfläche gibt, deren Radiu
Einheit gleich ist; während die andere Gröfse, der Winkel ϑ, von dem
hältnisse der Adhäsion der Flüssigkeit an die feste Wand und der Koh
der Flüssigkeiten abhängig ist. Die Bestimmung dieser Konstanten au
verschiedenen kapillaren Erscheinungen ist deshalb gleichzeitig eine e
mentelle Bestätigung dieser Theorie, da die verschiedenen Erschein
zu denselben Werten von a^2 oder H und ϑ führen müssen.

Für solche Flüssigkeiten, welche die Körper vollkommen benetze
der Winkel ϑ sofort gegeben, er ist gleich 0^0. Denn bei einer Flüssi
welche einen festen Körper vollkommen benetzt, haftet die letzte Fl
keit einfach an der Wand wie eine Haut, das letzte Flüssigkeitseleme
somit der Wand parallel. Da wir den Winkel ϑ von der innern i
Flüssigkeit tauchenden Seite der Wand gerechnet haben, so wird den
$\vartheta = 0^0$.

Für Flüssigkeiten, welche eine feste Wand vollkommen ben
können wir deshalb zunächst aus den Steighöhen in Röhren oder an
Wand die Konstante a^2 oder H, welche die Kohäsion der Fl
ist, ableiten.

In § 74 erhielten wir für das Gewicht der in einer Röhre vom Radius hobenen Flüssigkeit den Ausdruck

$$h \cdot s \cdot f + m = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{f}{r},$$

in m das Gewicht des Flüssigkeitsmeniskus ist, welcher über dem tiefsten kte der nach aufsen konkaven Flüssigkeitsoberfläche erhoben ist. Für Fall, dafs der Randwinkel 0^0 ist, läfst sich das Gewicht dieses Menis- in solchen cylindrischen Röhren, in welchen die Oberfläche ein Kugel- ment ist, leicht bestimmen. Wenn nämlich die kugelförmige Oberfläche Röhrenwand unter einem Winkel von 0^0 schneidet, so ist dieselbe eine lbkugel, deren Radius gleich dem Radius der Röhre ist. Das Volumen Meniskus ist somit gleich demjenigen eines Cylinders, dessen Querschnitt ich ist dem Querschnitt f der Röhre, dessen Höhe gleich ist dem Radius r Röhre weniger dem Volumen der Halbkugel vom Radius r. Es ist somit

$$m = (f \cdot r - \tfrac{2}{3} r^3 \pi)\, s = f\,(r - \tfrac{2}{3} r) \cdot s = \tfrac{1}{3} f r \cdot s.$$

Damit wird die Gleichung für das gehobene Gewicht

$$h \cdot s \cdot f + \tfrac{1}{3} r \cdot s \,.\, f = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{f}{r},$$

ir, indem wir auf beiden Seiten durch $s \cdot f$ dividieren, $\vartheta = 0^0$ setzen,

$$h + \tfrac{1}{3} r = \frac{H}{s} \cdot \frac{1}{r} = a^2 \frac{1}{r}$$

$$r\,(h + \tfrac{1}{3} r) = a^2,$$

er die Kapillaritätskonstante a^2 ist gleich dem Produkte aus der um ein ittel des Radius vermehrten Steighöhe in den Radius der Röhre, wenn Röhre so enge ist, dafs die Oberfläche der Flüssigkeit eine Kugelfläche Darin, dafs die Konstante hier als das Produkt zweier Dimensionen ritt, liegt auch der Grund, dafs sie als a^2 bezeichnet ist. Wird der dius $r = 1^{mm}$, so wird

$$a^2 = (h + \tfrac{1}{3}),$$

er die Konstante a^2 kann auch als die um $\frac{1}{3}^{mm}$ vermehrte Steighöhe in em Rohre von 2^{mm} Durchmesser definiert werden, vorausgesetzt, dafs rt die kapillare Oberfläche eine Kugelfläche wäre.

Für die Steighöhe an einer vertikalen Wand erhielten wir in § 74 Ausdruck

$$h_0 = \sqrt{\frac{H}{s}(1 - \sin \vartheta)} = a \cdot \sqrt{1 - \sin \vartheta}.$$

Ist der Winkel $\vartheta = 0^0$, so ist $\sin \vartheta = 0$; somit wird für vollkommen netzende Flüssigkeiten

$$h_0 = a; \quad h_0^2 = a^2,$$

ir die Kapillaritätskonstante a^2 ist ebenfalls gleich dem Quadrate der ighöhe der Flüssigkeit an einer vertikalen ebenen Wand.

Zur Bestimmung der Konstanten a^2 genügt es deshalb, die Steighöhe er Flüssigkeit in einem cylindrischen Rohr von bekanntem, aber sehr inem Radius r oder an einer ebenen Wand, welche vollkommen von der ssigkeit benetzt werden, zu messen, und in dieser Weise ist dieselbe für e nicht unbeträchtliche Anzahl von Flüssigkeiten unter Benutzung von

Glasröhren und Glaswänden von Frankenheim[1]), **Mendéléeff**[2]), Quincke[4]) u. a. bestimmt worden.

Für das Gewicht der von der Längeneinheit der Berühru zwischen Flüssigkeit und fester Wand getragenen Flüssigkeit erhielt im § 74 ganz allgemein

$$G = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta = \alpha \cdot \cos \vartheta.$$

Ist ϑ gleich 0^0, so wird

$$G = \frac{H}{2} = \alpha = \tfrac{1}{2} a^2 s,$$

oder die Hälfte der die Oberflächenspannung messenden Konstante bei vollkommen die Wand benetzenden Flüssigkeiten gleich dem Ge der von der Längeneinheit der Berührungslinie über das Niveau der F keiten erhobenen Flüssigkeit.

Man kann die Konstante $\alpha = \frac{H}{2}$ ebenso als die Konstante der larität einer Flüssigkeit bezeichnen, wie es in neuerer Zeit besonde Wilhelmy und Quincke geschehen ist.

Wilhelmy[5]) hat diese Konstante nach einer sehr einfachen Meth bestimmen und gleichzeitig die nach der Poissonschen Theorie an den den der eingetauchten Körper eintretende Verdichtung zu messen ve Wilhelmy hing feste Körper, planparallele Platten oder Cylinder, Dimensionen vorher genau gemessen waren, an den einen Arm einer Wage und bestimmte ihr Gewicht. Er liefs diese Körper dann bis zu bestimmten Tiefe, so dafs ein genau bekanntes Volumen derselbe tauchte, in die zu untersuchende Flüssigkeit hinab. Wegen der Me durch die Wilhelmy dieses Volumen bestimmte, müssen wir auf di handlung selbst verweisen. Es wurde dann das Gewicht des eingeta Körpers beobachtet. Dieses Gewicht ist gleich dem Gewichte des K in der Luft, weniger dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit plu Gewichte der kapillar gehobenen und der an der Oberfläche verdic Flüssigkeit. Denn diese beiden Flüssigkeitsmengen werden von dem l getragen. Ist demnach Π das Gewicht des eingetauchten Körpers, Gewicht in der Luft, G das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, fe der Umfang des festen Körpers im Niveau der Flüssigkeit, taucht die Fläche O des festen Körpers ein und nennen wir β das Gewicht der Einheit der Oberfläche verdichteten Flüssigkeit, so ist

$$\Pi = P - G + \alpha\lambda + \beta O.$$

Um in dieser Weise die beiden gesuchten Gröfsen α und β stimmen, wird bei weiteren Versuchen der Körper tiefer einge Nennen wir die bei einem zweiten Versuche eingetauchte Oberfläc das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit G_1, so wird

$$\Pi_1 = P - G_1 + \alpha\lambda + \beta O_1.$$

---

[1]) *Frankenheim*, Kohäsionslehre. Breslau 1835. p. 79 ff.
[2]) *Mendéléeff*, Comptes rendus. T. L. p. 52. T. LI. p. 97.
[3]) *Bède*, Mémoires couronnés de Bruxelles. T. XXX.
[4]) *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXV. Bd. CXXXIX.
[5]) *Wilhelmy*, Poggend. Ann. Bd. CXIX, CXXI, CXXII.

ıs diesen beiden Beobachtungen ergibt sich

$$\beta = \frac{G_1 - G + \Pi_1 - \Pi}{O_1 - O},$$

t dem so bestimmten β erhalten wir dann α

$$\alpha = \frac{\Pi + G - P - \beta O}{l}.$$

Vilhelmy schloſs aus seinen Versuchen, daſs in der That an der Ober- der festen Körper eine sehr wohl meſsbare Verdichtung stattfände, ıſs dieselbe je nach der Natur des festen Körpers und der Flüssigkeit ieden sei. Wilhelmy gibt folgende Werte von β in Milligrammen auf ıadratmillimeter.

sigkeiten	Werte von β an					
	Glas	Platin	Silber	Messing	Zink	Aluminium
ılalkohol	0,01259	0,00641	0,01512	0,02326	0,00709	0,00716
·lalkohol	0,01242	0,00449	0,01160	0,00497	0,00786	0,00657
ır.	0,01186	0,01180	—	—	—	—
on	0,01290	0,00220	—	—	—	—
gsäure .	0,00875	0,00169	—	—	—	—
gäther .	0,00051	0,00521	—	—	—	—

Es zeigt sich hier keineswegs, was man zunächst hätte vermuten , daſs die Verdichtung mit der Dichtigkeit des festen Körpers zu- t, im Gegenteil sind die Verdichtungskoefficienten für den dichtesten r, das Platin, im allgemeinen am kleinsten.

Für die Konstante α ergab sich nach diesen Versuchen ein verschie- Wert je nach dem festen Körper, der in die Flüssigkeit eingetaucht trotzdem alle Körper von den untersuchten Flüssigkeiten benetzt wur- Weiter schloſs Wilhelmy, daſs, der Theorie entgegen, selbst die Form örper, ob Platte, ob Cylinder, auf den Wert von α von Einfluſs sei. nde Tabelle enthält einige von Wilhelmy für Äthylalkohol und Amyl- ıl erhaltene Werte von α und β für verschiedene Platten und Cylinder.

e der festen Körper	α		β	
	Äthylalkohol	Amylalkohol	Äthylalkohol	Amylalkohol
ərplatte	2,444	2,542	0,015 12	0,011 60
ferplatte.	2,410	2,396	0,004 67	0,004 05
inplatte	2,395	2,401	0,006 41	0,004 49
platte	2,325	2,407	0,012 59	0,012 42
singplatte	2,448	2,551	0,023 26	0,004 97
singcylinder mm				
ırchmesser 14,945	2,983	3,098	0,024 95	0,028 27
„ 5,009	2,358	2,477	0,020 05	0,015 23
„ 1,529	2,301	2,299	0,009 00	0,006 75

Gegen die von Wilhelmy aus seinen Versuchen gezogenen Schlüsse, daſs an den Oberflächen der festen Körper eine so erhebliche Verdichtung der Flüssigkeiten stattfände, und daſs der Wert der Konstante α von der Gestalt der Oberflächen abhängig sei, sind später sehr erhebliche Einwände gemacht worden. Röntgen[1]) bestimmte zunächst den Gewichtsverlust eines sehr leicht spaltbaren Gypsstückes von 3600 Quadratmillimeter Oberfläche bei dem Eintauchen in Weingeist. Dieselbe Gypsplatte wurde dann in 11 einzelne Platten zerteilt, so daſs jetzt die Oberfläche des eingetauchten Gypses um 36000^{qmm} zunahm. Nimmt man nun auch den kleinsten, von Wilhelmy für Äthylalkohol gegebenen Verdichtungskoefficienten, nämlich 0,005 an, so müſste in dem letzten Falle der Gewichtsverlust $0{,}180^{gr}$ weniger betragen haben. Röntgen fand aber den Gewichtsverlust im letzten Falle genau gleich demjenigen im ersten Falle, so daſs er gar keine meſsbare Verdichtung beobachten konnte. Dasselbe ergab ein Versuch mit Glas. An der Gebläselampe wurde Glas zu äuſserst feinen Häutchen ausgeblasen. Von diesen Häutchen hatte eine Gewichtsmenge von $0{,}730^{gr}$ nach einer Schätzung mindestens 80000^{qmm} Oberfläche. Mit dem von Wilhelmy gegebenen Verdichtungskoefficienten 0,012 59 hätte diese Glasoberfläche etwa 1000^{mgr} Alkohol auf sich verdichten müssen. Setzt man das specifische Gewicht des Glases gleich 2,5, das des Alkohols gleich 0,8, so verdrängt dieses Glas beim Eintauchen in Alkohol etwa 250^{mgr} Alkohol. Die verdichtete Flüssigkeit hätte also etwa das Vierfache der verdrängten Flüssigkeit gewogen, oder dieses Glas hätte bei dem Eintauchen in Alkohol 750^{mgr} mehr wiegen müssen als in der Luft. Es ergab sich indes eine Gewichtsabnahme von 231^{mgr}, aus der sich das specifische Gewicht des Glases gleich 2,53 berechnet, während sich für ein massives Stück desselben Glases das specifische Gewicht 2,51 ergab. Es lieſs sich also überhaupt keine merkliche Verdichtung beobachten.

Zu gleichen Resultaten gelangte Schleiermacher[2]) bei einer Untersuchung über die auf benetzten Körpern verdichtete Flüssigkeitsmenge, welche, wenn sie so groſs ist wie Wilhelmy sie annahm, auf specifische Gewichtsbestimmungen von beträchtlichem Einflusse sein kann. Schleiermacher findet, daſs die Verdichtung der Flüssigkeiten höchstens 0,0001 auf das Quadratmillimeter betragen könne, und daſs sich ebenso wenig Unterschiede derselben für die verschiedenen Substanzen erkennen lassen.

Volkmann[3]) hat dann die Folgerung Wilhelmys geprüft, daſs die Gestalt des eingetauchten Körpers auf den Wert der Konstanten von Einfluſs sei. Zunächst weist derselbe nach, daſs die Verdichtung der Flüssigkeiten an den Oberflächen, welche Wilhelmys Versuche zu ergeben schienen, sich vollständig erklären lassen, wenn man annehme, daſs Wilhelmys Bestimmung des specifischen Gewichtes des Alkohol mit einem kleinen Fehler behaftet sei, und daſs dieselbe Annahme auch die an verschiedenen Formen derselben Substanz gefundenen Werte von α sich sehr viel näher bringe, weiter, daſs die Annahme eines kleinen konstanten Einstellungsfehlers bei Bestimmung der Grenze, bis zu welcher die Körper eingetaucht seien, die Unterschiede der gefundenen Werte von α fast zum Verschwinden bringe.

1) *Röntgen*, Wiedem. Ann. Bd. III. p. 321.
2) *Schleiermacher*, Wiedem. Ann. Bd. VIII. p. 52.
3) *Volkmann*, Wiedem. Ann. Bd. XI. p. 177.

Um einen etwaigen Einflufs der Krümmung der Oberfläche zu unter-
ien, bestimmte Volkmann dann mit der gröfsten Sorgfalt die Steighöhen
ger Flüssigkeiten zwischen parallelen Platten, die in verschiedenen Ab-
den einander gegenüber standen, und in Röhren verschiedenen Durch-
sers. Die aus diesen Beobachtungen sich ergebenden Kapillaritäts-
stanten a^2 fanden sich durchaus gleich, so dafs ein Einflufs der Krümmung
Flächen sich gar nicht erkennen liefs. So fand Volkmann unter andern
Alkohol folgende Werte von a^2, dieselben berechnet unter der Annahme,
der Randwinkel $\vartheta = 0$ war.

Platten		Röhren	
Abstand mm	a^2	Durchmesser mm	a^2
1,956	5,78	2,931	5,80
1,519	5,81	2,349	5,79
1,138	5,75	1,006	5,80
0,438	5,78	0,714	5,80

Der von Wilhelmy aus seinen Versuchen gefolgerte Einflufs der Sub-
z des festen Körpers auf das von der Längeneinheit der Berührungs-
getragene Gewicht der kapillar gehobenen Flüssigkeit ist dagegen
ch andere Beobachtungen bestätigt worden. So läfst sich zunächst ein
her Einflufs, wie Quincke[1]) gezeigt hat, aus Versuchen von Guthrie[2])
r die Bildung von Tropfen folgern. Läfst man nämlich von einem festen
per Tropfen einer Flüssigkeit, die denselben vollkommen benetzt, ab-
sen, so liefert das Gewicht des abfallenden Tropfens das Gewicht,
ches an einer dem Umfange des Tropfens an der Berührungsstelle
chen Kontaktlinie zwischen festem und flüssigem Körper getragen
den kann. Der Quotient aus dem Tropfengewichte und dem erwähnten
fange mufs deshalb der von uns mit α bezeichneten Gröfse sehr nahe
ch sein. Kennt man den Umfang, so kann man aus dem Tropfen-
ichte den Wert α berechnen. Man kann das erreichen, indem man von
nen vollkommen benetzten Scheiben Tropfen abfallen läfst; der Umfang
Scheiben ist dann gleich dem obern Umfange des Tropfens. Handelt
ich nur um eine Vergleichung der Kapillaritätskoefficienten, so braucht
den Tropfenumfang nicht zu kennen, wenn man die Tropfen verschie-
r Flüssigkeiten von einem und demselben festen Körper abfliefsen läfst,
indem man bei Benutzung verschiedener fester Körper dieselben in
n von Kugeln gleicher Radien benutzt. Da die Umfänge der Tropfen
benetzenden Flüssigkeiten dann gleich sind, so sind die Gewichte der
fen den Kapillaritätskoefficienten proportional.

In dieser Weise hat Guthrie das Gewicht von Wassertropfen bestimmt,
he von Kugeln verschiedener Substanzen abfielen, deren Radien gleich 7^{mm}

1) *Quincke*, Berliner Berichte über die Fortschritte der Physik für das
1865. Bd. XXI. p. 99 ff.

2) *Guthrie*, On drops. Proceedings of Royal Society of London T. XIII.

waren. Die von Guthrie erhaltenen Zahlen enthält folgende kleine Tabelle, das Gewicht der Tropfen ist in Milligrammen gegeben.

Antimon . .	119,8	Blei	122,6
Schwefel . .	120,2	Phosphor . .	122,7
Kadmium . .	121,8	Wismuth . .	122,8
Zink	122,5	Zinn	124,2.

Von einer Glaskugel, deren Radius $7^{mm},1$ betrug, fielen die Tropfen im Gewicht 129,7 und von einer gleichen Messingkugel 132,2.

Die Unterschiede sind ähnlich wie bei den Versuchen von Wilhelmy; auch hier zeigt sich wie dort der Wert von α bei Messing gröfser als bei Glas.

Dieser Einflufs der Körpersubstanz auf das getragene Flüssigkeitsgewicht läfst sich, wie Wilhelmy[1]) hervorhebt, mit der Theorie vereinigen, wenn man die Voraussetzung fallen läfst, dafs bei allen benetzenden Flüssigkeiten der Randwinkel $\vartheta = 0$ ist. Wilhelmy glaubt, wie es schon Poisson annahm, dafs man als die Kapillarröhre, in welcher die Flüssigkeit aufsteigt, die letzte an der Wand haftende Flüssigkeitsschicht ansehen müsse, welche je nach der Natur des festen Körpers mehr oder weniger verdichtet sei. Der Winkel ϑ, der dann mafsgebend ist, ist jener, unter welchem sich die kapillare Oberfläche der Wandschicht anschliefst, und dieser ist dann je nach der Verdichtung der Wandschicht verschieden. Damit mufs dann auch der beobachtete Wert von α verschieden sein, da wir aus der Steighöhe oder dem gehobenen Gewicht die wahre Kapillaritätskonstante nur erhalten, wenn $\vartheta = 0^0$ ist.

Diese Ansicht von Wilhelmy ist durch die Beobachtungen von Quincke bestätigt, indem er zunächst zeigte[2]), dafs die Steighöhe des Wassers an einer Glaswand verschieden ist, je nachdem man dieselbe gleich nach Herstellung des Meniskus oder längere Zeit nachher untersucht. Aus 5 Versuchsreihen, bei denen er die Höhe, bis zu welcher das Wasser an der vertikalen Wand einer vorher luftfrei gemachten Flasche emporstieg, bestimmte, fand er im Mittel

$$h_0 = a = 4,169$$

bei einer Temperatur von 17^0. Bei Wiederholung desselben Versuches, nachdem das Wasser mehrere Wochen mit Abschlufs der Luft gestanden hatte, ergab sich bei derselben Temperatur

$$h_0 = a = 3,867,$$

also ein merklich kleinerer Wert, der beweist, dafs der Winkel ϑ gröfser als 0^0 geworden war.

Später hat Quincke[3]) dann direkt die Steighöhen in kapillaren Röhren mit den aus der Messung von Luftblasen sich ergebenden Werten der Konstanten verglichen, und nach den im vorigen Paragraph abgeleiteten Gleichungen die Werte von H und ϑ direkt bestimmt. Nach diesen Gleichungen ist die Höhe T der ganzen Luftblase

$$T = \sqrt{\frac{H}{s}(1 + \cos\vartheta)} = a \cdot \sqrt{1 + \cos\vartheta}$$

[1]) *Wilhelmy*, Poggend. Ann. Bd. CXIX.
[2]) *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXV. Man sehe auch *Volckmann* a. a. O.
[3]) *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

ler Abstand der Blasenkuppe von dem Schnitte, in welchem die Blase ;röfsten Durchmesser hat,

$$t = \sqrt{\frac{H}{s}} = a.$$

Für den Winkel ϑ ergab sich schliefslich

$$\cos \tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{T\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{t}.$$

Folgende kleine Tabelle enthält die von Quincke aus den Steighöhen pillaren Röhren abgeleiteten Konstanten a, sowie die aus Beobachtungen ropfen sich ergebenden Werte von a und ϑ.

Die Beobachtung der Steighöhen geschah bei einer Temperatur von 20°, ın Tropfen bei etwa 25° C.

Substanzen	Kapillaritätskonstanten a und ϑ aus			
	Steighöhen	Beobachtungen an Blasen		
	$a = \sqrt{h \cdot r}$	$a = t$	$T\sqrt{\tfrac{1}{2}}$	ϑ
ung von unterschwflgs. [atron in Wasser . .	3,684	3,748	3,670	23° 20′
sser	3,804	3,062	3,834	25° 32′
wefelkohlenstoff . . .	2,296	4,270	2,185	32° 16′
'enöl	2,675	2,868	2,817	21° 50′
pentinöl	2,497	2,615	2,475	37° 44′
oroform	1,916	—	—	—
nöl	2,536	2,850	2,705	36° 20′
ohol	2,379	2,564	2,503	25° 12′

Für die Kapillaritätskonstanten $\alpha = \tfrac{1}{2} a^2 \cdot s$ ergeben sich daraus folgende e:

Substanzen.	Dichte s	aus Steighöhen α_1 Milligr.	aus Blasen α Milligr.	$\alpha \cos \vartheta$
ɔerschwefligs. Natron .	1,1248	7,636	7,903	7,256
sser	1	7,235	8,253	7,449
wefelkohlenstoff . . .	1,2678	3,343	3,274	2,768
renöl	0,9136	3,271	3,760	3,490
pentinöl	0,8867	2,765	3,033	2,398
oroform	1,4878	2,733	—	—
inöl	0,7977	2,566	3,233	2,604
ohol	0,7906	2,273	2,599	2,352

Wie man sieht, stimmen aufser für Schwefelkohlenstoff und Terpentinöl Zahlen der zweiten und letzten Kolumne ziemlich gut überein, ein is, dafs man aus der Beobachtung kapillarer Steighöhen und unter

Voraussetzung $\vartheta = 0^0$ im allgemeinen zu kleine Werte der Konsta
oder α erhält.

Die Abweichungen bei Schwefelkohlenstoff und Terpentinöl g
Quincke einer chemischen Veränderung dieser Flüssigkeiten währen
Verlaufs der Versuche zuschreiben zu müssen.

In einer ausführlichen Untersuchung über den Randwinkel hat
Quincke[1]) später denselben für eine Anzahl Flüssigkeiten und feste K
direkt an Tropfen, welche er auf Flächen derselben auffallen liefs, gem
Bei ganz reinen Flächen, die indes nur schwierig und auf ganz kurz
herzustellen sind, glaubt er aus seinen Versuchen schliefsen zu können
der Randwinkel benetzender Flüssigkeiten gleich Null sei. Für gewöh
hat der Randwinkel indes gröfsere, bei derselben Flüssigkeit und ver
denen festen Körpern sowohl als bei demselben festen Körper und
schiedenen Flüssigkeiten verschiedene, von 0 verschiedene Werte. Qu
nimmt an, dafs die feste Oberfläche mit einer unmerklich dünnen S
einer andern Substanz, etwa adhärierenden Gases, überzogen sei,
Dicke kleiner als der Radius der Wirkungssphäre der Moleküle sei.
Dicke dieser Schicht hat auf die Gröfse des Randwinkels Einflufs. De
findet man bei derselben Flüssigkeit, wie Wasser, Alkohol auf dem
festen Körper verschiedene Randwinkel. So erhielt er mit Wasse
reinen Oberflächen, je nachdem er 2 Minuten oder 10 Minuten nach
stellung der reinen Oberfläche wartete, ehe er die Tropfen aufbr
folgende Werte von ϑ:

	nach 2 Minuten	nach 10 Minuten
Platin	$10^0\,43'$	$18^0\,13'$
Gold	$4^0\,16'$	$8^0\,18'$
Silber	$11^0\,32'$	$17^0\,58'$

In folgender Tabelle sind eine Anzahl von Kapillaritätskonsta
oder vielmehr $\alpha \cdot \cos\vartheta$ zusammengestellt; die Beobachtungen von Br
Hagen, Frankenheim, Mendéléeff und Bède sind mit Kapillarröhr
gestellt und in der vorhin angegebenen Weise aus der Steighöhe bere

Die angegebenen Konstanten gelten nur für die neben jeder angeg
Temperaturen, indem dieselben mit steigender Temperatur beträchtli
nehmen. Die Abhängigkeit der Kapillaritätskonstanten von der Temp
ist besonders von Brunner[2]) untersucht und für Wasser, Äther und Ol
bestimmt worden. Für die Steighöhen in einer Röhre von 1^{mm} l
findet Brunner

Wasser	15,332 15	$-$ 0,028 639 6 u
Äther	5,353 6	$-$ 0,028 102 u
Olivenöl	7,464 0	$-$ 0,010 486 u,

worin u die Temperatur in Graden des hundertteiligen Thermomete
deutet.

[1]) *Quincke*, Wiedem. Ann. Bd. II.
[2]) *Brunner*, Poggend. Ann. Bd. LXX.

Tabelle von Kapillaritätskonstanten α.

Flüssigkeit	Specif. Gew.	α in Milligr.	Temp.	Beobachter
ser	1,000	7,666	0°	Brunner
. . . . .	„	7,558	—	Hagen[1]
vefelsäure . . .	1,849	6,333	14°,5	Frankenheim
, . . .	1,522	7,610	17°,5	„
, . . .	1,127	7,556	„	„
säure	1,153	7,149	„	„
etersäure . . .	1,500	4,275	16°,0	„
, . . .	1,271	6,768	19°,0	„
, . . .	1,117	7,098	„	„
ing v. Kochsalz .	1,200	8,400	„	„
„ Kalisalpeter	1,137	7,276	„	„
„ Natronsalp.	1,373	8,512	„	„
ylalkohol . . .	0,7933	2,325	18°—24°	Wilhelmy
srig. Weingeist .	0,810	2,361	17°	Frankenheim
„ „ . .	0,895	2,775	„	„
„ „ . .	0,967	3,727	„	„
lalkohol . . .	0,8181	2,427	18°—24°	Wilhelmy
„ . . .	„	2,445	„	Mendéléeff
„ . . .	„	2,426	„	Bède
r.	0,725	1,815	„	Wilhelmy
. . . . . .	„	1,737	20°	Brunner
. . . . . .	„	1,796	—	Mendéléeff
. . . . . .	„	1,892	—	Bède
on	0,8124	2,581	18°—24°	Wilhelmy
gsäure	1,0511	2,973	„	„
gs. Äthyl . . .	0,8814	2,564	„	„

Quincke hat ferner durch Messung von Tropfen die Kapillaritäts-
nten des Quecksilbers untersucht[2]). Dabei ergab sich, wie schon aus
ühern schwankenden Angaben zu schliefsen war, dafs der Winkel Θ,
uecksilber mit einer reinen Glasfläche bildet, mit der Zeit sehr variabel
n einem und demselben Tropfen erhielt er gleich nach dem Auf-
37° 17′, nach 8,5 Stunden 42° 22′ und nach 21 Stunden 47°. Später
; er[3]) für flache Quecksilbertropfen auf reinen Spiegelglasplatten mög-
rasch nach dem Auflegen im Mittel aus 8 Beobachtungen bei 20° C.

$$T = 3^{mm},629 \quad t = 2^{mm},850$$

araus, die Dichte s des Quecksilbers gleich 13,5432 gesetzt,

$$\Theta = 51^0\, 8' \quad \alpha = 55^{mgr},03.$$

n sehr ausgedehnter Weise hat Quincke die Kapillaritätskonstanten
nolzener Substanzen, geschmolzener Salze und Metalle untersucht[4]).

) *Hagen*, Abhandl. der Berl. Akademie 1845.
) *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CV.
) *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.
) *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIV. Bd. CXXXV. Bd. CXXXVIII.

Er bestimmte zu dem Zwecke entweder das Gewicht von Tropfen, welche von den Drähten der betreffenden Metalle, deren Enden in der Flamme eines Lötrohrs geschmolzen wurden, oder welche aus engen Glasröhren, in denen die Substanzen geschmolzen wurden, herabfielen, oder er gofs die geschmolzenen Substanzen auf horizontalen Unterlagen aus, welche von den Substanzen nicht benetzt wurden. In letzterem Falle bildeten die Substanzen Tropfen, welche auch nach dem Erstarren dieselbe Gestalt behielten, die sie flüssig im Momente des Erstarrens besessen hatten. Die Gestalt dieser Tropfen war somit bedingt durch die Oberflächenspannung bei der Schmelztemperatur, und der Abstand der Tropfenkuppe von dem Schnitte, wo der Tropfen seinen gröfsten Durchmesser hatte, lieferte bei grofsen Tropfen sofort die Konstante a.

Für das Quadrat dieser Konstanten $a^2 = \frac{H}{s}$, also den Quotienten aus der Oberflächenspannung und der Dichte der betreffenden Substanz, welchem Quincke den Namen der specifischen Kohäsion beilegt, ergibt sich aus diesen Versuchen das interessante Resultat, dafs dieselbe für alle untersuchten Körper sich als ein einfaches Vielfaches der Zahl 4,3 darstellen liefs, mit Abweichungen nur, welche innerhalb der Grenze der bei diesen Versuchen unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen. Die specifische Kohäsion des Wassers bei 0° ist $17,58 = 4 \cdot 4,3 + 0,38$; entsprechende Werte haben von den Metallen Platin, Gold, Silber, Kadmium, Zinn, Kupfer. Die specifische Kohäsion des Quecksilbers gibt Quincke zu $8,65 = 2 \cdot 4,3$ an; fast genau gleiche Werte zeigen Blei, Wismuth und Antimon; eine dreimal so grofse specifische Kohäsion zeigen Zink und wahrscheinlich auch Eisen und Palladium; für Zink ergab sich der Wert $a^2 = 25,41$, für Palladium 25,26, für einen Gufseisentropfen 25,81, für einen zweiten Gufseisentropfen 27,14. Für Natrium fand sich der Wert sechsmal so grofs als für Quecksilber, nämlich $a^2 = 52,97$.

Für geschmolzene chemische Verbindungen ergab sich der Satz: Geschmolzene Substanzen von ähnlicher chemischer Zusammensetzung haben dieselbe specifische Kohäsion bei einer Temperatur, die ihrem Schmelzpunkte möglichst nahe liegt.

Kohlensaure und schwefelsaure (wahrscheinlich auch phosphorsaure) Salze zeigen im geschmolzenen Zustande dieselbe specifische Kohäsion wie das Wasser.

Salpetersaure Salze, Chlormetalle, Zuckerarten und Fette zeigen dieselbe specifische Kohäsion wie das Quecksilber.

Brom- und Jod-Metalle, sowie Selen, Brom, Schwefel und Phosphor zeigen eine halb so grofse specifische Kohäsion wie das Quecksilber.

In wie weit die von Quincke direkt beobachteten Zahlen mit diesen Sätzen übereinstimmen, möge an folgender Reihe angedeutet werden, welche die Werte a^2 für die untersuchten Nitrate und Chloride angibt.

Natriumnitrat $a^2 =$	8,55	Kalciumchlorid $a^2 =$	9,49
Kaliumnitrat	8,35	Strontiumchlorid	8,18
—	—	Bariumchlorid	8,29
Lithiumchlorid	8,53	Silberchlorid	8,18.
Natriumchlorid	8,41		
Kaliumchlorid	8,76		

Wie man sieht, weichen diese Zahlen nur wenig von dem für Queck-r gefundenen Werte 8,6 ab.

Auch in Lösungen fand Quincke[1]) für manche Salze eine einfache Be-ung zwischen den Kapillaritätskonstanten und den gelösten Salzen. onders für Lösungen von Chloriden in Wasser und Alkohol ergab sich, äquivalente Mengen zu derselben Menge Lösungsmittel gebracht, nahezu ungen von gleichen Kapillaritätskonstanten liefern. Ebenso erhielt laux[2]) für Lösungen verschiedener Alkohole und Säuren der Fettsäuren-e interessante Beziehungen für die Oberflächenspannung, durch welche annähernd den Gehalt an Säure in einer Lösung bestimmen zu können ubt.

§ 77.

Gröfse der Wirkungssphäre der Molekularkräfte. Wir haben den Versuchen von Wilhelmy im vorigen Paragraph das Resultat er-nt, dafs die gefundenen Werte von α nicht nur von der Substanz des getauchten festen Körpers, sondern auch bei einer und derselben Sub-nz von der Form des eingetauchten festen Körpers abhängig sei; die rte waren für eingetauchte Platten andere als für eingetauchte Cylinder für diese verschieden je nach dem Durchmesser des Cylinders.

Diese allerdings später bestrittene Erfahrung mufs an der ersten Grund-ahme von La Place über die Wirkung der Molekularkräfte eine Modifika-n anbringen, an der Annahme nämlich, dafs die molekularen Kräfte nur für uns unmefsbare Entfernungen hin wirken, sie müssen in endlichen Ent-nungen wirken. Würden nämlich die Molekularkräfte nur auf unmefsbar ine Entfernungen wirken, so würde eine gekrümmte Oberfläche eines ein-auchten festen Körpers an jedem Punkte so wirken, wie die an dieselbe ge-te tangierende Ebene, mit welcher sie auf unendlich kleinem Abstande zu-mmenfällt, die Wirkung einer gekrümmten Oberfläche müfste also jener ebenen ganz gleich sein. Es fragt sich daher, ob sich die Entfernung, auf welche die Molekularkräfte wirken, oder der Radius der Wirkungs-häre der Moleküle nicht messen läfst.

Der erste, der eine solche Messung versuchte, war Plateau[3]). Er be-tzte zu diesem Zwecke Seifenblasen, welche aus der von ihm angegebenen schung dargestellt eine sehr grofse Dauer haben. Zur Darstellung dieser schung löst man 1 Gewichtsteil Marseiller Seife, die vorher in dünne ückchen geschnitten ist, bei gelinder Wärme in 40 Teilen destillierten assers und filtriert die Lösung, wenn sie erkaltet ist. Hierauf mischt n sorgfältig in einer Flasche durch starkes und anhaltendes Schütteln Volume Glycerin mit 3 Volumen der Lösung und läfst stehen. Das im mente der Bildung klare Gemenge trübt sich nach einigen Stunden; es tsteht ein leichter weifser Niederschlag, welcher mit ungemeiner Lang-mkeit steigt und nach mehreren Tagen eine im obern Teil der Flüssig-it scharf abgeschnittene Schicht bildet. Man zieht dann mit einem Heber klare Flüssigkeit ab, die man zu den Versuchen benutzt.

[1]) *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CLX. Man sehe auch Buliginsky Poggend. n. Bd. CXXXIV.

[2]) *Duclaux*, Ann. de chim. et de phys. 5. Série. T. XIII.

[3]) *Plateau*, Mémoires de l'Acad. de Bruxelles T. XXXIII. Poggend. Ann. CXIV.

Blasen aus dieser Flüssigkeit gebildet halten sich in freier Luft stundenlang, und wenn man sie mit einer Glocke bedeckt, tagelang. Im § 71 erwähnten wir schon, dafs die Blase auf die in ihr eingeschlossene Luft einen gewissen Druck ausübt, den man daran erkennt, dafs die Luft aus der Blase entweicht, wenn das Röhrchen, durch welches man die Blase gebildet hat, nicht verschlossen wird. Es gelang Plateau, diesen Druck zu messen, indem er derartige Blasen an der Mündung eines kleinen umgekehrten Trichters erzeugte, der mit einem Wassermanometer kommunicierte. Die Gröfse dieses Druckes haben wir damals abgeleitet. Ist R der Radius der kugelförmigen Blase, so ist der auf der äufsern Fläche gegen das Innere der Blase gerichtete Normaldruck

$$P = K + H\frac{1}{R}.$$

Da die Haut der Blase gegen den Radius nur eine sehr kleine Dicke hat, so können wir ohne merklichen Fehler auch den Radius der innern Fläche der Blasenhaut gleich R setzen. Dann ist der auf die Innenfläche der Blase gegen das Innere der Haut, also von dem Centrum der Kugel fortgerichtete Normaldruck

$$P_1 = K - H\frac{1}{R}.$$

Der Druck, welchen die Blasenhaut auf die eingeschlossene Luft ausübt, ist die Differenz dieser beiden Drucke, somit ist derselbe

$$p = P - P_1 = 2H \cdot \frac{1}{R}.$$

$$p \cdot R = 2H.$$

Es ist somit das Produkt aus dem Radius der Blase und dem auf die Flächeneinheit wirkenden Drucke gleich der doppelten Konstanten H. Bezeichnen wir mit h die Steighöhe der Blasenflüssigkeit in einer Röhre von 1^{mm} Durchmesser, deren Wände von der Flüssigkeit vollkommen benetzt werden, so ist nach § 74

$$h \cdot s = 2H,$$

wenn s das specifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet; es ist somit

$$p \cdot R = h \cdot s,$$

eine Relation, welche Plateau auch bei seinen Versuchen bestätigt fand.

Nun macht Plateau darauf aufmerksam, dafs diese Relation nur so lange ihre Gültigkeit habe, als die Dicke der Blasenhaut wenigstens gleich ist dem doppelten Radius der Wirkungssphäre der Moleküle, indem die beiden für P und P_1 abgeleiteten Ausdrücke für die Oberfläche einer flüssigen Masse gelten, bei der also sämtliche innerhalb des Radius der Wirkungssphäre liegenden Moleküle auf die in der Oberfläche liegenden Teilchen ihre Wirkung ausüben.

Bei einer sich mehrere Tage haltenden Blase, welche durch Verdunstung und allmähliches Herabrinnen der Flüssigkeit zur Ansatzstelle der Blase nach und nach dünner wurde, liefs sich nun eine Verminderung des Druckes bis zu dem Momente, in welchem die Blase zersprang, nicht erkennen, so dafs die Dicke der Blase bis zu diesem Momente nicht kleiner war als der doppelte Radius der Wirkungssphäre der Moleküle. Die Dicke der Blase

rgab sich nach einer optischen, im zweiten Bande zu besprechenden Methode, us der Farbe der Blase[1]), zu $0^{mm},000\,113\,5$. Daraus folgt dann, dafs der adius der Wirkungssphäre den Wert von $0^{mm},000\,056\,7$ nicht überchreitet. Nimmt man an, dafs die Blase nicht länger bestehen kann, als ie Dicke der Haut gleich ist dem doppelten Radius der Wirkungssphäre, o würde etwa dies der Radius der Wirkungssphäre für die Molekularkräfte ieser Seifenlösung sein, ein zwar kleiner, aber wie man sieht noch wohl efsbarer Wert.

Quincke hat den Radius der Wirkungssphäre in anderer Weise direkt u messen gesucht[2]). Bringt man auf eine Glasplatte sehr dünne, keilrmige Schichten einer andern Substanz, so wird der Randwinkel einer lüssigkeit an den verschiedenen Stellen verschieden sein, wenn die Dicke er keilförmigen Schicht nicht so grofs ist als der Radius der Wirkungshäre, er wird konstant erst von der Stelle der keilförmigen Schicht, von er ab ihre Dicke gleich dem Radius der Wirkungssphäre ist. Denn der andwinkel hängt, wie wir sahen, ab von dem Verhältnis der Adhäsion der lüssigkeit an den festen Körper zur Kohäsion der Flüssigkeit. Ist demch die Adhäsion der Flüssigkeit an das Glas eine andere, als an die auf as Glas gebrachte Schicht, was immer dann der Fall sein wird, wenn die lüssigkeit die beiden Substanzen nicht vollkommen benetzt, so mufs, so nge die Schicht eine so kleine Dicke hat, dafs das Glas noch durch sie indurchwirkt, der Randwinkel ein anderer sein als dort, wo der Abstand er Flüssigkeit vom Glase gleich oder gröfser ist als der Radius der Wirungssphäre.

Derartige keilförmige Schichten lassen sich auf Glas sehr gut durch ilber erzeugen[3]), indem man auf eine Glasplatte eine an verschiedenen tellen verschieden dicke Schicht einer Versilberungsflüssigkeit bringt. uincke brachte zwischen eine ebene Glasplatte und darauf gelegte Cylinderiche von Spiegelglas, welche einen Radius von 120^{mm} besafs, Martinsche ersilberungsflüssigkeit, aus welcher dann eine doppelt keilförmige Silberhicht sich absetzte, welche in der Mitte, dort wo die Cylinderfläche die latte berührte, am dünnsten war. Zwei solcher Platten wurden vorsichtig bgespült, dann durch dünne Glasplättchen getrennt mit den versilberten lächen einander gegenübergestellt, so dafs etwa gleich dicke Schichten ilber einander gegenüberlagen. Eine schwache Metallfeder drückte die eiden Platten gegen einander. Dieselben wurden dann in einen Trog mit estilliertem Wasser so aufgestellt, dafs die Schneiden der Silberkeile verkal standen. Das Wasser erhob sich in dem kapillaren Raum zwischen en parallelen Silberlamellen bis zu einer Höhe h, welche an der dünnsten telle des Silbers am höchsten war, und immer kleiner wurde, je dicker as Silber wurde. Da der Abstand d der Platten überall der gleiche war, folgt aus der Gleichung für die Steighöhe zwischen den Platten

$$h = \frac{H}{s} \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{1}{d} = a^2 \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{1}{d},$$

afs mit zunehmender Silberdicke der Winkel ϑ immer gröfser wird.

[1]) Man sehe im 2. Band: „Farbe dünner Blättchen".
[2]) *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXVII.
[3]) Man sehe darüber *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXIX. p. 44 ff.

Folgende Tabelle enthält eine Beobachtungsreihe von Quinck(Dicke der Silberschicht wurde nach einer optischen Methode, wie sie von Plateau benutzt wurde, bestimmt. Die Winkel ϑ sind aus (Gleichung

$$\cos\vartheta = \frac{hd}{a^2}$$

abgeleitet, in der Quincke a^2, die specifische Kohäsion des Wassers glei(einsetzte. Die mit x überschriebene Kolumne gibt die Abstände der St denen die Steighöhe h entspricht von der dünnsten Stelle der Silbersc ε ist die Dicke der Silberschicht.

$$d = 0^{mm},633$$

x	ε	h	ϑ
mm	mm	mm	
0	0,000 004 0	13,74	54° 33′
1	0,000 005 2	13,58	55° 2′
2	0,000 008 0	13,33	55° 44′
3	0,000 013 0	13,10	56° 26′
4	0,000 014 2	12,82	57° 15′
5	0,000 020 0	11,92	59° 48′
6,5	0,000 028 4	9,73	65° 38′

Man sieht, wie h mit wachsender Silberschicht ganz beträchtli(nimmt. Diese Abnahme dauerte selbst an den dicksten Stellen der S schichten, die noch durchsichtig waren, fort, Stellen, welche eine Dic zu $0^{mm},000\,054\,2$ besafsen, so dafs der Radius der Wirkungssphär Glas-Silber-Wasser noch etwas gröfser anzunehmen ist.

Mit Quecksilber kann man ähnliche Beobachtungen machen, i man die Silberschicht durch Behandeln mit Schwefelwasserstoff in Sch silber überführt, und dann direkt durch Spiegelung die Stelle aufsuch der Winkel, unter welchem das Quecksilber die vertikal gestellte] schneidet, konstant wird, oder wo die Depression des Quecksilbers a vertikalen Wand einen konstanten Wert erhält. Derartige Versuche lie: Quincke für den Radius der Wirkungssphäre den Wert $0^{mm},000$(Nach Überführung des Silbers in Jodsilber fand Quincke den Wink(einer Schichtdicke von $0^{mm},000\,059$ konstant werden. Als die Glas] mit einer Kollodiumschicht überzogen war, fand sich die Dicke der Sc wo der Randwinkel des Quecksilbers konstant wurde, kleiner als $0^{mm},0$(eine genauere Bestimmung war in diesem Falle wegen des optischen haltens der Kollodiumschicht nicht möglich.

Wenn man nach diesen Methoden wegen der Schwierigkeit, die flächenbeschaffenheit der festen Körper an allen Stellen genau glei erhalten, keine absolut genauen Messungen des Radius der Wirkungss] erwarten kann, so beweisen diese Versuche doch, dafs man mit g Annäherung diesen Radius 50 Millionteilen eines Millimeter gleich s darf, eine zwar kleine, aber sehr wohl mefsbare Gröfse. Wir müssen (die Annahme fallen lassen, dafs die Molekularkräfte auf nur unme *kleine* Entfernungen wirken.

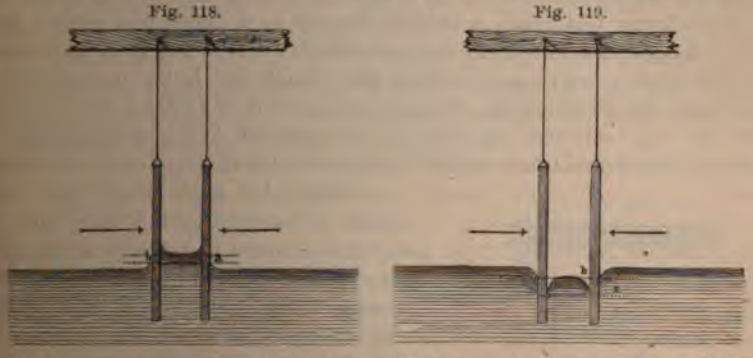
§ 78.

Bewegungen infolge von Kapillarwirkung. Durch die bisher beachteten Gesetze der Oberflächenspannung erklären sich eine Anzahl auffallender Erscheinungen, von denen wir einige Bewegungserscheinungen ableiten wollen.

Wenn man zwischen zwei unter einem spitzen Winkel zusammenstofsende Platten oder in ein konisches Glasröhrchen einen Flüssigkeitstropfen bringt, der die Röhrenwände benetzt, so sieht man, dafs der Tropfen sich gegen den Scheitel des Winkels hinbewegt; ein die Röhrenwände nicht benetzender Tropfen dagegen bewegt sich von dem Scheitel des Winkels oder der Spitze der Röhre fort. Diese Bewegung erklärt sich unmittelbar aus den vorhin erkannten Gesetzen der Oberflächenspannung. Die Begrenzungsflächen der Flüssigkeit sind in dem ersten Falle konkav; an der engern Seite der Röhre (Fig. 116), oder gegen den Scheitel des Winkels hin ist wegen des kleinern Abstandes der Wände die Krümmung der Oberfläche stärker als an der entgegengesetzten Seite. Deshalb ist der Druck gegen das Innere der Flüssigkeit an der weiten Stelle der Röhre stärker und diesem Drucke folgend mufs sich der Tropfen gegen das engere Ende der Röhre hin bewegen.


Fig. 116. Fig. 117.

Umgekehrt ist es im zweiten Falle (Fig. 117); die Oberfläche ist dann konvex, die Krümmung an der engen Seite, und damit der gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Druck von dieser Seite her stärker. Der Tropfen mufs sich daher gegen das weitere Ende der Röhre hin bewegen.


Fig. 118. Fig. 119.

Wenn man zwei parallele ebene Platten mit ihren unteren Enden in eine Flüssigkeit vertikal eintaucht, so bemerkt man, dafs diese Platten sich zu nähern streben, sowohl, wenn die Wände benetzt werden, die Flüssigkeit also zwischen den Platten steigt (Fig. 118), als auch, wenn die Wände nicht benetzt werden, die Flüssigkeit zwischen den Platten tiefer steht als aufserhalb (Fig. 119). La Place[1]) erklärt diese Erscheinung folgendermafsen. Da die Flüssigkeitssäulen zwischen den Platten und aufserhalb

[1]) *La Place*, Théorie etc. *Gilbert*, Annalen Bd. XXXIII. p. 293.

im Gleichgewicht sind, so ist der Druck auf die Platten unterhalb a von allen Seiten gleich, nicht aber so oberhalb a z. B. in b. In dem Punkte b wird die Platte nach innen gedrückt durch den Druck der Luft, den wir mit P bezeichnen wollen, nach aufsen jedoch durch den Seitendruck der über b liegenden Flüssigkeitssäule, welcher gleich ist dem senkrechten Drucke, den ein Punkt in der durch b gelegten Horizontalebene erfährt. Dieser Druck setzt sich zusammen aus dem vertikal abwärtsgehenden Drucke der Atmosphäre, dem Gewichte der Flüssigkeitssäule über b und dem vertikal aufwärts gehenden Drucke der Differenz der Oberflächenspannung $\frac{1}{2}\frac{H}{\varrho}$ zwischen und aufserhalb der Platten, welche das Steigen der Flüssigkeit zwischen den Platten bewirkte; er ist also $P + g - \frac{H}{2\varrho}$, wenn wir mit g das Gewicht der Flüssigkeit über b bezeichnen. Nun ist aber $\frac{H}{2\varrho}$ gleich dem Gewichte der ganzen gehobenen Flüssigkeitssäule, demnach $\frac{H}{2\varrho} > g$ und $g - \frac{H}{2\varrho} < 0 = - cP$, wenn wir mit c eine Konstante bezeichnen, welche kleiner als 1 ist. Die Platte wird somit durch einen Druck P nach innen und durch einen Druck $P(1 - c)$ nach aufsen getrieben, also durch den Überschufs

$$P - P(1 - c) = Pc$$

nach innen getrieben. Gleiches gilt von der zweiten, der ersten genäherten Platte, so dafs also die Platten mit einer Kraft $2\,Pc$ gegen einander getrieben werden.

Dasselbe ist in der Anordnung Fig. 119 der Fall. Durch eine ganz ähnliche Entwicklung erhält man, dafs die über a liegenden Punkte durch die aufserhalb höher stehende Flüssigkeit einen nach innen gerichteten Druck erfahren. Unterhalb a sind die Drucke nach innen und aufsen gleich, da die Flüssigkeiten innerhalb und aufserhalb der Platten im Gleichgewicht sind; bei b aber wirkt nach aufsen der Druck der Luft, nach innen der Seitendruck der Flüssigkeit, welcher gleich ist dem Drucke der Luft, vermehrt um das Gewicht der über b vorhandenen Flüssigkeitsschicht, der letztere Teil des Seitendruckes mufs demnach die Platten gegen einander drücken.

Fig. 120.



Wäre der nach innen und aufsen gleich wirkende Druck P der Luft auch nicht vorhanden, so bleibt doch in beiden Fällen der nach innen gerichtete Druck übrig, nur dafs wir ihn im ersten Falle nicht als den Überschufs des äufsern über den innern Druck auffassen müfsten, sondern als die Anziehung zwischen Wand und Flüssigkeit, welche eben den von innen nach aufsen wirkenden Druck in unserer vorigen Betrachtungsweise vermindert.

Wenn die eine der Platten von der ...igkeit benetzt wird, die andere nicht, so steigt die Flüssigkeit an der einen ...r andern nicht, wie in Fig. 120; man beobachtet dann eine Abstofsung.

ese läfst sich aus denselben Principien ableiten. An der benetzenden atte a mufs dann die Flüssigkeit aufserhalb höher ansteigen als im ischenraume der beiden Platten, weil die Flüssigkeit aufsen so hoch igen mufs, dafs die durch die konkave Krümmung verminderte Oberchenspannung durch die gehobene Flüssigkeit äquilibriert wird. Im nern dagegen zwischen a und b ist die Oberfläche der Flüssigkeit ppelt gekrümmt, indem die Flüssigkeit an a sich konkav, an b aber nvex anlegt. Die Oberflächenspannung wird daher in der einen Hälfte er Flüssigkeit zwar vermindert, in der andern gegen b liegenden dagegen rstärkt, und deshalb ist die Verminderung an a nicht so grofs wie aufserhalb; die Flüssigkeit kann also im Innern an a nicht so hoch steigen. Aus ben dem Grunde mufs sie an b aufsen eine stärkere Depression erhalten ls zwischen den Platten.

Aus dieser Gruppierung ergibt sich dann nach der Entwicklung der eiden vorigen Fälle, dafs sowohl a als auch b einen Antrieb von innen ach aufsen erfährt, die Platten müssen sich also von einander entfernen.

Eine genauere Untersuchung der gekrümmten, zwischen den Platten rhandenen Oberfläche der Flüssigkeit hat La Place zu dem Resultate gehrt, dafs bei sehr grofser Annäherung der Platten die Abstofsung in eine nziehung übergeht, ein Resultat, das Versuche von Hauy[1]) bestätigen.

§ 79.

Ausbreitung von Flüssigkeiten auf festen Körpern. Auflösung. n § 72 bei Ableitung der Beziehung, welche die Gröfse des Randwinkels stimmt, erwähnten wir, dafs in zwei Fällen sich ein Gleichgewichtsstand nicht herstellen könne. Wir nannten die Summe der der Wandche parallelen Komponenten der wirksamen Kräfte F_2, und rechneten eselben positiv, wenn sie von der Flüssigkeit fortgerichtet sind; die Summe er der Oberfläche der Flüssigkeit parallelen Komponenten bezeichneten wir it F_1. Von dieser bemerkten wir schon damals, dafs wir sie der Konanten in dem Ausdrucke für die Oberflächenspannung, also der Kapillaritkonstanten α proportional setzen konnten. Führen wir diese Bezeichnung n, so ist der Ausdruck für den Randwinkel ϑ

$$\cos\vartheta = \frac{F_2}{\alpha}.$$

Der Winkel ϑ wird unmöglich, wenn $F_2 > \alpha$; in dem Falle kann also n Gleichgewichtszustand nicht eintreten. Ja, wenn wir einen Tropfen auf nen festen Körper, etwa eine horizontale Platte legen, kann ein Gleichwichtszustand schon dann nicht eintreten, wenn $F_2 = \alpha$, somit $\vartheta = 0$ rd. Denn wenn ein solcher Tropfen liegen bleibt, so ist immer der inkel ϑ von Null verschieden. Es mufs sich also der Tropfen auf der che ausbreiten und dieselbe mit einer dünnen flüssigen Schicht überziehen[2]).

[1]) *Hauy*, a. a. O. Gilbert, Annalen Bd. XXXIII. p. 308.
[2]) Man sehe *Quincke*, Wiedem. Ann. Bd. II. Auf die genauere Unterchung der Ausbreitungsphänomene, speciell auf die Verdrängung einer Flüssigit durch eine andere und die Beziehung dieser Erscheinungen zu den Kapillaätskonstanten können wir hier nicht eingehen.

In der That ist das auch der Fall, reine Flächen werden von sie vollkommen benetzenden Flüssigkeiten überzogen, wenn man einen Tropfen der letztern auf sie bringt, es tritt eine Ausbreitung der Flüssigkeiten auf den festen Körpern ein. Der bereits § 77 erwähnte Schlufs von Quincke, dafs der Randwinkel der freien Oberfläche verschiedener Flüssigkeiten wie Wasser, Alkohol u. s. w., und wässeriger oder alkoholischer Salzlösungen gegen vollkommen reine Glas-, Krystall- oder Metallflächen Null zu sein scheine, beruht eben darauf, dafs die Flüssigkeiten sich auf den reinen festen Oberflächen ausbreiten.

Als zweiten Fall, bei welchem sich kein Gleichgewichtszustand herstellen kann, bezeichneten wir den, dafs die Summe der bei der damaligen Zerlegung sich ergebenden zur Wand senkrechten Kräfte von der Wand fort gerichtet sei. Das ist nur bei einer solchen Lockerung der Moleküle, welche in die Flüssigkeit eintauchen möglich, dafs dadurch die Kohäsion des festen Körpers aufgehoben wird. Es tritt deshalb in dem Falle eine Trennung der Moleküle des festen Körpers und eine Vermischung derselben mit denjenigen des flüssigen Körpers ein, wir beobachten die Auflösung des festen Körpers. Wenn man ein Salz in Wasser bringt, so zerteilt es sich und verbreitet sich in der Flüssigkeit, so dafs nach einiger Zeit die ganze Flüssigkeit Salzteilchen enthält, welche durch die Anziehung des Wassers zu den Salzteilchen in dem Wasser der Schwere entgegen gehoben und verbreitet werden.

Die Auflösung eines Körpers in einer Flüssigkeit wird vielfach als eine chemische Verbindung angesehen; von den eigentlichen chemischen Verbindungen unterscheidet sie sich jedoch dadurch, dafs sie nicht wie diese nach festen Verhältnissen vor sich geht. Im Gegenteil, eine Flüssigkeit kann einen in ihr löslichen Körper in allen Verhältnissen bis zu einer gewissen, bei konstanter Temperatur festen Grenze aufnehmen. Jene Grenze nennt man die Löslichkeitsgrenze.

Bei der Lösung eines Salzes in Wasser zeigt sich die Anziehung der Salz- und Wasserteilchen überdies in der sogenannten Kontraktion der Salzlösungen. Das Volumen der hergestellten Lösung ist nämlich mit wenigen Ausnahmen kleiner als die Summe der Volumina der einzelnen Bestandteile. So ergab sich z. B. aus einigen mit Salpeterlösungen von mir angestellten Versuchen bei einer 8procentigen Lösung eine Kontraktion von 0,8 Procent; eine Lösung von 21,522 Kubikcentimeter ($44,293^{gr}$) in 554,077 Kubikcentimeter Wasser von 20° C. ergab nicht 575,599 Kubikcentimeter Lösung, sondern nur 570,838, so dafs also das entstandene Volumen der Lösung um 4,762 Kubikcentimeter kleiner war als die Summe der ursprünglichen Volumina.

Die genauern Gesetze dieser Kontraktion sind noch nicht bekannt.

§ 80.

Mischung und Schichtung der Flüssigkeiten; Plateaus Versuche. Wenn man zwei Flüssigkeiten zusammenschüttet, so beobachtet man, dafs ebenso, wie die anziehenden Wirkungen der flüssigen Körper auf die festen verschieden sind, so auch die der flüssigen Körper unter einander. Man [sieht] nämlich entweder, dafs die Flüssigkeiten, wenn sie verschiedene

sches Gewicht haben, einfach sich über einander lagern ihrer Schwere
, oder dafs die Flüssigkeiten sich mischen, dafs die eine die andere
ndig durchdringt, und so die schwerere in der leichtern gehoben und
itet und die leichtere in die schwerere hinabgezogen wird. So mischen
. B. Wasser und Weingeist in allen Verhältnissen, während Wasser
l sich nicht mischen, sondern ihrer Schwere gemäfs sich über ein-
lagern.

Ein Flüssigkeitsgemische ist eine ganz homogene Flüssigkeit, deren
ne Bestandteile sich nicht durch mechanische Mittel, sondern nur
eine Veränderung des Aggregatzustandes von einander trennen. Da-
unterscheidet sich ein Gemisch wesentlich von einem Gemenge, wie
es herstellen kann, wenn man zwei Flüssigkeiten gleichen specifischen
chtes in einem Gefäfse zusammengiefst und stark schüttelt.

Bei der Mischung zweier Flüssigkeiten zeigt sich in den meisten Fällen
eine Kontraktion des Gemisches, indem das Volumen der Mischung
er und somit seine Dichtigkeit gröfser ist als die Summe der Volumina
Bestandteile und deren mittlere Dichtigkeit. Am genauesten ist die
raktion der Mischungen bei den Gemischen aus Alkohol und Wasser
sucht, wir haben einige Zahlen bei der Betrachtung der Alkoholo-
r angegeben.

Wenn man zwei Flüssigkeiten gleichen specifischen Gewichtes zusam-
giefst, die sich nicht mischen, so z. B. Öl in ein Gemische aus Alkohol
Wasser bringt, so beobachtet man, dafs sich die Flüssigkeiten nicht in
gelmäfsiger Weise durch einander lagern, sondern dafs die eine in der
rn, so das Öl in dem Gemische in der Gestalt kugelförmiger Tropfen
immt.

Es folgt dieses mit Notwendigkeit aus den in den vorigen Paragraphen
tragenen Lehren über die Oberflächenspannung. Denn dadurch, dafs
Öl in dem Alkohol schwimmt, ist es ganz ohne Schwere; die Gleich-
chtsgestalt, in welcher es sich ansammelt, wird daher nur durch die
samen Molekularkräfte bedingt. Dieselben sind die Anziehung des
hols auf das Öl und die Wirkung des Öles auf sich selbst, von denen
Kohäsion des Öles die Anziehung des Alkohols bedeutend überwiegt,
laraus hervorgeht, dafs sich die Flüssigkeiten nicht mischen. Dem-
mufs das Öl eine solche Gestalt annehmen, dafs die Oberflächen-
nung an allen Punkten dieselbe ist. Wir hatten für dieselbe allgemein

$$P = K \pm \frac{H'}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right),$$

wir mit H' die Oberflächenspannung des im Alkohol schwimmenden
nöls bezeichnen, welche eben wegen der Anziehung des Alkohols auf
Öl kleiner ist als in einer freien nur von Luft begrenzten Oberfläche
Öls[1]).

Dieser Ausdruck ist nur dann konstant, wenn die Summe

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \text{const.},$$

1) Über die Oberflächenspannung einer
Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

also die Summe der reciproken Werte der Hauptkrümmungsradien [...] Punkte der Oberfläche dieselbe ist. Das ist der Fall, wenn die Ob[...] eine Kugel ist.

Läfst man nun auf den gewichtslosen Tropfen noch andere [...] wirken, indem man ihn an feste Körper adhärieren macht, so kann [...] eine Reihe anderer Gestalten annehmen, für deren freie Oberfläche [...] die allgemeine Bedingung bestehen bleiben mufs $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \text{const.}$

Fig. 121.



Plateau[1]) hat über d[...] stalten, welche Flüssig[...] in einer andern von gl[...] specifischen Gewichte [...] men können, vielfache [...] suche angestellt. Um [...] Flüssigkeiten gleichen [...] fischen Gewichtes herzus[...] wandte er ein Gemisch [...] Alkohol und Wasser an [...] ches das gleiche spec[...] Gewicht hatte als Ö[...] dafs also ein Öltropf[...] jeder Stelle dieses Gem[...] im indifferenten Gleichg[...] schwimmt.

Die Versuche [...] in einem parallelepiped[...] Glasgefäfs (Fig. 121) [...] stellt, dessen Wände au[...] nen Glasscheiben besteh[...] mit ihren Rändern zusa[...] gekittet sind. In der [...] platte ist ein Hahn [...] bracht, um die Flüssigkeiten abzulassen, und in der Deckelplatt[...] schiedene Öffnungen, um die Flüssigkeiten und einige bei den Ver[...] benutzte Apparate hineinzubringen. Na[...] der Kasten mit dem Weingeistgemische [...] füllt ist, bringt man mittels einer klein[...] pette, welche mit einem etwas gefärbt[...] angefüllt ist, in die Mitte der Flüssigkeit [...] Öl, welches sich an dem Ende der Pipette i[...] eines grofsen Tropfens ansammelt. Zieh[...] dann die Pipette, nachdem man sie ob[...] dem Finger verschlossen hat, vorsichtig [...] so bleibt der Tropfen in Form einer Kugel ruhig an seinem Platze [...] wie es die Theorie verlangt. Denn ist der Tropfen sich selbst übe[...] so dafs nur die Oberflächenspannung auf ihn einwirkt, so mufs d[...]

Fig. 122.

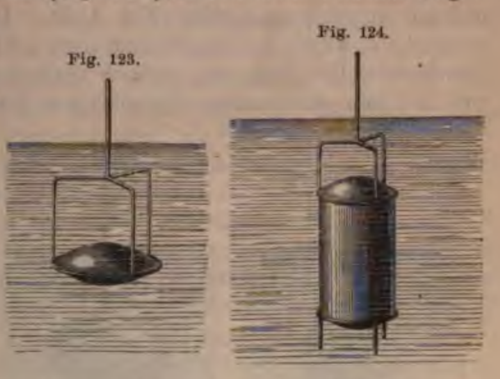


[1]) *Plateau*, in verschiedenen Jahrgängen der Bulletins de l'Acad[...] Bruxelles, daraus Poggend. Ann. Bd. LV, LVI. Ergänzungsband II. 1848. L[...]

n Stellen gleich sein, und das ist, wie wir sahen, der Fall, wenn die ümmung der Oberfläche an allen Stellen dieselbe ist.

Wenn man den Tropfen an gewissen Stellen mittels vorher mit Öl trichener Eisendrähte fixiert, so adhäriert der Tropfen an diesen und rt wirkt dann aufser der Kohäsion des Öles die Adhäsion am Eisen. Die stalt der Oberflächen mufs demnach eine andere werden, indem an gessen Stellen die Oberflächenspannung modificiert wird; für die freien berflächen mufs aber auch in diesem Falle $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \text{const.}$ sein.

Legt man den Tropfen in einen Ring von Eisendraht, so nimmt er die stalt einer bikonvexen Linse an (Fig. 123), deren beide Flächen Kugelgmente von gleichem Radius id. Für die freien Oberflächen dadurch die Bedingung erlt $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \text{const.}$ Wenn n den in dem Drahtringe webenden Tropfen vorsichherabläfst, bis er unten einen htring berührt, so legt er auch an diesen an, und n man dann den an dem ifufs befestigten Drahtring der aufzieht, während man n den Tropfen nachfliefsen t, so bleibt der Tropfen unten an dem Drahte haften, und zwischen den len Drähten bildet sich ein vollkommener Kreiscylinder (Fig. 124), cher oben und unten von Kugelsegmenten gleichen Radius begrenzt ist.


Fig. 123. Fig. 124.

Der eine Krümmungsradius des Cylinders in einer durch die Axe allel derselben geführten Ebene ist unendlich, da diese Ebene die Cylinderhe in einer geraden Linie schneidet, deshalb ist

$$\frac{1}{\varrho'} = 0.$$

Der andere Krümmungsradius ist der Radius des Cylinders. Da die rflächenspannung an allen Punkten der freien Oberflächen gleich sein fs, so mufs, wenn wir mit ϱ_1 den Radius der Kugelflächen bezeichnen,

$$K + \frac{H'}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = K + H' \cdot \frac{1}{\varrho_1},$$

$$\frac{1}{2\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}; \quad \varrho_1 = 2\varrho;$$

mufs demnach der Radius der Kugelsegmente doppelt so grofs sein als Radius des Cylinders. Eine Messung der Höhe der Kugelsegmente und r Krümmung ergibt in der That $\varrho_1 = 2\varrho$.

Mittels Drahtfiguren von verschiedener Gestalt ist es Plateau gelungen, h eine Reihe Flüssigkeitsfiguren herzustellen, so Würfel, Octaeder u. s. f. konvexen, ebenen und konkaven Oberflächen, je nach der Ölmenge, che er zwischen die Drahtnetze brachte.

Wenn man auf die Tropfen noch andere als die innern Kräfte der Kohäsion und Adhäsion wirken läfst, so wird auch dadurch die Gestalt der Tropfen eine andere. Plateau bewirkte zu dem Ende, dafs der Tropfen sich an den in Fig. 121 abgebildeten, in der Mitte des parallelepipedischen Kastens herabgehenden Metalldraht anlegte, welcher mittels der Kurbel in Rotation versetzt werden konnte. Die in der Mitte des Drahtes befindliche Scheibe war vorher mit Öl bestrichen, und nun mittels eines Eisendrahtes die Ölkugel, von 6^{cm} Durchmesser, so an die Scheibe geführt, dafs sie sich symmetrisch um Scheibe und Draht herumlegte (Fig. 125). Wenn man nun die Handhabe langsam dreht, so sieht man zunächst, wie die Kugel allmählich an den Polen, durch welche die Drehungsaxe geht, sich abplattet und am Äquator anschwillt (Fig. 126). Dreht man rascher und rascher, so wird die Kugel von unten und oben hohl und dehnt sich immer mehr in horizontaler Richtung aus; endlich verläfst sie die Scheibe und verwandelt sich in einen vollkommen regelmäfsigen Ring (Fig. 127).

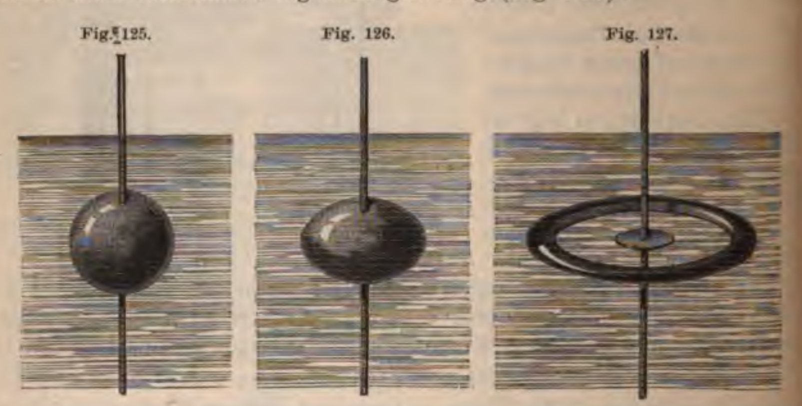


Fig. 125. Fig. 126. Fig. 127.

Diese Erscheinungen erklären sich leicht durch die zur Molekularwirkung der Flüssigkeit auf sich selbst hinzutretende Centrifugalkraft. Der ganze an dem Drahte und der Scheibe adhärierende Tropfen wird mit in Rotation versetzt, und die einzelnen Teile desselben erhalten dadurch eine von der Drehungsaxe fortgerichtete centrifugale Beschleunigung, welche in der Nähe des Äquators am stärksten ist. Dadurch suchen die Teile in der Nähe des Äquators sich am stärksten von der Axe zu entfernen. Anfangs wird dieser centrifugalen Beschleunigung durch eine verstärkte Oberflächenspannung das Gleichgewicht gehalten, und es tritt nur eine Abplattung des Tropfens an den Polen, eine Aufhäufung und verstärkte Krümmung am Äquator ein. Überwiegt die centrifugale Beschleunigung, so reifst sich die ganze Masse von der Axe los und umgibt dieselbe in der Form eines Ringes, der eine Zeit lang besteht, dann aber, da sich die Rotationsgeschwindigkeit durch die Reibung des Öls am Alkohol stetig vermindert, wieder zusammenfliefst, und sich als kugelförmiger Tropfen wieder um die Axe legt.

Durch besondere Kunstgriffe gelang es Plateau[1]) es auch dahin zu bringen, dafs sich nur ein Teil des Tropfens als Ring loslöste, während ein

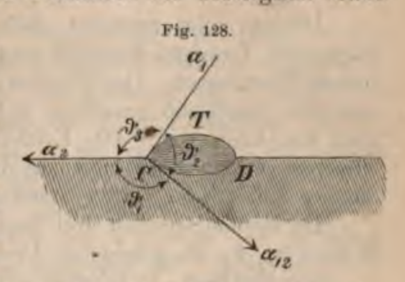
[1]) *Plateau*, Poggend. Ann. Erg.-Bd. II.

anderer Teil in Gestalt eines abgeplatteten Sphäroids an der Axe haften blieb; also eine Erscheinung hervorzurufen, welche mit der des Saturn im Weltenraum die gröfste Ähnlichkeit hat.

§ 81.

Ausbreitung von Flüssigkeiten auf anderen. Wenn man einen Tropfen einer specifisch leichtern Flüssigkeit auf die Oberfläche einer andern von gröfserem specifischen Gewichte bringt, so ist das Verhalten des Tropfens je nach dem Verhältnis der Kapillaritätskonstanten ein sehr verschiedenes. Entweder legt sich der Tropfen in Form einer Linse auf die Oberfläche der Flüssigkeit, so, wenn man fette Öle oder Terpentinöl auf Wasser bringt, welches längere Zeit an der Luft gestanden hat, oder es breitet sich der Tropfen über der Oberfläche immer weiter und weiter zu einer sich immer mehr verdünnenden Flüssigkeitsschicht aus. Die Bedingung, unter welcher das erstere oder das letztere eintritt, ist dieselbe, unter der sich auf einer festen Unterlage ein Tropfen bildet, oder die Ausbreitung der Flüssigkeit stattfindet. Ein Tropfen kann sich nur dann in Form einer Linse halten, wenn der Randwinkel, unter welchem die auf der Oberfläche befindliche Flüssigkeit die Oberfläche schneidet, gröfser als Null ist; sobald der Winkel gleich Null ist, mufs die Flüssigkeit sich auf der untern ausbreiten[1]. Die Abhängigkeit des Winkels ϑ von den hier ins Spiel kommenden molekularen Kräften ist am präcisesten von Quincke[2] formuliert. Stelle (Fig. 128) T einen Tropfen auf einer Flüssigkeitsoberfläche dar; derselbe drückt unter sich die Oberfläche der Flüssigkeit etwas ein, so dafs ein durch den Tropfen geführter Meridianschnitt die Flüssigkeit, auf der der Tropfen liegt, in der konkaven Schnittkurve CD schneidet. Betrachten wir das letzte Element des Tropfens im Punkte C, wo es die untere Flüssigkeit berührt, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes, dafs die auf dieses Element wirkenden Kräfte sich aufheben. Diese auf das Element wirkenden Kräfte sind erstens die Tangentialkomponente der Oberflächenspannung der Flüssigkeit des Tropfens, welche in der Richtung der freien Oberfläche des Tropfens nach α_1 wirkt; zweitens die Molekularanziehung der Flüssigkeit des Tropfens, welche nach irgend einer Richtung in das Innere des Tropfens wirkt; drittens die nach α_{12} wirkende Tangentialkomponente der zwischen den beiden Flüssigkeiten vorhandenen Oberflächenspannung, da in der Oberfläche CD zwischen Tropfen und Unterlage die Wirkung beider Flüssigkeiten vorhanden ist; viertens die Anziehung der Flüssigkeit, welche die Unterlage des Tropfens bildet, und welche nach irgend einer Richtung in das Innere dieser Flüssigkeit gerichtet ist.

Fig. 128.



Wir zerlegen diese Kräfte nach der Richtung α_1 parallel der an das letzte Tropfenelement gelegten Tangente, parallel der Richtung α_{12}, der an

[1] *Paul du Bois Reymond*, Poggend. Ann. Bd. CIV, Bd. CXXXIX.
[2] *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

das letzte Element der gemeinsamen Oberfläche CD gelegten Tangente, und parallel α_2 der Schnittlinie der Oberfläche der untern Flüssigkeit. Sei die Summe der parallel α_1 wirkenden Kräfte gleich α_1, der parallel α_{12} wirkenden gleich α_{12} und schliefslich der parallel α_2 wirkenden gleich α_2.

Von diesen so erhaltenen Kräften hängt α_1 wesentlich von den zwischen den Teilchen der Tropfenflüssigkeit, die wir die Flüssigkeit 1 nennen wollen, wirksamen Kräften ab. Nach den schon im § 72 vorgelegten Erwägungen werden wir dieselbe der Kapillaritätskonstanten der Flüssigkeit 1 proportional setzen dürfen, wir haben sie deshalb auch mit α_1 bezeichnet. Ganz dieselben Erwägungen ergeben, dafs wir die Kraft α_2 der Kapillaritätskonstanten der Flüssigkeit 2, der der Unterlage ebenso proportional setzen dürfen. Die Kraft α_{12} ist dann in derselben Weise der Oberflächenspannung in der den beiden Flüssigkeiten gemeinsamen Oberfläche proportional zu setzen, da sie einmal von der Tangentialkomponente dieser Oberflächenspannung und weiter von den Anziehungen beider Flüssigkeiten abhängt.

Wir gelangen dann für den Winkel, den die beiden Kräfte α_1 und α_{12} mit einander und mit α_2 bilden müssen, zu ganz demselben Satze, den wir auch § 72 erhielten. Die drei Kräfte müssen sich verhalten wie die drei Seiten eines Dreiecks, dessen Winkel die Nebenwinkel der drei Winkel ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 (Fig. 128) sind; jeder Seite liegt der Nebenwinkel desjenigen Winkels gegenüber, welchen die betreffende Kraftrichtung schneidet[1]). Es besteht somit zwischen den drei Winkeln die Beziehung

$$\frac{\alpha_1}{\sin\vartheta_1} = \frac{\alpha_2}{\sin\vartheta_2} = \frac{\alpha_{12}}{\sin\vartheta_3}.$$

Hieraus folgt zunächst, dafs die drei Winkel längs des ganzen Umfanges des Tropfens dieselben sein müssen, da α_1, α_2, α_{12} dort überall denselben Wert haben. Der Tropfen mufs daher einen Rotationskörper bilden, sein der Oberfläche paralleler Schnitt, also auch der durch CD gelegte, mufs ein Kreis sein. Die Erfahrung zeigt das, wie man sofort an einem Öltropfen erkennt, den man auf die Oberfläche von Wasser bringt, welches längere Zeit an der Luft gestanden hat.

Da in dem aus den drei Kapillarkonstanten mit den Nebenwinkeln der Winkel ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 gebildeten Dreiecke dem Nebenwinkel von ϑ_3 die Seite α_{12} gegenüberliegt, so erhalten wir für den Randwinkel ϑ_3 des Tropfens die Gleichung

$$\alpha_{12}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\cos\vartheta_3$$

$$-\cos\vartheta_3 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_{12}^2}{2\alpha_1\alpha_2}.$$

Die Gleichung zeigt, dafs der Winkel ϑ_3 gleich 180° oder unmöglich wird, sobald

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_{12}^2 \geqq 2\alpha_1\alpha_2,$$

oder

$$\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 \geqq \alpha_{12}^2$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 \geqq \alpha_{12}.$$

[1]) Der Satz ist zuerst von *F. E. Neumann* ausgesprochen. Man sehe *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX p. 59. *P. Du Bois Reymond*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX p. 266.

Bringt man also eine Flüssigkeit 1 auf eine Flüssigkeit 2 mit gröfserer illarkonstante, so breitet sich die Flüssigkeit stets aus, wenn die in gemeinsamen Oberfläche der beiden Flüssigkeiten vorhandene Kapillar-tante gleich oder kleiner ist als die Differenz der Kapillarkonstanten freien Oberflächen der beiden Flüssigkeiten.

Quincke hat diesen Satz durch Messung von Kapillaritätskonstanten ler gemeinschaftlichen Oberfläche zweier Flüssigkeiten, etwa an Tropfen einer schweren Flüssigkeit, welche er in eine leichtere brachte, wie :ksilber, Chloroform, Schwefelkohlenstoff in Wasser, oder in anderer se geprüft. Es fand sich stets obige Relation bei Ausbreitungsversuchen tigt. Am einfachsten stellt sich obiges Gesetz bei Flüssigkeiten, welche dem Verhältnisse mischbar sind. Denn dort ist, wie schon im vorigen graphen erwähnt wurde, α_{12} stets gleich Null. In dem Falle mufs also die Flüssigkeit mit kleineren Kapillarkonstanten sich auf einer Flüssig- mit gröfseren Kapillarkonstanten ausbreiten[1]).

Da das Ausbreitungsphänomen wesentlich von der Oberflächenspannung sich berührenden Flüssigkeiten abhängt, so erkennt man, dafs kleine unreinigungen der Oberflächen, besonders derjenigen, auf der die Aus- tung stattfinden soll, von wesentlichem Einflufs auf die Erscheinung mufs. So erklärt es sich, dafs Öl auf frischem Wasser sich ausbreitet, t auf gestandenem, dafs Wasser sich nur auf der Oberfläche ganz reinen cksilbers ausbreitet u. m. a.[2]).

§ 82.

Diffusion. Wenn zwei mischbare Flüssigkeiten vorsichtig so zu- mengegossen werden, dafs die leichtere anfänglich über der schwereren gert ist, so findet dennoch allmählich eine Mischung der Flüssigkeiten t, indem wegen der stärkern Anziehung der einen Flüssigkeit auf die ekttle der andern eine Mischung zunächst in der Grenzschicht der beiden sigkeiten eintritt und aus dieser dann die Moleküle der einen Flüssigkeit er in die andere verbreitet werden. Man bezeichnet dieses Durch- gen der Flüssigkeiten mit dem Namen der Diffusion. Je nachdem gere oder kürzere Zeit vergeht, ehe die Mischung der Flüssigkeiten auf e Weise vollständig wird, schreibt man ihnen eine gröfsere oder kleinere usionsgeschwindigkeit zu.

Am genauesten ist die Diffusion gelöster Substanzen untersucht worden. erste, welcher sich näher damit beschäftigte, war Graham[3]); derselbe lte Gefäfse, welche mit verschieden konzentrierten Lösungen der zu ersuchenden Salze gefüllt waren, in gröfsere Gefäfse mit Wasser und glich die Salzquantitäten, welche in gleichen Zeiten in das umgebende sser hinübergegangen waren. Er fand, dafs bei nicht zu konzentrierten ungen diese Mengen der Konzentration der angewandten Lösungen,

---

[1]) *Quincke* a. a. O. *Lüdtge*, Poggend. Ann. Bd. CXXXVII. *Marangoni*, gend. Ann. Bd. CXLIII.

[2]) Man sehe über den Einflufs unmerklich dünner Schichten fremder Sub- zen *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX und Neue Folge (Wiedem. Ann.) II.

[3]) *Graham*, Liebigs Annalen Bd. LXXVII. Bd. LXXX. Bd. CXXI.

resp. den Mengen des in gleichen Volumen derselben gelösten Salzes proportional waren, dafs bei gleicher Konzentration indes die Mengen verschiedener Salze sehr verschieden waren, so dafs man den verschiedenen Salzen eine sehr verschiedene Diffusionsgeschwindigkeit zuschreiben mufs.

Bald nach den Versuchen Grahams gab Fick[1]) eine einfache Theorie der Diffusion, durch welche man zu einer präcisen Definition des Begriffes der Diffusionsgeschwindigkeit gelangt. Fick nimmt an, dafs die Menge des in der Zeiteinheit aus einer Schicht in die nächstfolgende übergehenden Salzes der Konzentrationsdifferenz der beiden Schichten proportional ist. Denken wir uns nun ein cylindrisches Rohr, welches unten geschlossen ist und auf seinem Boden eine Schicht Salzlösung von der Konzentration u_0 enthalte, wo u_0 die im Kubikcentimeter Lösung vorhandene Menge Salz bedeuten soll. Über diese Schicht sei zunächst reines Wasser gebracht. Nach irgend einer Zeit t wird dann ein Teil des Salzes in das Wasser diffundiert sein und eine Schicht in der Höhe x über dem Boden hat zu der Zeit die Konzentration u. Eine um dx höhere Schicht hat dann die Konzentration $u - du$; während der unendlich kleinen Zeit dt ist dann die aus der ersteren in die folgende übergehende Salzmenge nach der Annahme von Fick

$$ds = -\varkappa q\, du \cdot dt,$$

wo wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen schreiben müssen, weil der Salzstrom nach der Richtung der abnehmenden Konzentration stattfindet. Es bedeutet in der Gleichung q den Querschnitt des Gefäfses und $\varkappa$ eine nur von der Natur des Salzes abhängige Konstante, welche die Menge des durch die Flächeneinheit übertretenden Salzes sein würde, wenn die Differenz der Konzentration zweier benachbarter Schichten gleich der Einheit wäre. Anstatt der Konstanten $\varkappa$, welche sehr grofs sein würde, da der Konzentrationsunterschied zweier benachbarter Schichten immer sehr klein ist und zudem, da wir den Unterschied du niemals wirklich angeben können, nicht bestimmbar wäre, führen wir besser eine andere Konstante ein, welche wir dann als das Mafs der Diffusionsgeschwindigkeit erhalten. Als solche bezeichnen wir die Salzmenge, welche in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit geht, wenn zwei um die Längeneinheit von einander entfernte Querschnitte die Konzentrationsdifferenz 1 haben, vorausgesetzt, dafs die Konzentrationsabnahme von Querschnitt zu Querschnitt, welche um dx von einander entfernt sind, immer denselben Wert hat. Ist die Konzentrationsabnahme in zweien um dx entfernten Querschnitten gleich du, so ist sie in zweien um die Längeneinheit entfernten gleich $\frac{du}{dx}$, und mit Einführung der Konstanten k erhalten wir dann für die in der Zeit dt von einem Querschnitte zu dem folgenden übergehende Salzmenge

$$ds = -kq \frac{du}{dx} dt.$$

Dieser aus der Fickschen Annahme sich ergebende Ausdruck für die im Zeitelement dt übergehende Salzmenge gestattet uns nun zunächst die dort eintretende Konzentrationsänderung zu berechnen. In derselben Zeit

---

[1]) *Fick*, Poggend. Ann. Bd. XCIV.

ler durch den Querschnitt x diese Salzmenge ds in den Raum zwischen
nd dx tritt, wandert eine andere Salzmenge ds' durch den Querschnitt
$+ dx$ aus diesem Raum weiter. Nennen wir die Konzentrationsdifferenz
schen dem Querschnitt $x + dx$ und $x + 2dx$ in dem betrachteten Zeit-
ment du', so erhalten wir für ds'

$$ds' = -kq \frac{du'}{dx} dt,$$

ıit

$$ds - ds' = -kq \frac{du - du'}{dx} dt.$$

Diese Salzmenge wandert in den zwischen x und dx vorhandenen
ım mehr zu als aus demselben fort. Nach unserer Definition der Kon-
ration ist somit die Konzentrationsänderung, die Zunahme der Salz-
ıge in der Volumeinheit

$$\frac{ds - ds'}{qdx},$$

qdx der Raum ist, in welchem die Salzmenge um $ds - ds'$ zunimmt.
ichnen wir auch diese in der Zeit dt stattfindende Zunahme der Kon-
ration mit du, so wird

$$\frac{du}{dt} = -k \frac{du - du'}{dx^2} = -k \frac{d^2u}{dx^2},$$

n wir die Differenz der beiden Konzentrationsänderungen du und du'
wei um dx entfernten Schichten als d^2u bezeichnen. Die Entwicklung
t uns, dafs die Konzentration u zu einer gegebenen Zeit abhängig ist
dem Abstande x des betrachteten Querschnittes von dem untern Ende
Rohres, dafs sie also eine Funktion von x ist. Gleichzeitig ändert sie
aber an allen Stellen mit der Zeit, sie ist also eine Funktion der Zeit.
h den Entwicklungen der Einleitung erkennen wir dann, dafs uns die
ısche Annahme eine Beziehung liefert zwischen dem ersten Differential-
tienten von u als Funktion der Zeit und dem zweiten Differential-
tienten als Funktion des Abstandes des betrachteten Querschnittes von
untern Ende des Cylinders.

Die allgemeine Behandlung dieser Gleichung, das heifst die Ableitung,
he Funktion die Konzentration u von der Zeit t und von x ist, bietet
liche Schwierigkeiten[1]. In gewissen einfachen Fällen können wir die-
e indes auflösen und damit Versuchsmethoden erhalten, durch welche
die Theorie prüfen können.

Wir bringen auf den Boden des Cylinders eine Menge festen Salzes,
lafs dort, so lange auch der Versuch dauert, immer eine konzentrierte
ıng des Salzes ist. Dann setzen wir den Cylinder, dessen Länge l sei,
in grofses Gefäfs mit Wasser, so dafs selbst wenn alles Salz in dieses
ser hinüberdiffundiert wäre, die Konzentration doch eine so kleine ist,
wir sie gleich Null setzen dürfen. Die Konzentration ist dann an dem
rn Ende des Cylinders für $x = 0$ für die ganze Dauer des Versuches
tant und gleich u_0 der Konzentration der konzentriertesten Salzlösung,

---

[1]) Die allgemeine Behandlung geben *Wild* und *Simmler*, Poggend. Ann
3.

am obern Ende für $x = l$ dagegen gleich Null. Läfst man die Diff
hinreichend lange stattfinden, so mufs sich schliefslich ein stat ionäre
stand herstellen, sobald nämlich der letzte Querschnitt des Cylinde
gleichen Zeiten ebensoviel an die Umgebung abgibt, als er von den dar
liegenden Querschnitten erhält. Dafs dies nach einiger Zeit eintreten
ergibt die Überlegung, dafs mit Zunahme der Konzentration in der l
Schicht die Menge des in gegebener Zeit an die Umgebung abgege
Salzes zunimmt, dagegen diejenige des von der tiefern Schicht herkom
den Salzes abnimmt, da in der Tiefe die Konzentration konstant is
aber der letzte Querschnitt von einer konstanten, sich mit der Zeit
mehr ändernden Konzentration, so müssen es auch alle tiefer liegende
da eben der letzte Querschnitt nur dann eine konstante Konzentration
kann, wenn auch der vorletzte sie hat und so fort. Ist aber die K
tration in jedem Querschnitte eine mit der Zeit sich nicht mehr än
geworden, so ist

$$\frac{du}{dt} = 0$$

und die Gleichung, welche uns die Abhängigkeit der Konzentration
gibt, wird

$$k \frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

Nach unserer mathematischen Einleitung ist der zweite Diffe
quotient der erste des ersten Differentialquotienten, oder

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}.$$

Daraus, dafs der zweite Differentialquotient von u nach x glei
ist, folgt dann nach E I, dafs der erste Differentialquotient eine ko
von x nicht abhängige Gröfse ist, oder es ist

$$\frac{du}{dx} = a.$$

Hieraus folgt dann unter Beachtung von E 1

$$u = ax + b.$$

Die beiden Konstanten a und b ergeben sich daraus, dafs für
die Konzentration $u = u_0$ ist, somit

$$b = u_0,$$

ferner, dafs für $x = l$, $u = 0$, also

$$0 = al + u_0, \quad a = -\frac{u_0}{l},$$

somit wird

$$u = u_0 - \frac{u_0}{l} x,$$

oder die Konzentration nimmt dem Abstande von dem untern E
Cylinders proportional ab.

Man hätte diesen Satz auch einfach aus der Überlegung
können, dafs der stationäre Zustand nur eintreten kann, wenn durc

ierschnitt in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Salzes wandern, was nur glich ist, wenn die Konzentrationsdifferenz je zweier auf einander folgenir Querschnitte durch den ganzen Cylinder dieselbe ist. Ist das aber der ill, so mufs auch die Konzentrationsdifferenz je zweier gleich weit entnter Querschnitte die gleiche sein, oder die Konzentration mufs jedesmal n die gleiche Gröfse abnehmen, wenn wir in dem Cylinder um gleiche trecken aufsteigen, was eben unsere Gleichung für u darstellt.

Fick hat diese Folgerung der Theorie zu prüfen versucht, indem er i einem in der angegebenen Weise hergestellten Cylinder, dessen Boden rystallisiertes Kochsalz enthielt, den Diffusionsvorgang wochenlang dauern iefs, und dann durch vorsichtig eingesenkte mit einem äufserst feinen rahte an einer Wage hängende Glaskügelchen das specifische Gewicht der ösung in verschiedenen Höhen x über dem Boden bestimmte. Die aus n gefundenen specifischen Gewichten sich ergebenden Konzentrationen itsprachen der Gleichung so genau, als es bei der Schwierigkeit dieser ethode, wo das Einsenken des Kügelchens jedenfalls eine geringe Mischung rschiedener Schichten zur Folge hat, nur erwartet werden kann.

Um nach dieser Methode die Diffusionsgeschwindigkeit k zu bestimmen, hen wir zu der Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = -kq\frac{du}{dx}$$

rück. Die linke Seite bedeutet die in der Zeiteinheit von einer Schicht r nächstfolgenden wandernde Salzmenge, da ds die in der Zeit dt überhende Menge ist. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist das einh die in der Zeiteinheit aus dem Cylinder in das umgebende Wasser stretende Salzmenge. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist

$$-\frac{du}{dx} = \frac{u_0}{l}.$$

Nennen wir nun die Menge des in der Zeiteinheit austretenden Salzes so wird

$$S = kq\frac{u_0}{l},$$

er es mufs die in gleichen Zeiten aus den Röhren austretende Salzmenge r Länge der Röhren umgekehrt proportional sein.

Auch diesen Satz fand Fick bestätigt, indem er in der vorhin angebenen Weise drei Röhren sehr verschiedener Länge herstellte und nun ch Eintritt des stationären Zustandes die Menge des im Laufe eines ges in das äufsere Wasser übertretenden Salzes durch eine chemische ıalyse des Wassers, welche an in bestimmten Zeiträumen genommenen oben desselben ausgeführt wurde, bestimmte. Er erhielt für k nach der eichung

$$k = \frac{l \cdot S}{q \cdot u_0}$$

i Versuchen mit der

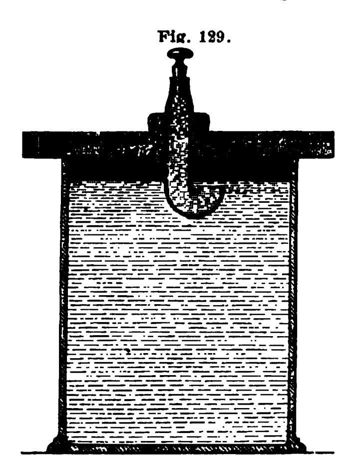
Temperatur	längsten	mittleren	kürzesten Röhre
$18^0 - 19$	$k = 1{,}071$	$k = 1{,}108$	$k = 1{,}050$

i Zahlen, die mit Berücksichtigung der unvermeidlichen Fehlerquellen der That als gleich zu betrachten sind.

Die Zahlen bedeuten in Grammen die Salzmenge, welche im Laufe eines Tages durch einen Querschnitt von 1^{qcm} geht, wenn zwei um 1^{cm} von einander entfernte Schichten eine solche Konzentrationsdifferenz haben, wie sie dem Unterschied von 1 Gramm Salz im Kubikcentimeter Lösung entspricht.

Durch Abwarten des stationären Zustandes erreicht man, dafs die Konzentration in dem Diffusionsgefäfs nicht mehr eine Funktion der Zeit, sondern nur eine Funktion des Abstandes einer Schicht vom Boden des Gefäfses ist; durch eine andere von Jolly angegebene Versuchsanordnung hat Beilstein[1]) es dahin zu bringen gesucht, dafs die Konzentration in dem ganzen Diffusionsgefäfs an allen Stellen die gleiche aber mit der Zeit sich ändernde ist. Die Lösung wurde in eine etwa 6^{cm} lange Glasröhre (Fig. 129) gefüllt, welche unten umgebogen und an ihrer Umbiegung so abgeschliffen war, dafs das Niveau der Mündung möglichst nahe über dem tiefsten Punkte der Umbiegung war; am obern Ende war das Gläschen etwas ausgezogen und durch einen eingeriebenen Glasstöpsel verschliefsbar. Um das Gläschen zu füllen, wurde es in ein Becherglas ganz in Lösung untergetaucht, und während die obere Öffnung mit der Lösung bedeckt war, mit dem Stöpsel verschlossen. Das gefüllte Gläschen wurde dann mittels eines durchbohrten Korkes in ein Brettchen gesteckt, welches auf dem horizontalen Rande eines mit Wasser gefüllten Gefäfses lag, so dafs sich die untere Öffnung des Gläschens einige Millimeter unter der Oberfläche des Wassers befand. Es wurde die Konzentration der Lösung vor dem Beginne des Versuches bestimmt, und dann wieder, nachdem der Versuch einen Tag oder zwei Tage gedauert hatte. Der Apparat war in einem Kellerraum von konstanter Temperatur aufgestellt. Die umgebende Wassermenge war so grofs, dafs deren Konzentration stets gleich Null gesetzt werden konnte.

Fig. 129.



Infolge der Diffusion wurde die Lösung zunächst in der Umbiegung verdünnt; da dann aber die Lösung in dem ganzen Gläschen konzentrierter, somit specifisch schwerer ist, nimmt Beilstein an, dafs stets durch Niedersinken der konzentrierteren Lösung eine Mischung stattfände, so dafs zu jeder Zeit innerhalb des Gläschens und an der Öffnung dieselbe aber infolge der Diffusion mit der Zeit abnehmende Konzentration vorhanden sei. Ganz wird dieser Zustand allerdings nicht erreicht werden können, da die in der Biegung befindliche Lösung als die tiefstliegende an dieser Mischung nicht teilnehmen kann. Annähernd wird aber die Voraussetzung erfüllt sein.

Nennen wir die in einem gegebenen Momente in dem Gläschen und der Grenzfläche vorhandene Konzentration u, so können wir die in dem Zeitelement dt durch den Querschnitt q der Öffnung nach aufsen wandernde Salzmenge, da das Wasser die Konzentration Null hat, setzen

[1]) *Beilstein*, Liebigs Annalen Bd. XCIX.

$$dS = Kqudt,$$

rin K der von uns definierten Diffusionsgeschwindigkeit proportional, cht derselben gleich ist, da hier nicht die Abnahme u auf 0 auf der ngeneinheit, sondern in einer kleinern allerdings nicht bekannten Strecke ttfindet. Nennen wir das Volumen des Gefäſses V, so können wir die dem gegebenen Momente in dem Gefäſse vorhandene Salzmenge

$$S = V \cdot u, \quad dS = - Vdu$$

zen, wo wir das negative Vorzeichen auf der rechten Seite schreiben, n anzudeuten, daſs durch Fortwandern der Salzmenge dS die Konzentra- n u des Gefäſses um du abnimmt. Damit wird

$$- du = \frac{Kq}{V} u dt; \quad - \frac{du}{u} = \frac{Kq}{V} dt.$$

Um die zur Zeit t vorhandene Konzentration zu erhalten, haben wir f beiden Seiten die Summen zu bilden von $t = 0$ bis $t = t$. Nennen wir bei Beginn des Versuches in dem Gefäſse vorhandene Konzentration u_0, wird

$$- \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u} = \int_0^t \frac{Kq}{V} dt = \frac{Kq}{V} \cdot t.$$

Nach E VIII und E 2 wird dann

$$\log u_0 - \log u = \frac{Kq}{V} t$$

$$K_1 = \frac{Kq}{V} = \frac{1}{t} (\log u_0 - \log u).$$

Es muſs demnach der Quotient aus der Differenz der Logarithmen der Beginn und am Ende des Versuches in dem Gläschen vorhandenen nzentration dividiert durch die Dauer des Versuches konstant sein.

In der That geben die Beobachtungen Beilsteins dieses Resultat, mit weichungen, welche hinreichend dadurch erklärt werden, daſs die Voraus- zungen der Berechnung, eine in dem ganzen Diffusionsgefäſs überall iche Konzentration, nicht strenge erfüllt sind.

So erhielt Beilstein unter andern folgende Werte von K_1 für ver- ieden konzentrierte Lösungen, und bei Versuchen, die teils einen, teils i Tage dauerten. Die Temperaturen waren stets 5—7° C Als Zeiteinheit dabei der Tag angenommen.

Salpetersaures Kali:

u_0	K_1	K'_1	
0,0197	0,184	0,189	Mittel 0,1845.
0,0393	0,192	0,190	
0,0962	0,176	0,176	

Doppelchromsaures Kali:

u_0	K_1	K'_1	
0,0199	0,146	0,146	Mittel 0,1480.
0,0394	0,153	0,149	

Chlorkalium.

u_0	K_1	K'_1	
0,0394	0,208	0,198	Mittel 0,2010.

Werte K'_1 sind aus den Versuchen mit zweitägiger Dauer berechnet.

Später haben Voit[1]) und Johannisjanz[2]) die Richtigkeit der Theorie zu prüfen und für einige Substanzen die Diffusionsgeschwindigkeiten zu bestimmen gesucht, indem sie auf den Boden eines cylindrischen oder prismatischen Gefäfses Lösung und auf diese Wasser brachten, und dann die Konzentration u in verschiedenen Höhen über der ursprünglichen Trennungsschicht in ihrer Abhängigkeit von der Zeit beobachteten. Wie indes Stefan[3]) gezeigt hat, sind die von diesen beiden Physikern angewandten optischen Beobachtungsmethoden nicht zur Erlangung richtiger Resultate geeignet. Stefan hat dann an den Versuchen Grahams die Theorie bestätigt und aus denselben eine Anzahl Diffusionsgeschwindigkeiten verschiedener Salze berechnet[4]).

Spätere Beobachtungen von F. Weber[5]), Schuhmeister[6]) und Long[7]) scheinen indes doch eine Abhängigkeit der Diffusionsgeschwindigkeit von der Konzentration zu ergeben. Weber erhielt nach einer Methode, die wir hier nicht auseinandersetzen können, für Zinkvitriol und den Konzentrationen

$$u = 0{,}214 \quad k = 0{,}2403; \qquad u = 0{,}318 \quad k = 0{,}2299$$

bei der Temperatur 18°, also einen mit steigender Konzentration abnehmenden Wert von k. Die Werte von k sind in den vorhin definierten Einheiten gegeben.

Schuhmeister führte entweder über einen mit Salzlösung gefüllten Cylinder einen langsamen Wasserstrom, in den das Salz aus dem Cylinder diffundierte und bestimmte die Menge des ausgetretenen Salzes aus der Konzentration der Lösung vor Beginn und nach Beendigung des Versuches, oder er stellte auf einen mit Salzlösung gefüllten Cylinder einen zweiten von genau gleichem Querschnitt und gleicher Länge, der mit Wasser gefüllt war. Nach Beendigung des Versuches konnten die beiden Cylinder ohne Mischung des Inhalts von einander getrennt werden und in jedem einzelnen die Konzentration bestimmt werden. Für die aus dem untern Cylinder in der Zeit t austretende Salzmenge ergibt die allgemeine Gleichung nach den Entwicklungen Stefans[8]) in dem

ersten Falle — zweiten Falle

$$S = 2 u_0 q \sqrt{\frac{k t}{\pi}} \qquad S = u_0 q \sqrt{\frac{k t}{\pi}},$$

wenn u_0 die anfängliche Konzentration, q den Querschnitt des Cylinders und π die Ludolphische Zahl bedeutet.

So erhielt Schuhmeister z. B. für Chlorkalium bei einer Temperatur 18°8 C.

$$\text{für } u_0 = 0{,}084\,09 \quad k = 1{,}319; \quad u_0 = 0{,}184\,37 \quad k = 1{,}406$$
$$u_0 = 0{,}289\,74 \quad k = 1{,}464.$$

---

1) *Voit*, Poggend. Ann. Bd. CXXX.
2) *Johannisjanz*, Wiedem. Ann. Bd II.
3) *Stefan*, Wiener Berichte. Bd. LXXVIII.
4) *Stefan*, Wiener Berichte. Bd. LXXIX..
5) *F. Weber*, Wiedem. Ann. Bd. VII.
6) *Schuhmeister*, Wiener Berichte. Bd. LXXIX.
7) *Long*, Wiedem. Ann. Bd. IX.
8) *Stefan*, Wiener Ber. Bd. LXXVIII.

Querschnitt in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Salzes wandern, was nur möglich ist, wenn die Konzentrationsdifferenz je zweier auf einander folgender Querschnitte durch den ganzen Cylinder dieselbe ist. Ist das aber der Fall, so mufs auch die Konzentrationsdifferenz je zweier gleich weit entfernter Querschnitte die gleiche sein, oder die Konzentration mufs jedesmal um die gleiche Gröfse abnehmen, wenn wir in dem Cylinder um gleiche Strecken aufsteigen, was eben unsere Gleichung für u darstellt.

Fick hat diese Folgerung der Theorie zu prüfen versucht, indem er in einem in der angegebenen Weise hergestellten Cylinder, dessen Boden krystallisiertes Kochsalz enthielt, den Diffusionsvorgang wochenlang dauern liefs, und dann durch vorsichtig eingesenkte mit einem äufserst feinen Drahte an einer Wage hängende Glaskügelchen das specifische Gewicht der Lösung in verschiedenen Höhen x über dem Boden bestimmte. Die aus den gefundenen specifischen Gewichten sich ergebenden Konzentrationen entsprachen der Gleichung so genau, als es bei der Schwierigkeit dieser Methode, wo das Einsenken des Kügelchens jedenfalls eine geringe Mischung verschiedener Schichten zur Folge hat, nur erwartet werden kann.

Um nach dieser Methode die Diffusionsgeschwindigkeit k zu bestimmen, gehen wir zu der Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = -kq\frac{du}{dx}$$

zurück. Die linke Seite bedeutet die in der Zeiteinheit von einer Schicht zur nächstfolgenden wandernde Salzmenge, da ds die in der Zeit dt übergehende Menge ist. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist das einfach die in der Zeiteinheit aus dem Cylinder in das umgebende Wasser austretende Salzmenge. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist

$$-\frac{du}{dx} = \frac{u_0}{l}.$$

Nennen wir nun die Menge des in der Zeiteinheit austretenden Salzes S, so wird

$$S = kq\frac{u_0}{l},$$

oder es mufs die in gleichen Zeiten aus den Röhren austretende Salzmenge der Länge der Röhren umgekehrt proportional sein.

Auch diesen Satz fand Fick bestätigt, indem er in der vorhin angegebenen Weise drei Röhren sehr verschiedener Länge herstellte und nun nach Eintritt des stationären Zustandes die Menge des im Laufe eines Tages in das äufsere Wasser übertretenden Salzes durch eine chemische Analyse des Wassers, welche an in bestimmten Zeiträumen genommenen Proben desselben ausgeführt wurde, bestimmte. Er erhielt für k nach der Gleichung

$$k = \frac{l \cdot S}{q \cdot u_0}$$

aus Versuchen mit der

Temperatur	längsten	mittleren	kürzesten Röhre
$18^0 - 19$	$k = 1{,}071$	$k = 1{,}108$	$k = 1{,}050$

drei Zahlen, die mit Berücksichtigung der unvermeidlichen Fehlerquellen in der That als gleich zu betrachten sind.

und wie, bei Salzlösungen z. B., der Austausch erfolgt, wenn man verschieden dichte Lösungen derselben Substanz unter sonst gleichen Umständen der Endosmose unterwirft.

Die ältern Versuche beschränkten sich darauf, die Volumzunahme zu messen, welche auf der einen Seite der Scheidewand eintrat, und glaubten in dieser Volumzunahme ein Mafs des endosmotischen Vorganges zu erkennen. Darauf hin gab Dutrochet[1]) einen Mefsapparat, das sogenannte Endosmometer an, welches in weiter nichts bestand als in einer geteilten, unten trichterförmig erweiterten und mit einer Membran geschlossenen Röhre. In diese wurde die eine Flüssigkeit, z. B. eine Salzlösung, bis zu einer bestimmten Höhe eingefüllt und dann die trichterförmige Erweiterung der Röhre in die zweite Flüssigkeit, z. B. Wasser, getaucht. Die Volumzunahme wurde an der Teilung der Röhre abgelesen. Mit diesem oder einem ähnlichen Apparate untersuchten Jerichau[2]), Brücke[3]), Vierordt[4]) die Endosmose verschiedener Stoffe durch verschiedene Membranen.

Indes kann diese Methode nicht zu genauen Resultaten führen, da sie nur die Volumänderung der einen Flüssigkeit, also nur den Diffusionsstrom nach der einen Richtung berücksichtigt. Diese Methode würde z. B. in dem Falle, wo die beiden entgegengesetzt gerichteten Ströme, welche den Austausch der Flüssigkeiten vermitteln, ganz gleiche Stärke haben, also eine Volumänderung nicht eintritt, zu dem ganz falschen Schlusse führen, dafs gar keine Diffusion eingetreten sei; in diesem Falle würde sie gar nichts messen können. Aus diesem Grunde waren auch die Resultate dieser Beobachter mehr qualitativer Natur, es ergaben sich aus ihnen die Thatsachen, welche wir vorhin angeführt haben.

Jedoch folgerten Dutrochet und Vierordt schon aus ihren Versuchen, dafs die Stärke der Endosmose bei Lösungen unter sonst gleichen Verhältnissen der Dichtigkeit der Lösungen proportional sei, d. h. dafs die Wassermengen, welche in gleichen Zeiten durch die Membran in die Röhre dringen, in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die Dichtigkeit der Lösungen in der Röhre.

Jolly[5]) wandte ein anderes Verfahren an; er mafs nicht die Volumänderungen, sondern die Gewichtsänderungen der Endosmometer, denen er dazu auch eine sehr einfache Form gab. Eine cylindrische Glasröhre von vielleicht zwei Decimeter Länge und $1\frac{1}{2}$ Centimeter Weite wurde einfach an ihrem Ende mit einem Stücke einer feuchten thierischen Blase geschlossen und dann mit einer abgewogenen Menge des zu untersuchenden Stoffes gefüllt und in reines Wasser getaucht. Der leichtern Übersichtlichkeit des Versuches wegen wurde dann dafür gesorgt, dafs die äufsere Flüssigkeit stets Wasser war, indem die Röhre in ein grofses Gefäfs mit Wasser getaucht wurde, in welchem das Wasser von Zeit zu Zeit erneuert wurde.

Zunächst liefs Jolly den endosmotischen Vorgang so lange dauern, bis im Innern der Röhre nur mehr reines Wasser vorhanden war, indem er so

[1]) *Dutrochet*, Annales de chim. et de phys. T. XXXV.
[2]) *Jerichau*, Poggend. Ann. Bd. XXXIV. 613.
[3]) *Brücke*, De Diffusione humorum per septa. Berlin 1841. Daraus Poggend. Ann. Bd. LVIII. p. 77.
[4]) *Vierordt* in Archiv von Roser und Wunderlich. Bd. VI. 1847.
[5]) *Jolly*, Zeitschrift für die rationelle Medicin von Henle und Pfeufer. Bd. VII.

nge die Röhre in das Wasser tauchen liefs, bis sich keine Gewichts-
ıderung der Röhre mehr zeigte. Da dann die eine Substanz ganz aus der
5hre verschwunden war, so erhielt er in der Gewichtszunahme der Röhre
e Menge Wassers, welche den ausgetauschten Stoff ersetzt hatte.

Die Versuche ergaben, dafs bei gleicher Membran und gleichbleibender
ımperatur für eine gewisse Menge des der Endosmose ausgesetzten Stoffes
ets die gleiche Menge Wasser eintrat, ob man nun ursprünglich eine
einere oder gröfsere Menge des Stoffes in die Röhre gethan hatte. So
nd sich, dafs bei Anwendung derselben Membram für 1gr Kochsalz stets
hezu 4gr Wasser in die Röhre getreten waren. Bei einem Versuche
igten sich z. B. folgende Zahlen, aus denen man auch ein Bild erhält, wie
lly die Versuche ausführte.

Zunächst wurde das Endosmometer leer, aber mit ganz durchfeuchteter
ımbran gewogen und es war:

Gewicht der Röhre leer, feucht	37,81gr
Gewicht des trockenen Kochsalzes	2,00 „
Gewicht des Lösungswassers	6,20 „
Totalgewicht	46,01gr
Gewicht nach 6 Tagen, nachdem alles Kochsalz aus der Röhre getreten war	53,17gr
Die Gewichtszunahme der Röhre betrug also . .	7,16 „

Da ferner 2gr Kochsalz ausgetreten waren, die ebenfalls durch Wasser
ıetzt waren, so waren im ganzen 9,16gr Wasser bei der Endosmose für
ı 2gr Kochsalz, oder für

1gr Kochsalz 4,58gr Wasser

ıgetreten.

In einem andern Versuche wurden 2,4gr trockenes Kochsalz auf die
ımbran gelegt, und es traten ein 10,36 Wasser, oder für

1gr Kochsalz 4,316gr Wasser.

In einem dritten Versuche traten für 0,741gr Kochsalz 3,215gr Wasser
ı, oder für

1gr Kochsalz 4,338gr Wasser.

Jolly wandte zu seinen Versuchen Schweinsblasen an, aber selbst für
rschiedene Stücke derselben Membran fanden sich die Werte der ein-
stenden Wassermengen für denselben Stoff verschieden. Nur bei Anwen-
ng desselben Membranstückes waren sie konstant, indes weichen die von
lly für verschiedene Stücke Schweinsblasen bestimmten Zahlen so wenig
n einander ab, dafs man wohl füglich eine Mittelzahl aus diesen als für
hweinsblase überhaupt gültig ableiten kann.

Jolly nennt die für 1gr eines Stoffes eintretenden Wassermengen das
dosmotische Äquivalent des Stoffes. Das endosmotische Äquivalent ändert
h nach den neueren Versuchen von Schmidt[1]) nicht merklich mit der
mperatur. Jolly findet aus seinen Versuchen folgende endosmotische
quivalente für Schweinsblase:

---

[1]) *Schmidt* in Poggend. Ann. Bd. CII.

Kochsalz	4,22
Glaubersalz	11,05
Schwefels. Kali . . .	12,70
Schwefels. Magnesia .	11,65
Kalihydrat	231,40
Alkohol	4,13
Zucker	7,25.

Für andere Membranen erhält man andere Zahlen; so fand Eckl
für den Herzbeutel des Rindes das Äquivalent für Kochsalz = 3,2.

Jolly weist dann in seiner Arbeit ferner nach, dafs das von Dut
ausgesprochene Gesetz, dafs die Stärke der Endosmose der Dichtigke
Lösung proportional sei, richtig ist; ein Resultat, welches Schmidt bes

Gegen Jollys Annahme endosmotischer Äquivalente trat bald
Ludwig[2]) auf, indem er nachzuweisen suchte, dafs dasselbe von de
zentration der Flüssigkeit abhänge, welche man der Endosmose au
So ergaben Ludwigs Versuche für Glaubersalz eine Schwankung zw
4 und 42. Indessen lassen sich gegen die Ludwigschen Zahlen manch
wendungen machen, indem die Veränderlichkeit derselben mehr au
Änderung der Membran als des Äquivalents hindeutet. Es wurd
auch bei derselben Temperatur ein und derselben Konzentration der I
einmal 31,9, ein anderesmal 21,0 und bei einem andern Stück Schwein
gar nur 8 als endosmotisches Äquivalent des Glaubersalzes gefunden.
Änderungen zeigen sich hauptsächlich nach Anwendung krystalli
Salzes. In solchen Fällen findet Schmidt für Glaubersalz etwas Ähn
aber viel unbedeutendere Schwankungen als Ludwig, indem Schmi
Glaubersalz und den Herzbeutel eines Rindes eine Zahl nahe gleich
hält, die bei Anwendung krystallisierten Salzes etwas über 10 wird.
ist geneigt, dieses auf eine Änderung der Membran zu schieben.

Als durchaus konstant scheint man indes nach neueren Versuch
Eckhard[3]) die endosmotischen Äquivalente auch bei vollständig
bleibender Membran nicht annehmen zu können. Wie Eckhard angibt,
der frische Herzbeutel des Rindes, nachdem derselbe einige Stunden in
destilliertem Wasser ausgewässert und dann zwischen den Versuchen
Wasser aufbewahrt ist, lange Zeit ungeändert, wie sich daraus ergibt
man für das endosmotische Äquivalent, wenn man es von Zeit zu Zeit
denselben Umständen wieder bestimmt, immer denselben Wert findet

Zur Bestimmung des Äquivalentes des Kochsalzes verfuhr E
zunächst so, dafs er in die Röhre gesättigte Kochsalzlösung und feste
brachte, und um auf beiden Seiten der Membran während der ganzen
des Versuches denselben Zustand zu erhalten, den endosmotischen P
nur so lange dauern liefs, als in der Röhre sich noch festes Salz b
Die Menge des eingedrungenen Wassers wurde aus der Gewichtszu
der Röhre und die Menge des fortgewanderten Salzes aus einer Analy
Röhreninhalts bestimmt. Für Kochsalz ergab sich so der vorhin ange
Wert 3,2.

---

[1]) *Eckhard*, Beiträge zur Physiologie herausgegeben von C. E
II. Bd. Giefsen.

[2]) *Ludwig* in Zeitschrift für rationelle Medicin. B. VIII.

[3]) *Eckhard*, Poggend. Ann. Bd. CXXVIII. p. 61.

Um bei verdünnteren Lösungen ebenso auf beiden Seiten der Membran während des Versuches einen konstanten Zustand zu erhalten, liefs Eckhard während der Dauer desselben durch die Röhre einen Strom von einigen hundert Kubikcentimetern der benutzten Lösung gehen; aus deren Konzentrationsänderung, die immer sehr klein war, wurde dann die übergegangene Salz- und Wassermenge bestimmt. Für eine Lösung, die etwa 22 Teile Kochsalz in 100 Wasser gelöst hatte, ergab sich so als Äquivalent 2,88, für eine von 12,5 Teilen Salz auf 100 ergab sich 2,34; Eckhard fand also dasselbe mit abnehmender Konzentration kleiner.

Mit dieser Angabe Eckhards scheint mir indes eine andere nicht recht vereinbar, nach welcher sich immer dasselbe Äquivalent findet, wenn man eine gesättigte Lösung in andere Lösungen desselben Salzes diffundieren läfst, welches auch die Konzentration der äufsern Lösung ist.

Es fragt sich nun, nach Vorführung der wichtigsten, die endosmotischen Erscheinungen betreffenden Thatsachen, wie haben wir uns die Volumänderungen der Flüssigkeiten, den Austausch nach verschiedenen Mengen zu erklären. Wir lassen hier die von Jolly gegebene Theorie folgen, da sie die einfachste ist und die wenigsten Hypothesen voraussetzt.

Wird eine poröse, mit unzählig vielen kapillaren Zwischenräumen versehene Membran in eine Flüssigkeit getaucht, so beweisen uns Versuche, dafs je nach der Molekularanziehung zwischen der Substanz der Membran und der Flüssigkeit verschiedene Mengen Flüssigkeit von der Membran resorbiert werden; so nehmen 100 Gewichtsteile trockene Ochsenblase in 24 Stunden auf

268	Gewichtsteile	Wasser,
133	„	Kochsalzlösung (1,214 spec. Gew.),
38	„	Weingeist (84 Proc.).

Wird deshalb eine Membran in ein Gemische zweier Flüssigkeiten getaucht, so wird sie von beiden nach Mafsgabe ihrer Anziehung resorbieren, also auch aus einer Salzlösung gelöstes Salz und Wasser. Jolly nimmt an, dafs die Menge des resorbierten in einer Salzlösung gelösten Salzes überdies proportional sei der Dichtigkeit der Lösung.

Wenn eine Membran zur Trennung zweier Flüssigkeiten, etwa Wasser und Kochsalzlösung dient, so wird die Membran durch Molekularanziehung jeden der beiden getrennten Stoffe aufnehmen; die Quantität des aufgenommenen Kochsalzes ist aber verschieden nach der Dichtigkeit der Lösung. Dieser so mit zwei Stoffen imprägnierten Blase wird auf der einen Seite durch das daran liegende Wasser Kochsalz, auf der andern Seite durch das daran liegende Kochsalz Wasser entzogen; in verschiedenen Mengen jedoch, weil die resorbierten Stoffe in verschiedenen Mengen in der Blase enthalten sind, und weil die Resultierende aller Molekularanziehungen der gelösten Salzteile auf das Wasser verschieden ist, je nach der Dichtigkeit der Lösung. Nimmt man an, dafs die Resultierende proportional sei der Dichtigkeit der Lösung, so folgt hieraus, dafs das Verhältnis der sich austauschenden Stoffe für alle Dichtigkeitsgrade der Lösung konstant bleibt. Denn wird die Dichtigkeit der Lösung z. B. die Hälfte, so wird auch die resorbierte Salzmenge die Hälfte, das Wasser entzieht also der Blase nur die halbe Menge Salz; ebenso entzieht aber auch die Lösung, deren Dichte

die Hälfte ist, der Blase nur die halbe Menge Wasser. Sind die e motischen Äquivalente nicht konstant, so muſs man schlieſsen, daſs d sultierende Molekularanziehung der Lösungsdichtigkeit nicht einfach portional zu setzen ist, sondern mit derselben in komplicierterer ziehung steht.

§ 84.

Ausfluſs der Flüssigkeiten. Toricellis Theorem. Wenn n den Boden oder die Seitenwand eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Ge eine Öffnung macht, so flieſst die Flüssigkeit mit einer gewissen Gesc digkeit daraus hervor, welche um so gröſser ist, je höher das Nivea Flüssigkeit über der Ausfluſsöffnung ist. Um diese Geschwindigkeit z stimmen, wollen wir uns ein Gefäſs denken, in welchem trotz des Ausf durch regelmäſsiges Nachflieſsen die Flüssigkeit auf demselben Nivea halten wird. Da die unten in der Öffnung ausflieſsende Flüssigkeit durch nachsinkende Flüssigkeit wieder ersetzt wird, so muſs die gan Gefäſs über der Ausfluſsöffnung befindliche Flüssigkeit in Bewegun raten und sich mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen die Au öffnung hin bewegen. Dabei muſs sich dann ferner sofort nach Begin Ausflieſsens in dem ganzen Gefäſse ein stationärer Zustand einstellen heiſst, es muſs durch jeden Querschnitt des Gefäſses in gleichen Zeit gleiche Menge von Flüssigkeit hindurchgehen. Denn ist AB (Fig. 13 Querschnitt durch die Flüssigkeit des Gefäſses $MNOP$ und CD irger anderer Querschnitt, so ist die zwischen diesen beiden Querschnitten handene Flüssigkeitsmenge immer dieselbe; es muſs daher in gleichen in den zwischen den Querschnitten gelegenen Raum durch AB eben Flüssigkeit eintreten, wie ihn durch den Querschnitt CD wieder ve



Fig. 130.

Nennen wir nun die mittlere senkrecht AB gerichtete Komponente der Geschw keit der Flüssigkeitsteilchen im Moment sie AB passieren, u, und die Gröſse des schnitts Q, so ist die Menge Flüssigkeit, w in der Zeiteinheit den Querschnitt AB pa gleich Qu. Wir bezeichneten u als die m senkrecht gegen AB gerichtete Geschw keitskomponente, denn in Wirklichkeit w sich weder alle Teilchen senkrecht gegen noch alle mit derselben Geschwindigke wegen. Aber welches auch die Richtun Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen s können immer die in der Zeiteinheit durch AB hindurchtretende Flüs durch einen senkrechten Cylinder darstellen, dessen Basis der Quer Q und dessen Höhe u ist; diese Höhe u ist dann die mittlere gege rechte Geschwindigkeit der Flüssigkeit, denn wenn alle Flüssi mit dieser Geschwindigkeit den Querschnitt AB durch soviel Flüssigkeit durch AB hindurchgehen, als wirkli

— Bedeutung für den Querschnitt CD, dessen in der Zeiteinheit durch diesen hindurch

ssigkeit gleich $Q' \cdot u'$. Es ergibt sich somit

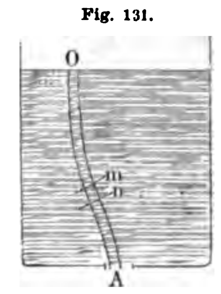
$$Q \cdot u = Q' \cdot u' \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (I),$$

r die mittleren Geschwindigkeiten, mit welchen die Flüssigkeitsteilchen verschiedenen Querschnitte passieren, verhalten sich umgekehrt wie die ſse der Querschnitte.

Der stationäre Zustand ist ferner dadurch charakterisiert, daſs während ıer Dauer durch irgend ein beliebiges Element eines Querschnittes die ssigkeit immer mit derselben Geschwindigkeit und nach derselben Richg hindurchgeht, daſs also die Flüssigkeitsteilchen sich immer in denıen Bahnen bewegen; wird also das Element m einmal von der Flüssigt mit einer gewissen Geschwindigkeit nach der Richtung mn durchsetzt, ›ewegt sich während der ganzen Dauer des stationären Zustandes die ssigkeit in der gleichen Weise hindurch. Es folgt das einfach daraus, s es immer genau dieselben Kräfte sind, welche die Flüssigkeit bewegen, daſs die Bewegung immer unter denselben Umständen stattfindet. ser Satz gestattet uns das Gesetz zu bestimmen, nach welchem sich die chwindigkeit der Flüssigkeit im Innern des Gefäſses ändert und dann Hülfe von Gleichung (I) die Geschwindigkeit in der Ausfluſsöffnung zu ›chnen.

Ist nämlich AO der Weg, den ein Flüssigkeitselement von der Oberhe bis zur Ausfluſsöffnung zurücklegt, so werden alle bei O die Oberhe verlassenden Flüssigkeitselemente denselben Weg derselben Geschwindigkeit zurücklegen, es wird also Kanal stetig mit Flüssigkeit erfüllt sein, die sich in Richtung dieses Kanals bewegt. Sei nun bei m in Tiefe h unter der Oberfläche ein Querschnitt des ıals gleich q, und sei v die Geschwindigkeit, mit cher die Flüssigkeit den Querschnitt durchsetzt, so d in der Zeit dt ein Flüssigkeitsvolumen $q \cdot v \cdot dt$ ch diesen Querschnitt durchflieſsen. Dabei, während jedes Flüssigkeitsteilchen den Weg $v \cdot dt$ zurücklegt r von dem Querschnitt m zu dem um $v \cdot dt$ entfernten ırschnitt n gelangt, nimmt die Geschwindigkeit um dv zu, so daſs der ırschnitt n mit der Geschwindigkeit $v + dv$ passiert wird. Diesen Gewindigkeitszuwachs, den das Flüssigkeitsvolumen $q \cdot v \cdot dt$ in der Zeit ›rhält, können wir mit Hülfe der die Flüssigkeit bewegenden Kräfte beımen. Ist s das specifische Gewicht der Flüssigkeit, g die Beschleunigung n freien Fall, so daſs $\frac{s}{g}$ die Masse der Volumeinheit der Flüssigkeit so ist $\frac{s}{g} \cdot q \cdot v \cdot dt$ die in der Zeit dt durch m passierende Flüssigkeitsse, welche auf dem Wege mn in der Zeit dt den Geschwindigkeitsachs dv erhält. Die in der Zeit dt dieser Masse durch die wirksamen fte erteilte Bewegungsgröſse ist somit

Fig. 131.



$$\frac{s}{g} \cdot q \cdot v \cdot dt \cdot dv.$$

Diese Bewegungsgröſse muſs gleich dem Produkte aus der diesen chwindigkeitszuwachs bewirkenden Kraft in die Zeit dt sein.

bewegende Kraft ist zunächst die der Bewegungsrichtung parallele Komponente der Schwere der herabsinkenden Masse. Das Gewicht dieser Masse ist $s \cdot q \cdot v \cdot dt$; ist nun α der Winkel, den die Verbindungslinie der beiden Schnitte m und n mit der vertikalen bildet, so ist die der Bewegungsrichtung parallele Komponente des Gewichtes

$$s \cdot q \cdot v \cdot dt \cdot \cos \alpha.$$

Da $v \cdot dt$ der Abstand der beiden Schnitte m und n ist, so ist $v \cdot dt \cdot \cos \alpha$ der vertikale Abstand des Schnittes n von m, oder der Zuwachs, den die von der Oberfläche gerechnete Tiefe h erfährt, wenn die Flüssigkeit von dem Schnitte m zu dem Schnitte n herabsinkt; setzen wir diese gleich dh, so wird die der Bewegungsrichtung parallele Komponente der Schwere

$$s \cdot q \cdot dh.$$

In der Schicht m wirkt ferner auf die Flüssigkeit ein gewisser Druck, der für die Flächeneinheit gleich p sei; in der tiefer liegenden Schicht p ist dieser Druck ein gröfserer, setzen wir ihn $p + dp$. Da die Flüssigkeit sich von einer Stelle geringeren zu einer solchen gröfseren Druckes bewegt, so wirkt diese Vergrösserung des Druckes der Bewegung entgegen, und dieser auf die Fläche q wirkende Gegendruck ist $q \cdot dp$. Die während der Zeit dt auf die Flüssigkeit wirkende Kraft ist somit

$$s \cdot q \cdot dh - q \cdot dp.$$

Da die durch diese Kraft der Flüssigkeit erteilte Bewegungsgröfse dem Produkte aus der Kraft in die Zeit, in welcher sie der Flüssigkeit die Bewegungsgröfse erteilt hat, gleich sein mufs, so folgt

$$\frac{s}{g} \cdot q \cdot v \cdot dv \cdot dt = (s \cdot q \cdot dh - q \cdot dp)\, dt,$$

oder wenn wir auf beiden Seiten durch qdt dividieren,

$$\frac{s}{g} \cdot v \cdot dv = s \cdot dh - dp.$$

Diese Gleichung liefert uns die Zunahme der Geschwindigkeit, wenn die Flüssigkeit um die Höhe dh herabsinkt. Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Oberfläche, in welcher $h = 0$, der Druck $p = p_0$ etwa gleich dem Drucke der Atmosphäre ist, verläfst, mit v_0, so erhalten wir die Geschwindigkeit v in der Tiefe h, wo der Druck gleich p ist, wenn wir für alle zwischen der Oberfläche und der Tiefe h liegenden Schichten den Wert dv bestimmen und dann alle diese Ausdrücke summieren, also in der Summe

$$\int_{v_0}^{v} \frac{s}{g}\, v\, dv = \int_{h=0}^{h} s\, dh - \int_{p_0}^{p} dp.$$

In schon mehrfach gezeigter Weise sind diese Summen

$$\frac{1}{2} \frac{s}{g} (v^2 - v_0^2) = s \cdot h - (p - p_0) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ (II)},$$

eine Gleichung, welche uns, wenn wir v_0, p und p_0 kennen, die Geschwindigkeit v in der Tiefe h zu berechnen gestattet.

Wir haben bei dieser Entwicklung einen Flüssigkeitsfaden vom Querchnitt q von übrigens beliebiger Lage vorausgesetzt und für ihn nur die Bedingung gemacht, dafs er die Bahn eines Elementes der Flüssigkeit von er Oberfläche bis zur Ausflufsöffnung sei. Da wir über die Lage dieses Flüssigkeitsfadens keine weitere Voraussetzung gemacht haben, so gilt iese Gleichung für alle Flüssigkeitsfäden, oder für die ganze ausströmende Flüssigkeit, so dafs uns obige Gleichung ganz allgemein die Geschwindigeit v in der Tiefe h unter der Oberfläche liefert.

Ist nun H die Tiefe der Ausflufsöffnung unter dem Niveau, p_1 der Druck in derselben, welcher der Bewegung der Flüssigkeit entgegenwirkt, o erhalten wir die Ausflufsgeschwindigkeit v_1 aus der Gleichung

$$v_1^2\left(1-\frac{v_0^2}{v_1^2}\right)=2gH-2\,\frac{g}{s}\,(p_1-p_0).$$

Um in dieser Gleichung noch den Quotienten $\frac{v_0^2}{v_1^2}$ zu bestimmen, dient ie Gleichung (I). Ist die Oberfläche horizontal, somit in ihr ein überall gleier vertikaler Druck vorhanden, so ist die Bewegung dort in allen Punkten ne vertikal abwärts gerichtete, es ist also v_0 gleichzeitig die mittlere senkecht gegen den Querschnitt der Flüssigkeit gerichtete Geschwindigkeit. etzen wir dann weiter eine Ausflufsöffnung voraus, deren Querschnitt egen den des Gefäfses nur klein ist, so werden wir auch in dieser die eschwindigkeit als senkrecht gegen die Ausflufsöffnung gerichtet und als berall gleich ansehen dürfen, einerlei ob die Öffnung im Boden oder in erselben Tiefe H unter dem Niveau der Flüssigkeit in einer Seitenwand ch befindet. Ist dann Q_0 der Querschnitt des Gefäfses in der Oberfläche r Flüssigkeit, q_1 der der Ausflufsöffnung, so ist nach Gleichung (I)

$$Q_0 : v_0 = q_1 \cdot v_1,\quad \frac{v_0^2}{v_1^2}=\frac{q_1^2}{Q_0^2},$$

mit

$$v_1^2\left(1-\frac{q_1^2}{Q_0^2}\right)=2gH-2\,\frac{g}{s}\,(p_1-p_0).$$

Findet der Ausflufs in freier Luft statt, und wirkt auf die Oberfläche enfalls nur der Druck der Atmosphäre, so ist $p_1=p_0$, da der Druck r Atmosphäre auf die Flüssigkeitsoberfläche und die Ausflufsöffnung dann rselbe ist, und es wird

$$v_1=\sqrt{\frac{2gH}{\left(1-\frac{q_1^2}{Q_0^2}\right)}}.$$

Ist, wie wir voraussetzten, q_1 gegen Q_0 sehr klein, so ist der Nenner er dem Wurzelzeichen nicht merklich von 1 verschieden, und dann gegen wir zu dem Ausdruck

$$v_1=\sqrt{2gH}.$$

Die Ausflufsgeschwindigkeit ist der Quadratwurzel aus der Druckhöhe Flüssigkeit direkt proportional, oder gleich der Geschwindigkeit, welche frei die Höhe der Flüssigkeit durchfallender Körper im Niveau der sflufsöffnung erlangt hat, ein Satz, der schon von Toricelli erkannt rde und der den Namen des Toricellischen Theorems führt.

Eine wichtige Folgerung dieses Satzes ist die, dafs die Ausflufsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit durchaus unabhängig ist von der Natur derselben, gerade so wie alle Körper gleich schnell fallen, dafs dieselbe nur abhängig ist von der Druckhöhe im Gefäfse. Diese Folgerung hat nichts Auffallendes, wenn man bedenkt, dafs bei gleichen Druckhöhen bei schwereren Flüssigkeiten auch in demselben Verhältnis die Masse der zu bewegenden Flüssigkeit zunimmt, wie wegen des Gewichtes der drückenden Säule der Druck zunimmt.

Um dieses Gesetz experimentell zu bestätigen, genügt es, die Flüssigkeit bei konstanter Druckhöhe aus einer seitlichen Öffnung eines Gefäfses ausfliefsen zu lassen. Da jedes Flüssigkeitsteilchen dann die Öffnung mit einer konstanten horizontalen Geschwindigkeit verläfst, so verhält es sich gerade wie ein horizontal geworfener Körper. Es gelten daher dieselben Gesetze, welche wir § 10 für geworfene Körper entwickelten. Der ausfliefsende Strahl mufs die Gestalt einer Parabel haben (Fig. 132), deren einzelne Punkte man für jede Zeit leicht bestimmen kann. Gehen wir von dem Punkte a oder b aus, und nennen den horizontalen Abstand des Wasserteilchens von der Wandfläche zur Zeit t, y, und den vertikalen Abstand von a oder b, x, so mufs zugleich für jedes Wasserteilchen

Fig. 132.

$$y = \sqrt{2gH} \cdot t, \quad x = \frac{g}{2} t^2$$

sein, dafs heifst, in einem horizontalen Abstand $\sqrt{2gH} \cdot t$ mufs das Teilchen um $\frac{g}{2} t^2$ unter der Öffnung liegen. Die zusammengehörigen x und y erhalten wir dadurch, dafs wir t eliminieren

$$t^2 = \frac{y^2}{2gH} \qquad t^2 = \frac{2x}{g}$$

$$y^2 = \frac{4gHx}{g} = 4Hx.$$

Man kann sich bei Unterhaltung eines kontinuierlichen Wasserstrahles davon überzeugen, dafs die Gestalt desselben der Theorie entspricht.

Die Gleichung (II) läfst noch eine bemerkenswerte Folgerung zu über die Verteilung des Druckes im Innern einer fliefsenden Flüssigkeit, sie zeigt, dafs der Druck in derselben ein ganz anderer ist, als er in einer ruhenden Flüssigkeit sich nach den Gesetzen der Hydrostatik ergibt. Lösen wir nämlich die Gleichung (II) nach p auf, so erhalten wir für den in der Tiefe h vorhandenen Druck p

$$p = p_0 + sh - \tfrac{1}{2} \frac{s}{g} (v^2 - v_0^2).$$

Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite geben den im Niveau h in ruhender Flüssigkeit vorhandenen hydrostatischen Druck, man sieht also unmittelbar, dafs der Druck in der fliefsenden Flüssigkeit kleiner ist, um eine Gröfse, die dem Quadrate der Strömungsgeschwindigkeit proportional ist. Man bezeichnet diesen Druck p als den hydraulischen Druck.

Die Gröfse dieses Druckes läfst sich leicht auswerten in Gefäfsen von solcher Form, dafs die Geschwindigkeit v gleichzeitig die gegen die Querschnitte senkrechte Geschwindigkeit ist, also in nicht zu engen Röhren etwa, welche aus einem gröfsern Reservoir vertikal absteigen. Ist der Querschnitt des Reservoirs gegen jenen der Röhren hinreichend grofs, so können wir zunächst $v_0 = 0$ setzen. Ist dann H die Tiefe der Ausflufsöffnung, q_1 der Querschnitt der Ausflufsöffnung und q der Querschnitt der Röhre in der Tiefe h unter der Oberfläche, so ist

$$q \cdot v = q_1 \cdot v_1,$$

somit

$$p = p_0 + sh - \tfrac{1}{2} \frac{s}{g} \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 v_1^2,$$

und wenn die Röhren nicht zu enge sind und der Ausflufs in freier Luft erfolgt,

$$v_1^2 = 2gH$$

$$p = p_0 + sh - s\left(\frac{q_1}{q}\right)^2 H$$

$$p = p_0 + s\left(h - \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 H\right).$$

Je nach dem Verhältnis der Querschnitte q_1 und q kann das zweite Glied auf der rechten Seite positiv, Null oder negativ werden. Ist z. B. $h = 0{,}25\ H$ und $q = 2q_1$, so wird das zweite Glied Null, der dort vorhandene Druck ist also einfach gleich dem auf der Oberfläche der Flüssigkeit lastenden Drucke. Fliefst also die Flüssigkeit in freier Luft aus, so würde man an einer solchen Stelle die Gefäfswand durchbohren können, ohne dafs dort Flüssigkeit austräte, oder dafs die Bewegung der Flüssigkeit im geringsten gestört wird.

Ist $q_1 = q$, fliefst also die Flüssigkeit durch hinreichend weite cylindrische Röhren, deren unterster Querschnitt die Ausflufsöffnung ist, aus einem gröfsern Reservoir aus, so wird

$$p = p_0 - s(H - h),$$

es ist also in allen Punkten dieser Röhren der Druck kleiner als der auf der Oberfläche der Flüssigkeit wirkende Druck, der Druck wird um so kleiner, je gröfser $H - h$ ist. Anwendungen dieses Satzes werden wir im nächsten Kapitel in der Sprengelschen Luftpumpe und den dieser ähnlich konstruierten Apparaten kennen lernen.

§ 85.

Ausflufsmenge. Wie wir im vorigen Paragraphen erwähnten, läfst sich das Toricellische Theorem durch Beobachtung der parabolischen Bahn eines horizontal ausfliefsenden Wasserstrahls experimentell nachweisen.

Man kann indes dieses Theorem noch in anderer Weise prüfen, indem man die Menge der aus einer kleinen Öffnung von bekanntem Querschnitt ausfliefsenden Flüssigkeit mifst, und diese mit der durch das Toricellische Theorem gegebenen vergleicht. Ist die Ausflufsgeschwindigkeit gleich $\sqrt{2gH}$ und der Querschnitt der Öffnung gleich q_1, so tritt in der Zeit t aus der Öffnung ein Cylinder hervor, dessen Volumen, die in der Zeit t austretende Flüssigkeitsmenge, m gleich ist

$$m = q_1 \cdot t \cdot \sqrt{2gH}.$$

Bezeichnen wir mit s das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist das Gewicht p der ausgeflossenen Flüssigkeit

$$p = s \cdot m = s \cdot q_1 \cdot t \cdot \sqrt{2gH}.$$

Sammelt man nun aber die ausgeflossene Flüssigkeitsmenge in einem Gefäfs von bekanntem Gewicht, und bestimmt man die wirklich ausgeflossene Menge durch Wägung, so findet man dieselbe stets kleiner, und zwar so, dafs das Gewicht derselben p'

$$p' = 0{,}62 \cdot p,$$

die ausgeflossene Menge also nicht ganz $\frac{2}{3}$ der theoretisch berechneten beträgt.

Dieses Resultat, welches sich unmittelbar aus den Beobachtungen ergibt, steht demnach mit der Theorie in Widerspruch. Jedoch ist dieser Widerspruch nur scheinbar, denn die Voraussetzungen, unter denen wir die Ausflufsmengen theoretisch entwickelten, sind nicht vollständig; wir haben einige störende Umstände vernachlässigt, welche uns eine genauere Betrachtung des ausfliefsenden Strahles kennen lehrt.

Wenn man nämlich den aus einer Bodenöffnung ausfliefsenden Strahl aufmerksam betrachtet, so findet man, dafs er nicht, wie wir es voraussetzten, cylindrisch ist, sondern dafs er sich sehr rasch unter der Öffnung zusammenzieht und eine kegelförmige Gestalt annimmt (Fig. 133) und erst von CD ab mit nahezu cylindrischer Form weiter herabfällt. Diese Kontraktion haben wir bisher aufser Acht gelassen. Denn nach unseren bisherigen Betrachtungen dürfte nur eine geringe und während des ganzen Strahles, soweit er zusammenhängt, regelmäfsige Zusammenziehung des Strahles stattfinden, die sich leicht näher bestimmen läfst. Nach dem Verlassen der Ausflufsöffnung wird nämlich die Bewegung der Flüssigkeit durch die Wirkung der Schwere eine gleichmäfsig beschleunigte.

Fig. 133.



Eine Schicht, welche die Öffnung mit der Geschwindigkeit v_1 verlassen hat, durchläuft demnach in der Zeit T die Strecke S

$$S = v_1 \cdot T + \frac{g}{2} \cdot T^2$$

Nach der Zeit T verläfst eine zweite Schicht die Öffnung, welche von der ersten um S entfernt ist. Dieser Abstand mufs sich aber vergröfsern; denn betrachten wir ihn nach der Zeit t, so ist der Abstand der ersten Schicht von der Öffnung zur Zeit $T + t$ gleich $S + S'$

$$S + S' = v_1 (T + t) + \frac{g}{2} (T + t)^2,$$

der Abstand der zweiten Schicht S'' aber

$$S'' = v_1 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Der Abstand beider Schichten daher

$$S + S' - S'' = v_1 (T + t) - v_1 t + \frac{g}{2} \{(T + t)^2 - t^2\},$$

$$S + S' - S'' = v_1 \cdot T + \frac{g}{2} \cdot T^2 + g \cdot T \cdot t = S + g \cdot T \cdot t.$$

Der Abstand der Schichten wächst demnach proportional T; soll der Strahl zusammenhängend sein, so mufs er in eben dem Verhältnis enger werden, also regelmäfsig und nahezu in demselben Verhältnis, als er sich von der Öffnung entfernt. Statt dessen beobachtet man sehr nahe unter der Öffnung eine sehr rasche Zusammenziehung des Strahles, so zwar, dafs der Querschnitt desselben in einem Abstande von der Öffnung, der ungefähr dem Halbmesser der Öffnung gleich ist, nur mehr gleich $\frac{2}{3}$ von dem Querschnitte der Öffnung ist. Von da an zieht sich der Strahl dann nur mehr in der Weise zusammen, wie er es nach unseren obigen Entwicklungen thun mufs, bis er in Tropfen zersplittert.

Diese anormale Kontraktion des Strahles, welche man als Contractio venae bezeichnet, vermindert also den Querschnitt desselben so, dafs er weniger als $\frac{2}{3}$ der Ausflufsöffnung wird; sie ist für gröfsere Öffnungen und stärkere Drucke sogar noch bedeutender.

Es ist klar, dafs dadurch die Ausflufsmenge eine kleinere werden mufs, und die Erfahrung hat ergeben, dafs diese sich gerade so verhält, als sei die engste Stelle des Strahles dort, wo die Contractio venae aufhört, die wirkliche Ausflufsöffnung. Die Erfahrung ergibt nämlich, wie wir sahen, dafs die wirkliche Ausflufsmenge m' ist

$$m' = 0{,}62\ m,$$

oder

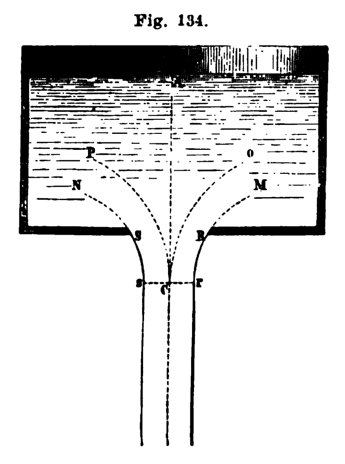
$$p' = 0{,}62 \cdot s \cdot q_1 \cdot t \cdot \sqrt{2gH}.$$

Mannigfache Versuche, die Störungen, welche die Kontraktion veranlassen, mit in Rechnung zu ziehen, und so auch die Menge p' theoretisch zu berechnen, haben noch zu keinem befriedigenden Resultate geführt. Indes können wir uns doch über die Gründe Rechenschaft geben, welche die Kontraktion veranlassen. Es ist nicht, wie wir im vorigen Paragraphen voraussetzten, die Geschwindigkeit aller die Öffnung passierenden Flüssigkeitsteilchen auch senkrecht gegen die Öffnung gerichtet.

Es bewegen sich nämlich nicht nur die senkrecht über der Öffnung an liegenden Flüssigkeitsteile, sondern wegen der freien Beweglichkeit derselben auch die seitlich liegenden gegen die Ausflufsöffnung hin. Es werden daher z. B. die Wasserteilchen rechts von der Öffnung in der

Richtung MR und OC, die Teilchen links in NS und PC sich b
Die zwischen M und O, N und P gelegenen Wasserteilchen haben
eine seitliche gegen das Innere des Strahles gerichtete Geschwin
Der Strahl besteht demnach aus einer konischen Hülle, welche a
vergierenden Flüssigkeitsfäden gebildet ist. Dort, wo diese von en
gesetzter Seite kommenden Flüssigkeitsfäden sich treffen, mufs d
von der beschleunigten Bewegung herr
Querschnittsverminderung, die eig
Contractio venae, ihr Ende erreichen
dort die seitlichen Geschwindigkeiten
entgegengesetzter Seite kommenden
teilchen sich aufheben, und eine
herabgehende Resultierende ergeben.
nach ist eigentlich nicht die Öffnung
Querschnitt der Ausflufsöffnung, sonc
durch die Kontraktionsstelle C geführt
schnitt, da erst von dort an die Flü
unserer Annahme gemäfs sich vertika
bewegt, also von dort erst die
setzungen unserer Berechnungen stat
Da nun die Kontraktion an dieser S
stark ist, dafs der Querschnitt bei s
ist 0,62 der Öffnung, so kann auch c
flufsmenge nur 0,62 der vorhin berechneten sein.

Fig. 134.



Aus dieser Erklärung läfst sich auch leicht der Einflufs von
röhren an die Ausflufsöffnung ableiten. Wenn man nämlich die Flü
anstatt durch eine einfache Wandöffnung durch kurze Röhren au
läfst, so wird dadurch die Ausflufsmenge je nach der Gestalt der
verschieden modificiert. Hat die Ausflufsröhre eine konische Gestalt,
sie sich der Gestalt des ausfliefsenden Strahles anschmiegt, so w
durch, wenn wir als Ausflufsöffnung die der Wand des Gefäfses a
die Ausflufsmenge nicht modificiert; sehen wir aber als Ausflufsöffnu
Querschnitt der Röhre an ihrem Ende an, so wird die Ausflufsmen
gröfsert, da sie so grofs ist, als das Toricellische Theorem ohne v
sie von einer solchen Öffnung verlangt.

Wendet man aber eine cylindrische Röhre an, welche von der
keit benetzt wird, oder setzt man an das erste konische Rohr ein
konisches Rohr an, welches sich wieder erweitert und allmählich i
Cylinder übergeht von der Weite der Ausflufsöffnung, so wird die
der ausfliefsenden Flüssigkeit bedeutend gesteigert, so dafs 0,8 —
theoretischen Ausflufsmenge ausfliefst. Das ist jedoch nur dann d
wenn der Strahl rings an den Wänden des Cylinders adhäriert, thu
nicht, so wird die Ausflufsmenge nicht geändert.

Durch die konischen Ansatzröhren, welche sich der Gestalt des
les annähern, wird die Bewegung der Flüssigkeiten nicht geändert
stens durch Reibung an der Röhrenwand um ein geringes verzög
cylindrischen Ausflufsröhren wird aber durch die Adhäsion der Flü
an den Wänden des Cylinders der kontrahierte Strahl wieder verbreit
nahezu cylindrisch gemacht. Dadurch würde der Strahl zerreifsen

ern des Rohres ein leerer Raum entstehen müssen. Dem wirkt aber nun Kohäsion des Wassers und der äufsere Luftdruck entgegen, der zum il die Flüssigkeit in der Röhre nachtreibt, zum Teil den Ausflufs etwas zögert. Dadurch aber, dafs der ausfliefsende Strahl nahezu cylindrisch rd, vermehrt sich die Menge der ausfliefsenden Flüssigkeit.

Wenn man sich auch zum Teil über diese die Ausflufsmengen be-ffenden Thatsachen Rechenschaft geben kann, so sind wir doch noch weit tfernt, dieselben vollständig verstehen und aufklären zu können. In den isten Fällen, besonders wenn der Ausflufs anstatt aus einfachen Wand-nungen aus Röhrensystemen erfolgt, welche noch dazu zum Teil gekrümmt d, finden wir uns auf die Resultate der Erfahrung angewiesen, um die ngen der ausfliefsenden Flüssigkeit zu bestimmen, da die theoretische handlung zu viele Schwierigkeit bietet.

§ 86.

Reibung der Flüssigkeiten. Die am Schlusse des vorigen Para-phen hervorgehobene Abweichung in dem Verhalten der Flüssigkeiten genüber den von uns für die einfachsten Fälle abgeleiteten Gesetzen kann ht auffallend sein, da wir bei unserer Ableitung zwei Umstände aufser ht gelassen haben. Zunächst haben wir die Flüssigkeiten als vollkommen i beweglich vorausgesetzt, das heifst angenommen, dafs die Bewegung es Flüssigkeitsfadens durch benachbarte Flüssigkeit nicht alteriert wird, e Annahme, welche nur annähernd richtig sein kann. Denn da die leküle der Flüssigkeit einander anziehen, so mufs eine bewegte an einer henden oder langsamer sich bewegenden Flüssigkeit vorüberfliefsende hicht eine Reibung erfahren, welche ihre Geschwindigkeit verkleinert. bei wird dann gleichzeitig, wegen der sehr leichten Beweglichkeit der leküle, die ruhende Schicht eine Bewegung im Sinne der bewegten hicht oder die langsamer sich bewegende eine Beschleunigung im gleichen ne erhalten, und die Beschleunigung der langsamern wird gleich sein r Verzögerung der schneller sich bewegenden Schicht. Die Reibung wirkt o auf die rascher bewegte Schicht wie eine die Bewegung verzögernde, f die langsamer sich bewegende wie eine dieselbe beschleunigende Kraft. n der Gröfse dieser Kraft werden wir annehmen dürfen, dafs sie der fferenz der parallelen Geschwindigkeiten proportional ist, um so mehr, die Geschwindigkeitsdifferenz benachbarter Schichten immer nur äufserst in sein kann. Aufserdem wird die Kraft der Flächenausdehnung pro-rtional sein, mit der sich die Schichten berühren; Annahmen über die irkung der Reibung, welche schon Newton gemacht hat. Weiter nimmt n an, dafs diese Kraft unabhängig ist von dem Drucke, der im Innern r strömenden Flüssigkeit vorhanden ist[1]).

Der zweite von uns bei der Ableitung der Ausflufsgesetze aufser Acht lassene Umstand ist die Reibung, welche die bewegte Flüssigkeit an der andung des Gefäfses erfährt. Wir wissen, dafs zwischen den festen und ssigen Körpern stets molekulare Kräfte thätig sind, infolge deren die

[1]) Man sehe darüber *Hagenbach*, Poggend. Ann. Bd. CIX. *O. E. Meyer*, ggend. Ann. Bd. CXIII. *Helmholtz*, Berichte der Wiener Akademie Bd. XLVI. *fan*, ebendort. *Stokes*, Cambridge Philosophical Transactions vol. VIII.

Flüssigkeiten mehr oder weniger fest an den Körpern haften; infolge dessen mufs jedes an einer festen Wand vorüberbewegte Flüssigkeitsteilchen dieser Anziehung entgegen bewegt werden, es mufs somit eine Verzögerung seiner Bewegung erfahren. Die diese Verzögerung bewirkende Kraft können wir der Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit der festen Wand parallel bewegt wird und der Flächenausdehnung proportional setzen, mit welcher die Flüssigkeitsschicht die feste Wand berührt. Bezeichnen wir deshalb mit ε eine Konstante, so können wir die Verzögerung K, welche die an der festen Wand mit der Geschwindigkeit v die Wand in der Fläche f berührende Flüssigkeitsschicht erfährt, setzen

$$K = \varepsilon \cdot f \cdot v.$$

Diese Konstante ε bezeichnet man als den Koefficienten der äufseren Reibung; sie bedeutet die in der Flächeneinheit der Schicht wirksame Kraft, wenn die Flüssigkeitsschicht mit der Einheit der Geschwindigkeit an der Wand vorübergeht, oder was dasselbe ist, die Kraft, welche erforderlich ist, um die Flüssigkeitsschicht mit gleichförmiger Bewegung und der Einheit der Geschwindigkeit an der Wand vorüber zu führen; dieselbe hängt nur ab von der Natur der Flüssigkeit und der festen Wand, ebenso wie der Randwinkel, unter welchem die Flüssigkeit die feste Wand schneidet. In dem Falle, in welchem die feste Wand von der Flüssigkeit vollkommen benetzt wird, kann man den Wert dieses Koefficienten sofort angeben, denn in dem Falle haftet die letzte Schicht einfach fest an der Wand, ohne an der Bewegung der übrigen Flüssigkeit teilzunehmen. Die Geschwindigkeit der Bewegung an der Wand ist also immer gleich Null, die Verzögerung ist unendlich grofs, es mufs also ε unendlich grofs sein.

Ganz derselbe Ausdruck, der die Verzögerung an einer festen Wand darstellt, liefert uns auch die Verzögerung, welche eine Flüssigkeit erfährt, wenn sie sich an einer andern hinbewegt, wie z. B. Wasser über einer Quecksilberschicht, oder Quecksilber unter einer Wasserschicht; die Konstante ε bedeutet dann die Reibung zweier Flüssigkeiten an einander.

Um ganz ebenso die Verzögerung, welche die Bewegung einer Flüssigkeitsschicht durch die umgebende mit ihr, jedoch langsamer bewegte Flüssigkeit erfährt, ausdrücken zu können, denken wir uns einen Cylinder, durch welchen die Flüssigkeit fliefse. In dem ersten Querschnitt des Cylinders mögen alle Flüssigkeitsteilchen die gleiche der Cylinderaxe parallele Geschwindigkeit haben; in einiger Entfernung von diesem Querschnitt hat dann aber die zunächst an der Wand befindliche Schicht eine gewisse Verzögerung erfahren, welche sich somit langsamer bewegt als die nach der Axe des Cylinders zu folgende Schicht; diese erfährt dann ebenso eine Verzögerung und wirkt infolge dessen wieder verzögernd auf die nächstliegende innere Schicht und so fort. Es wird sich somit die Geschwindigkeit in irgend einem zur Axe des Cylinders, also zur Strömungsrichtung senkrechten Querschnitte stetig ändern, sie wird, wenigstens dann, wenn die Flüssigkeit die Wand benetzt, wahrscheinlich aber immer, von dem Rande gegen die Mitte stetig zunehmen. Daraus folgt dann weiter, dafs die Geschwindigkeit zweier benachbarten, das ist nur um die Distanz der Flüssigkeitsmoleküle von einander entfernten Flüssigkeitsschichten auch nur unendlich wenig von einander verschieden sein kann. Nennen wir deshalb

die Geschwindigkeit einer Flüssigkeitsschicht im Abstande x von der Axe des Cylinders v, die Geschwindigkeit der nächstfolgenden, von der erstern um den Abstand dx zweier Moleküle entfernten Schicht $v + dv$, so würde nach den vorhin gemachten Annahmen die Kraft, welche auf die schneller bewegte Schicht verzögernd einwirkt,

$$K = \varepsilon_1 \cdot f \cdot dv,$$

wenn f die Fläche ist, in welcher sich die Schichten berühren, und ε_1 eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Konstante bedeutet, welche der die äufsere Reibung bedingenden Konstanten ε entspricht.

Die Bestimmung dieser Konstanten ε_1 würde indes nicht ausführbar sein, da man den Wert von dv niemals angeben kann, ebensowenig wie den Wert von dx, den Abstand der Moleküle. Man definiert deshalb die Konstante der innern Reibung etwas anders. Nach der vorhin gemachten Entwicklung ist die Geschwindigkeit v abhängig von dem Abstande der betrachteten Schicht von der Axe des Cylinders, also eine Funktion von x. Wie wir nun in der Einleitung sahen, läfst sich dann, wenn $v = f(x)$, das Differential dv stets darstellen durch

$$dv = f'(x)dx,$$

wenn wir den ersten Differentialquotienten der Funktion mit $f'(x)$ bezeichnen. Setzen wir diesen Wert für dv ein und schreiben gleichzeitig für $f'(x)$ das ihm gleiche $\frac{dv}{dx}$, so wird

$$K = \varepsilon_1 dx \cdot f \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Da dx den Abstand zweier Moleküle der Flüssigkeit bedeutet, so ist für jede Flüssigkeit $\varepsilon_1 dx$ ebensogut eine Konstante wie ε_1, bezeichnen wir sie mit η, so wird

$$K = \eta \cdot f \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Diese Konstante η bezeichnet man als den Koefficienten der innern Reibung oder auch kurz als die Reibungskonstante[1]). Ihre Bedeutung läfst sich leicht angeben, es ist die Kraft, welche auf die Bewegung einer Flüssigkeitsschicht verzögernd einwirkt, wenn sie die benachbarte langsamer bewegte Schicht in der Flächeneinheit berührt, und wenn $\frac{dv}{dx}$ der Einheit gleich ist. Da nun dv der Unterschied der Geschwindigkeiten zweier um dx von einander entfernter Schichten ist, so bedeutet $\frac{dv}{dx}$ den Geschwindigkeitsunterschied zweier Schichten, welche um die Längeneinheit von einander entfernt sind, vorausgesetzt, dafs jedesmal, wenn wir von einer Schicht zur nächstfolgenden um dx von ihr entfernten Schicht übergehen, der Geschwindigkeitsunterschied dv derselbe ist. Denn da dx der Abstand zweier Schichten ist, so ist $\frac{1}{dx} = n$ die Anzahl der in der Längeneinheit vorhandenen Schichten, somit ist, wenn dv der Unterschied in der Geschwindigkeit je zweier benachbarter Schichten ist, $dv \cdot \frac{1}{dx} = dv \cdot n$, der Unter-

[1]) *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. CXIII.

schied der Geschwindigkeit der ersten und n · Schicht, also der u Längeneinheit von einander entfernten Schichten.

Man erkennt leicht, dafs die innere und äufsere Reibung der Fl keiten die von uns berechnete Ausflufsgeschwindigkeit verkleinern aber auch gleichzeitig, dafs es sehr schwierig ist, dieselben in Red zu ziehen, selbst wenn man die Reibungskonstanten kennt, da man das Gesetz kennen mufs, nach welchem sich die einander paralle schwindigkeiten in einem zur Geschwindigkeitsrichtung senkrechten schnitt ändern.

In einem Falle lassen sich die Rechnungen vollständig durchf nämlich dann, wenn man die Flüssigkeiten durch ein horizontales cy sches kapillares Rohr mit kreisförmigem Querschnitt unter kon Druckhöhe ausfliefsen läfst. In dem Falle fliefst nämlich die Flüssigk gleichförmiger Geschwindigkeit durch das Rohr hindurch, und we Rohr enge genug ist, so findet überhaupt nur eine der Cylinderaxe pa Bewegung statt. In jedem zur Cylinderaxe senkrechten Querschnitt sich die Geschwindigkeit mit dem Abstande des betrachteten Flüssi teilchens von der Cylinderaxe, an allen gleich weit von der Axe gel Punkten der Röhre ist aber die Geschwindigkeit dieselbe. Die Flüs teilt sich also in der Röhre in konzentrische Hohlcylinder, von denen jed bestimmte, auf seiner ganzen der Länge der Röhre gleichen Länge d Geschwindigkeit besitzt, welche aber von Cylinder zu Cylinder sich

Da die Bewegung für jeden dieser Cylinder eine gleichförmi so folgt, dafs die Beschleunigung, welche er durch die vorhandenen erhält, gleich sein mufs der Verzögerung, welche er durch die Reibu fährt, denn nur wenn die Beschleunigungen und Verzögerungen si heben, kann die Bewegung eine gleichförmige sein.

Wir denken uns einen der Flüssigkeitscylinder in dem Abst von der Axe, die Dicke seines Mantels sei dx, von diesem Cylinc trachten wir ein Stück von der Länge dl, welches sich im Abstand dem Beginne der kapillaren Röhre befinde. Ist der hydraulische Dr Punkte l gleich p, so wird er am andern Ende des von uns betra Cylinderstückes gleich $p + dp$ sein, wo wir dp setzen können, wie

$$dp = \frac{dp}{dl} \cdot dl.$$

Da die Basis des Cylindermantels $2\pi x \cdot dx$ ist, so ist die info Druckänderung um dp forttreibende Kraft

$$k = 2\pi x \frac{dp}{dl} \cdot dl \cdot dx.$$

Der betrachtete Hohlcylinder ist auf seiner innern und äufser mit andern Hohlcylindern in Berührung, welche eine andere Ges digkeit besitzen, der der Axe nähere ist um die Breite dx des Cy mantels, welche einfach gleich ist dem Abstande der Moleküle, d näher, der äufsere ist um dieselbe Gröfse weiter entfernt. Bezeichn die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen dem nächstinnern und dem b teten Cylinder mit dv, so ist

$$k_1 = \eta \cdot 2\pi x dl \cdot \frac{dv}{dx}$$

Kraft, welche infolge der Reibung an dem innern Cylinder die Geindigkeit des betrachteten Cylinders zu vermehren strebt, da die Geindigkeit der Bewegung von der Axe nach aufsen abnimmt.

Nennen wir die Differenz der Geschwindigkeiten des betrachteten und ächstfolgenden Cylinders dv', so ist die Kraft, mit welcher der betete Cylinder in seiner Bewegung verzögert wird, da der äufsere Umdes betrachteten Cylinders $2\pi(x + dx)$ ist,

$$k'_1 = \eta \cdot 2\pi(x + dx)dl \cdot \frac{dv'}{dx}.$$

Setzen wir nun $dv' = dv + d^2v$, wo d^2v dann angibt, um wieviel oder weniger sich die Geschwindigkeit ändert, wenn man von dem chteten Cylinder sich zu dem nächstäufsern, als wenn man zu dem stinnern übergeht, so wird

$$k'_1 = \eta 2\pi(x + dx)dl \left(\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}dx\right) =$$

$$= \eta 2\pi x dl \frac{dv}{dx} + \eta 2\pi dx dl \frac{dv}{dx} + \eta 2\pi x dl \frac{d^2v}{dx^2}dx$$

$$+ \eta 2\pi dl \frac{d^2v}{dx^2}dx^2.$$

Das vierte Glied dieses Ausdrucks ist gegen die übrigen, da es mit Quadrate von dx multipliciert ist, verschwindend klein, so dafs es verlässigt werden darf; das erste Glied ist gleich k_1, so dafs wir erhalten

$$k'_1 = k_1 + \eta 2\pi dx \cdot dl \left(\frac{dv}{dx} + x\frac{d^2v}{dx^2}\right).$$

Wie wir oben sahen, folgt daraus, dafs die Bewegung in der Röhre gleichförmige ist, dafs die beschleunigenden und verzögernden Kräfte aufheben; da nun k und k_1 die beschleunigenden, k'_1 die verzögernden so ist

$$k + k_1 = k'_1$$

$$2\pi x \frac{dp}{dl} dl dx = \eta 2\pi dx dl \left(\frac{dv}{dx} + x\frac{d^2v}{dx^2}\right)$$

$$\frac{dp}{dl} = \left\{\frac{1}{x}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}\right\} \cdot \eta,$$

Gleichung, welche nach den Regeln der Differentialrechnung die hydrauen Drucke an den verschiedenen Stellen der Röhre und die Geschwineiten v der einzelnen Schichten zu berechnen gestattet[1]. Diese Beung würde hier zu weit führen, es genüge hier, die Resultate anzun. Ist der Druck am Anfange des kapillaren Rohres gleich p_a, am , dort, wo die Flüssigkeit ausfliefst, p_e, so ist, wenn L die Länge des es ist,

$$p = p_a - \frac{p_a - p_e}{L} \cdot l.$$

[1]) Man sehe *Hagenbach*, Poggend. Ann. Bd. CIX. *Jacobson*, *Reichert* und *Bois*, Archiv für Anatomie und Physiologie Jahrg. 1860, p. 80, der dort die von *ann* gegebene Ableitung mitteilt, welche die oben entwickelte Gleichung in eher Weise liefert; *Helmholtz*, Berichte der Wiener Akademie Bd. XL.

Um die Geschwindigkeit v zu bestimmen, ist darauf zu achten. an der Röhrenwand, wo also $x = r$ gleich dem Radius der Röhre ist, falls eine Reibung stattfindet, welche die Geschwindigkeit der äufs Schicht mit bedingt. Bezeichnen wir die Konstante der äufsern Re wie vorher mit ε, so erhält man für die Geschwindigkeit einer Sc deren Abstand von der Cylinderaxe gleich x ist,

$$v = \frac{p_a - p_e}{4\eta \cdot L}(R^2 - x^2) + \frac{p_a - p_e}{2\varepsilon \cdot L} \cdot R$$

und schliefslich für das Volumen der in der Zeiteinheit ausgeflo Flüssigkeit

$$V = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8\eta \cdot L}\left(R^4 + 4\,\frac{\eta}{\varepsilon} \cdot R^3\right).$$

Für eine Flüssigkeit, welche die Röhrenwand benetzt, ist, w schon vorhin hervorhoben, ε unendlich grofs, somit das zweite Gli Klammer gleich Null, für solche Flüssigkeiten wird somit

$$V = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^4$$

oder das in der Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsvolumen ist de der Flüssigkeit lastenden Drucke und der vierten Potenz des Radius der Länge der Röhre und der innern Reibungskonstante umgekehr portional.

Diese letztere Beziehung ist zu einer Prüfung der Theorie, un Bestätigung derselben durch den Versuch zur Bestimmung der Rei konstante sehr geeignet. Versuche über den Ausflufs lassen sic sicherer anstellen als solche über die Druckverteilung, da letztere kapillaren Ausflufsröhren kaum mit Genauigkeit zu messen ist.

Die ersten Versuche über den Ausflufs durch kapillare Röhre schon vor der Inbetrachtnahme des Reibungswiderstandes von Hagen Poiseuille[2]) ausgeführ den, welche beide n ihren Versuchen sch die obige Beziehung g wurden, für welche Hagen dann auch eine retische Ableitung ga

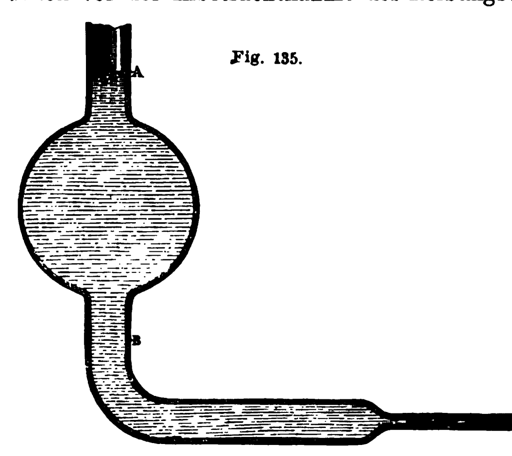


Fig. 135.

Poiseuille wand seinen Versuchen ein zwei angesetzten Röhr sehene Glaskugel (Fig an, welche an den I zwei Marken A und B Der Rauminhalt zw den beiden Marken wa fältig kalibriert. Die

[1]) *Hagen*, Poggend. Ann. Bd. XLVI.
[2]) *Poiseuille*, Mémoires des Savants étrangers. T. IX. Annales de c *de phys.* III. Série T. VII. Poggend. Ann. Bd. LVIII.

[R]öhre war etwas unter B umgebogen und an dieselbe ein kapillares Rohr [an]gesetzt, dessen Länge und Durchmesser sorgfältig gemessen waren. Der [Ap]parat wurde nun durch Aufsaugen bis über A mit Flüssigkeit gefüllt, [da]nn mit Gefäfsen voll komprimierter Luft in Verbindung gesetzt, welche [au]f die Oberfläche der Flüssigkeit einen ganz konstanten Druck ausübten, [de]r mittels passender Druckmesser gemessen wurde. Es wurden dann die [Ze]iten beobachtet, welche die den Raum zwischen A und B ausfüllende [Fl]üssigkeit brauchte, um bei verschiedenen Drucken durch Röhren ver[sch]iedener Länge und verschiedenen Durchmessers auszufliefsen.

Da die in gleichen Zeiten ausfliefsenden Volumina den Druckhöhen, [we]lche, wenn wir zur Herstellung der Drucke Säulen derselben Flüssigkeit [ve]rwenden, sich verhalten wie die Drucke $p_a - p_e$, proportional sein sollen, [so] müssen die zum Ausflusse gleicher Volumina erforderlichen Zeiten den [Dru]ckhöhen umgekehrt proportional sein.

Eine Versuchsreihe mit Wasser gab folgende Zahlen:

Länge der Röhre 107^{mm},9. Durchmesser 0^{mm},135.

Höhe in Mm. der drückenden Wassersäule	Ausflufszeit in Sekunden beobachtet	berechnet
1984	5664″	5664″
7774	1445	1443
10501	1069	1070
10062	1121	1118
20561	546	546
30845	365	364
41381	273	271
47678	237	236.

Bei konstanter Druckhöhe und konstantem Durchmesser war die Aus[flu]fszeit der Röhrenlänge direkt proportional.

Druck in Mm. Wasserhöhe 1472^{mm},45. Durchmesser 0^{mm},252.

Länge der Röhre	Ausflufszeit in Sekunden beobachtet	berechnet
108^{mm},24	633″	633″
84 52	492	492
54 00	314	314.

Dieses Gesetz gilt jedoch nicht mehr bei zu kurzen Röhren, so z. B. [wa]r bei 9^{mm} beobachtet 71″,5, mit dem ersten Versuche verglichen ergab [si]ch berechnet 52″,63.

Bei gleichem Drucke und gleicher Länge sind die Ausflufszeiten den [4.] Potenzen der Durchmesser umgekehrt proportional.

Druck 1984^{mm} Wasserhöhe, Länge 107^{mm},9.
Durchmesser $D_1 = 0{,}136$ Zeit $T_1 = 5664''$
„ $D_2 = 0{,}252$ „ $T_2 = 468''5$.

In der That verhält sich fast genau umgekehrt wie die Zeiten

$$D_1^4 : D_2^4 = 471{,}57 : 5664,$$

dafs dadurch auch dieses Gesetz bestätigt ist.

Für das in der Zeiteinheit ausfließende Flüssigkeitsvolumen ergibt sich also entsprechend der theoretischen Entwicklung

$$V = C \cdot \frac{H \cdot R^4}{L},$$

wenn wir bei Wasser, dessen Dichtigkeit gleich eins ist, den Druck $p_a - p_e = Hs$ durch die Höhe der drückenden Wassersäule ersetzen.

Ist H, R, L in Millimetern ausgedrückt, das Volumen V in Kubikmillimetern gegeben, so ist für die Temperatur 0^0 bei Wasser

$$C = 2162{,}40.$$

Die Gröfse C gibt das in $1''$ ausfliefsende Volumen, wenn die Druckhöhe 1^{mm} Wasser, der Radius der Röhre 1^{mm} und die Länge der Röhre 1^{mm} ist, unter der Voraussetzung, dafs bei diesen Dimensionen noch das Gesetz gültig wäre. Die Konstante C ist demnach

$$C = \frac{\pi}{8 \cdot \eta},$$

somit

$$\eta_0 = \frac{\pi}{8 \cdot C} = \frac{3{,}14159 \cdots}{8 \cdot 2162{,}40} = 0{,}000\,1816.$$

Da die benutzten Einheiten Millimeter und, weil der Druck einer Wassersäule von 1^{mm} Höhe auf das Quadratmillimeter ein Milligramm ist, Milligramme sind, so gibt uns die Konstante in Milligrammen die auf die Fläche von ein Quadratmillimeter wirkende verzögernde Kraft der Reibung, wenn benachbarte Schichten sich mit einer solchen Geschwindigkeit an einander vorüber bewegen, dafs bei gleichförmiger Änderung der Geschwindigkeit der Geschwindigkeitsunterschied zweier 1^{mm} entfernter Schichten in der Sekunde ein Millimeter ist.

Die Konstante C wächst ganz bedeutend mit der Temperatur, und zwar erhält Poiseuille für dieselbe den Wert

$$C = 2162{,}40\,(1 + 0{,}033\,6793\,t + 0{,}000\,220\,9936\,t^2),$$

wenn t in Graden der Celsiusschen Skala gegeben ist und der Druck immer in Milligrammen pro Quadratmillimeter ausgedrückt ist.

Für den Reibungskoefficienten ergibt sich daraus eine entsprechende Abnahme, er wird

$$\eta = \frac{0{,}000\,1816}{1 + 0{,}033\,6793\,t + 0{,}000\,220\,9936\,t^2},$$

also z. B. für

$$10^0 \cdots \eta = 0{,}000\,1335$$
$$20^0 \cdots \eta = 0{,}000\,1029$$
$$30^0 \cdots \eta = 0{,}000\,0821.$$

Für absoluten Alkohol ergibt sich aus ähnlichen Versuchen Poiseuilles bei 10^0 $\eta = 0{,}000\,1741$, also beträchtlich gröfser als für Wasser; noch gröfser ist der Wert für Gemische aus Alkohol und Wasser.

Eine andere Methode zur Untersuchung der Flüssigkeitsreibung ist ursprünglich von Coulomb[1]) angegeben und später von O. E. Meyer[2]) ge-

[1]) *Coulomb*, Mémoires de l'Institut nationale de France T. III. p. 246.
[2]) *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. Bd. CXIII.

nauer studiert und zu Messungen verwandt worden. Die Methode benutzt den Widerstand, welchen eine horizontal an einem Drahte aufgehängte Kreisscheibe erfährt, wenn sie in einer Flüssigkeit durch Torsion des Drahtes in Schwingung versetzt wird.

Um zu erkennen, in welcher Weise die Bewegung durch die Reibung der Flüssigkeit beeinflufst wird, wollen wir die Beschleunigung der schwingenden Scheibe ableiten. Bei Besprechung der Torsionselasticität sahen wir, dafs, wenn die Scheibe resp. der Draht um einen Winkel φ aus der Gleichgewichtslage abgelenkt ist, das die Scheibe gegen die Gleichgewichtslage zurücktreibende Torsionsmoment dem Ablenkungswinkel φ proportional ist. Im § 60 erkannten wir dann weiter, dafs die innere Reibung des Drahtes der Bewegung einen Widerstand entgegensetzt, welcher der augenblicklichen Geschwindigkeit der Bewegung proportional ist. Wir erhielten deshalb, wenn die Scheibe im übrigen gar keinen Widerstand erfährt, im § 60 als Ausdruck für die Beschleunigung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{K}\varphi - 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt},$$

worin D das Torsionsmoment für $\varphi = 1$, K das Trägheitsmoment des schwingenden Systems und 2ε der Widerstand der innern Reibung ist, wenn die Geschwindigkeit gleich 1 ist.

Schwingt nun die Scheibe in einer Flüssigkeit, und wir werden im nächsten Kapitel sehen, dafs in der Beziehung auch die Luft als solche zu betrachten ist, so erfährt die Scheibe durch die Flüssigkeitsreibung einen Widerstand. Bei benetzenden, also stark adhärierenden Flüssigkeiten haftet die letzte Schicht an der Scheibe und wird mit derselben, also mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt. Diese Schicht reibt sich dann an der folgenden, dieselbe mit in Bewegung versetzend, und erfährt dadurch eine Verzögerung ganz in derselben Weise, wie wir es vorhin für die fliefsenden Wasserschichten ableiteten.

Wir betrachten nun ein Flächenelement der Scheibe, welches sich im Abstande ϱ von dem Mittelpunkte der als kreisförmig angenommenen Scheibe befinde. Setzen wir die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe zur Zeit t gleich ψ, so dafs die Geschwindigkeit des betrachteten Elementes $\varrho\psi$ ist, so ist das auch die Geschwindigkeit des betreffenden Elementes der an der Scheibe haftenden Flüssigkeitsschicht. Die der Scheibe parallelen Flüssigkeitsschichten haben dann eine kleinere Geschwindigkeit, und ist die Geschwindigkeitsabnahme, wenn wir uns von der Scheibe in normaler Richtung um dx entfernen, gleich $dv = d\varrho\psi$, so ist, wenn f die Gröfse des betrachteten Flächenelementes ist,

$$\eta f \frac{d\varrho\psi}{dx} = \eta f \varrho \frac{d\psi}{dx}$$

[illegible] Widerstand, welchen das betreffende Flächenelement in seiner Bewegung [illegible]hrt. Die Verzögerung, welche die Bewegung durch diesen Widerstand [illegible]hrt, ist gleich dem Moment dieses Widerstandes dividiert durch die [illegible] bewegte Masse, also gleich

$$\frac{\varrho}{K} \cdot \eta f \varrho \frac{d\psi}{dx}.$$

Um die Verzögerung zu erhalten, welche die ganze Scheibe durch die Reibung erfährt, müssen wir den Widerstand, den alle Flächenelemente erfahren, summieren. Zunächst können wir das Flächenelement f durch einen Ring vom Radius ϱ und der Breite $d\varrho$ ersetzen, da für den ganzen Ring der Widerstand an allen Stellen derselbe ist. Für die infolge des auf den Ring wirkenden Widerstandes vorhandene Verzögerung erhalten wir dann

$$2\pi\varrho\,\frac{\varrho}{K}\,\eta\varrho\,\frac{d\psi}{dx}\,d\varrho = \frac{\eta}{K}\,\frac{d\psi}{dx}\cdot 2\pi\varrho^3 d\varrho.$$

Diesen Ausdruck müssen wir für alle Ringe der Scheibe bilden und dann die Summe aller dieser nehmen. Zunächst entspricht jedem Ring auf der obern Seite auch ein solcher auf der untern Seite der Scheibe, den Wert für diese beiden Ringe erhalten wir, wenn wir den abgeleiteten Ausdruck mit 2 multiplicieren. Dann gibt uns das Integral

$$\int_0^R \frac{\eta}{K}\,\frac{d\psi}{dx}\,4\pi\varrho^3 d\varrho = \pi R^4\,\frac{\eta}{K}\,\frac{d\psi}{dx}$$

die Verzögerung der Bewegung durch den Reibungswiderstand, den die Scheibe erfährt, wenn wir mit R den Radius der Scheibe bezeichnen.

An diesem Ausdrucke ist, im Fall die Dicke der Scheibe nicht außer Acht gelassen werden darf, noch eine Korrektion wegen des an dem Umfange der Scheibe angreifenden Widerstandes anzubringen. Für den Umfang ist $\varrho = R$ und, wenn h die Dicke der Scheibe ist, für f einzusetzen $2\pi R h$, so dafs das Korrektionsglied wird

$$2\pi R^3 h\,\frac{\eta}{K}\,\frac{d\psi}{dx}.$$

Die sich so ergebende Verzögerung haben wir von der Beschleunigung, welche die bewegenden Kräfte dem System erteilen, abzuziehen, und erhalten dann für die Beschleunigung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{K}\,\varphi - 2\varepsilon\,\frac{d\varphi}{dt} - \pi R^4\,\frac{\eta}{K}\,\frac{d\psi}{dx}\left(1 + \frac{2h}{R}\right).$$

Bei grofsen dünnen Scheiben, wie sie zu solchen Versuchen benutzt werden, kann man das Glied $\frac{2h}{R}$ vernachlässigen.

Die ziemlich schwierige Behandlung dieser Gleichung, wegen deren wir auf die Abhandlung von Meyer verweisen[1]), ergibt, dafs wir auch in dem Falle eine schwingende Bewegung erhalten, deren Amplituden nach einer geometrischen Reihe abnehmen, die also ein konstantes logarithmisches Dekrement zeigt. Das logarithmische Dekrement ist gerade wie in § [illegible] das Mafs für die Verzögerung, es gibt also gleichzeitig den Widerstand der innern Reibung des Drahtes und den der Reibung in der Flüssigkeit.

Um den Reibungskoefficienten der Flüssigkeit zu bestimmen, beobachtet man zuerst die Schwingung des Apparates in der Luft und dann jene, nachdem man die Scheibe in die Flüssigkeit gebracht hat. Aus der Differenz der logarithmischen Dekremente erhält man den Reibungs-

[1]) *O. E. Meyer*, Crelles Journal Bd. LIX. Poggend. Ann. Bd. CXIII.

koefficienten der Flüssigkeit; der Ausdruck für η, der sich aus der Beziehung von $\frac{d\varphi}{dx}$ zur Geschwindigkeit der Drehung ergibt, ist

$$\sqrt{\frac{\pi\sigma\eta}{8}} = \frac{K}{(R^4+2hR^3)\sqrt{T_0}} \cdot \frac{\lambda-\lambda_0}{\pi}\left\{1+\frac{\lambda-\lambda_0}{\pi}+\frac{5}{4}\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\pi}\right)^2+\cdots\right\},$$

worin $\lambda - \lambda_0$ die Differenz der logarithmischen Dekremente, T_0 die Schwingungsdauer des Apparates in der Luft und σ die Dichtigkeit der Flüssigkeit ist. Strenge genommen steht auf der linken Seite die Differenz

$$\sqrt{\frac{\pi\sigma\eta}{8}} - \sqrt{\frac{\pi\sigma_0\eta_0}{8}},$$

wenn η_0 der Reibungskoefficient und σ_0 die Dichtigkeit der Luft ist, denn wie schon erwähnt ist auch in der Luft Reibung vorhanden. Da indes das Produkt aus dem Reibungskoefficienten und der Dichte hier auftritt, kann man die Differenz als nicht meſsbar von dem Minuend verschieden betrachten.

In dieser Weise erhielt Meyer unter andern für destilliertes Wasser die Werte

bei $10^0,1 \cdot\cdot\cdot\cdot\ \eta = 0{,}000\,157\,5$
$15^0,5 \cdot\cdot\cdot\cdot\ \eta = 0{,}000\,137\,1$
$17{,}9 \cdot\cdot\cdot\cdot\ \eta = 0{,}000\,129\,9$
$21{,}6 \cdot\cdot\cdot\cdot\ \eta = 0{,}000\,119\,0$

Werte, welche etwa im Verhältnis 1,2 : 1 gröſser sind als die aus Poiseuilles Beobachtungen abgeleiteten.

Für Salzlösungen ergaben sich, mit Ausnahme der Lösungen von Kaliumnitrat, im allgemeinen gröſsere und mit dem Salzgehalte wachsende Werte von η. So fand sich bei Lösungen von Natriumsulphat für eine Temperatur von 17^0

bei 2,5670 Teilen Salz auf 100 Wasser $\eta = 0{,}000\,138\,4$
5,1600 „ „ „ „ „ $\eta = 0{,}000\,150\,0$
7,7795 „ „ „ „ „ $\eta = 0{,}000\,160\,0$
10,4250 „ „ „ „ „ $\eta = 0{,}000\,176\,3.$

Später sind von Rellstab[1]), Hübener[2]), Sprung[3]), Grotrian[4]) und besonders von Pribram und Handl[5]) und andern ausgedehnte Versuche über die Reibung verschiedener Flüssigkeiten, insbesondere der Salzlösungen, und über die Änderung der Reibungskoefficienten mit der Temperatur angestellt worden. Mit Ausnahme der zuerst citierten Versuche Grotrians, welche durch Beobachtung schwingender Scheiben ausgeführt wurden, ist dabei stets die Reibung mit Hülfe des Durchganges der Flüssigkeiten durch enge Röhren bestimmt worden. Unstreitig ist diese letztere Methode wegen der Leichtigkeit ihrer Versuche und der mit ihr zu erreichenden gröſsern Genauigkeit der Methode der Schwingungen vorzuziehen. Wir teilen, um die

---

1) *Rellstab*, Inauguraldissertation. Bonn 1868.
2) *Hübener*, Poggend. Ann. Bd. CL.
3) *Sprung*, Poggend. Ann. Bd. CLIX.
4) *Grotrian*, Poggend. Ann. Bd. CLVII, Bd. CLX, neue Folge, Bd. VIII.
5) *Pribram* und *Handl*, Wien. Ber. Bd. LXXVIII, Bd. LXXX.

Verschiedenheit der Reibungskoefficienten für verschiedene Flüssigkeiten zu übersehen, folgende aus den Beobachtungen Rellstabs unter Annahme des Poiseuilleschen Wertes für Wasser bei 10° C. berechneten Werte mit

Methylalkohol $\eta = 0{,}000\,070\,75$, Propylalkohol $\eta = 0{,}000\,203\,2$
Äthylalkohol $\eta = 0{,}000\,155\,6$, Butylalkohol $\eta = 0{,}000\,387\,1$.

Der für Äthylalkohol aus den Versuchen Rellstabs sich ergebende Wert von η ist etwas kleiner als der von Poiseuille gefundene; der Grund dieses Unterschiedes liegt wohl darin, daſs der Äthylalkohol, den Poiseuille anwandte, nicht ganz so wasserfrei war als der von Rellstab benutzte.

Auf die interessanten, besonders von Grotrian verfolgten Beziehungen zwischen den Reibungskoefficienten und die galvanische Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten, kommen wir im vierten Bande zurück.

Ist die Konstante der Reibung der Flüssigkeiten an den festen Körpern nicht unendlich groſs, so ist der Ausdruck für die durch kapillare Röhren ausflieſsende Menge, wie wir sahen,

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8\,\eta\,L}\left(R^4 + 4\,\frac{\eta}{\varepsilon}\,R^3\right),$$

es kommt also unter sonst gleichen Umständen ein von der dritten Potenz des Radius abhängiges Glied hinzu. Man sollte erwarten, daſs demnach für nicht benetzende Flüssigkeiten dieses Glied in Rechnung zu ziehen sei. In der That glaubte Poiseuille bei dem Ausfluſs des Quecksilbers durch gläserne Kapillarröhren zu finden, daſs das für benetzende Flüssigkeiten aufgestellte Gesetz nicht mehr gültig sei. Genauere Versuche von Warburg[1]) haben indes gezeigt, daſs auch für Quecksilber und Glas sich die ausgeflossene Menge darstellen läſst durch die Gleichung:

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8\,\eta \cdot L}\,R^4,$$

wie z. B. folgende Beobachtung zeigt:

$L = 871^{mm},5.$ $R = 0{,}223\,46.$ Temp. $= 17^0{,}25.$

	$p_a - p_e$	Ausfluſsmenge in Milligr. pro 1" beobachtet	berechnet aus 2
1.	$100^{mm},6$ Quecksilber.	126,5	127,1
2.	$193^{mm},3$ "	244,3.	

Setzen wir das specifische Gewicht des Quecksilbers bei 17,2° gleich 13,55, so ergibt sich η aus der 2. Beobachtung

$$\eta = \frac{\pi \cdot 193^{mm},3 \cdot 13{,}55}{8 \cdot \frac{244{,}3}{13{,}55} \cdot 871{,}5}\,(0{,}22346)^4 = 0{,}000\,163\,29.$$

Es ergibt sich somit, daſs auch bei nicht benetzenden Flüssigkeiten ...ndlich sein kann.

1) Warburg, Poggend. Ann. Bd. CXL.

§ 87.

Konstitution des ausfliefsenden Strahles. Bisher haben wir still-
weigend vorausgesetzt, dafs die Öffnung, aus welcher die Flüssigkeit
sfliefst, eine kreisförmige sei, und dafs somit der Strahl von der Stelle
: gröfsten Kontraktion an ein merklich cylindrischer sei. Ganz anders
rden jedoch die ausfliefsenden Wasserstrahlen gestaltet, wenn man statt
isförmiger Öffnungen andere, z. B. viereckige oder kreuzförmige Öffnungen

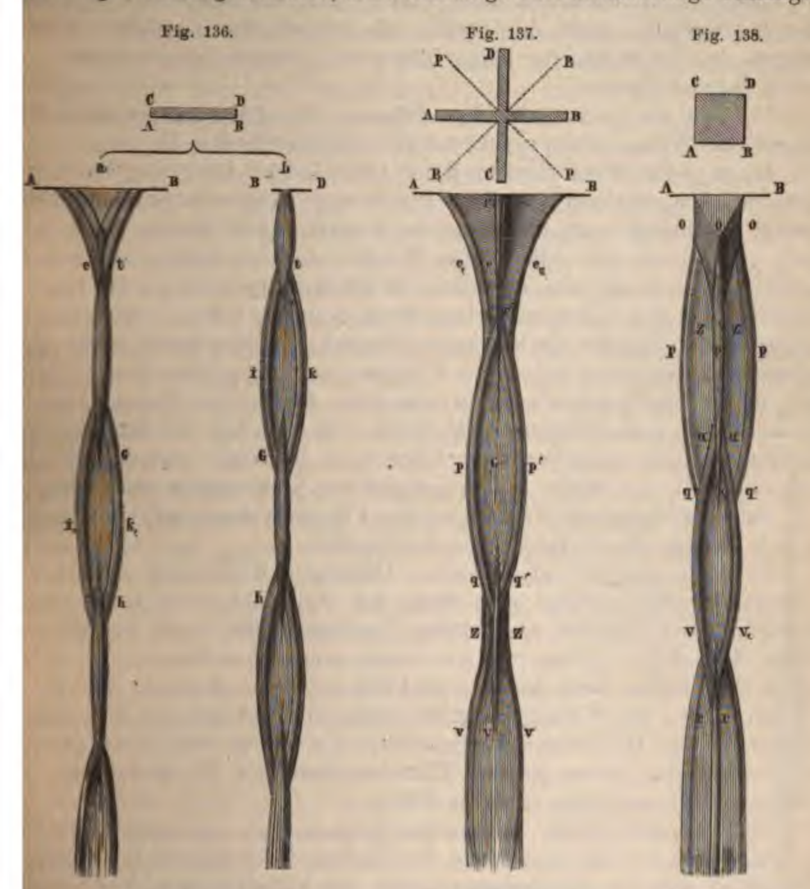


Fig. 136. Fig. 137. Fig. 138.

endet. Die Gestalten dieser Strahlen sind vorzugsweise von Bidone[1])
später von Magnus[2]) untersucht worden. Wir lassen hier einige der
ntümlichen Formen der aus eckigen Öffnungen ausfliefsenden Strahlen
en, nach der Beschreibung, welche Magnus von ihnen gibt. Fig. 136a
t die Ansicht eines Strahles, der aus einer viereckigen Öffnung ausfliefst,
n eine Seite 2,6 Millim., deren andere 25 Millim. lang ist, gesehen in
r zur gröfsern Seite senkrechten und Fig. 136b in einer zur kleinern

[1]) *Bidone*, Memorie dell' Accademia di Torino. Bd. XXXIV.
[2]) *Magnus*, Poggend. Ann. Bd. XCV. p. 1.

Seite senkrechten Richtung. Fig. 137 zeigt die Gestalt eines aus einer kreuzförmigen und Fig. 138 eines aus einer quadratischen Öffnung $ABDC$ ausfliefsenden Strahles. Das Wasser zieht sich unter der Öffnung sehr rasch zusammen und es bilden sich rundliche Ränder $Ae\,Bt$ (Fig. 136 a), die sehr scharf gegen den übrigen Teil der Fläche begrenzt sind. Diese erzeugen, wo sie zusammentreffen, die zur Fläche $ABte$ senkrechte Fläche $tkgi$ (Fig. 136 b), die sich nach unten immer mehr zusammenzieht und dann die Fläche $gk_{,}\,hi_{,}$ entstehen läfst, und so fort, bis der Strahl zersplittert. Dieselbe Gestalt erhielt der Strahl, als anstatt der einfachen Ausflufsöffnung eine 20 Millimeter lange Röhre von gleichem Querschnitt an das Gefäfs gebracht wurde.

Bei den aus der kreuzförmigen Öffnung (Fig. 137) austretenden Strahlen geht das Wasser in vier sich kreuzenden Strahlen nieder, $Be_{,}$, $Be_{,,}$, Ce etc., von denen jeder einen starken Rand hat. Indem diese vier Ränder zusammentreffen, erzeugen je zwei eine Fläche rpq; da aber das Zusammentreffen central stattfindet, wenn die Arme der kreuzförmigen Öffnung genau gleich sind, so halbiert jede Fläche den Winkel, den die Ränder mit einander machen, so dafs die vier entstehenden Flächen, rpq, $r'p'q'$, die Lage der zwischen AB und CD punktierten Linien p und p_1 haben. Zwischen ihnen ziehen sich die Ränder Ce bis gegen G hinab. In der durch diesen Punkt gehenden Horizontalen haben die Flächen rpq ihre gröfste Breite. Unterhalb dieser Stelle nehmen sie wieder dicke Ränder an, durch deren Zusammentreffen neue Flächen zv entstehen. Da auch hier die Ränder central zusammentreffen, so halbieren die Flächen zv die Winkel der vorigen. Ihre Richtung fällt also wieder mit derjenigen der Kreuzesarme zusammen.

Selten treten mehr als zwei solcher Flächensysteme auf, meist beginnt in dem zweiten die Zersplitterung des Strahles.

Bei dem aus der quadratischen Öffnung $ABCD$ (Fig. 138) hervorgehenden Strahle erblickt man unter der Stelle der gröfsten Zusammenschnürung vier Flächen opq, deren Verlängerungen durch die Mitte der Seiten AB, BD . . gehen und auf diesen senkrecht stehen.

Unter diesem liegt ein zweites Flächensystem, welches, wie in dem vorigen Falle, die Winkel des ersten halbiert, also mit der Richtung der Diagonalen des Quadrats zusammenfällt. Unter dem zweiten befindet sich ein drittes, dem ersten gleiches Flächensystem u. s. f., so dafs oft neun derartiger Systeme unter einander liegen.

Diese Formen, welche die Strahlen annehmen, die aus eckigen Öffnungen fliefsen, zeigen auf das deutlichste den Einflufs der seitlichen Bewegung der Flüssigkeit und der Molekularattraktion der Flüssigkeitsteilchen, die wir bei den vorhin betrachteten Ausflufserscheinungen als störende Umstände ansahen. Denn diese beiden Umstände scheinen hinreichend, um die sonderbaren Gestalten der Strahlen zu erklären.

Die Flüssigkeitsteilchen haben alle bei ihrem Austritt aus der Öffnung eine horizontale gegen das Innere des Strahles gerichtete Geschwindigkeit, welche noch durch die früher betrachtete Oberflächenspannung an den freien Seiten des Strahles vermehrt wird. Daraus ergibt sich die von [illegible] nach innen gerichtete Bewegung der Flüssigkeit unmittelbar [illegible]ffnung; bei kreisförmigen Öffnungen ist die nach innen ge[illegible]hwindigkeit der Flüssigkeit sowohl als der Widerstand, den

nnere des Strahls derselben entgegensetzt, nach allen Richtungen
, deshalb zeigt sich dort die Einschnürung von allen Seiten ohne
f folgende Anschwellung; anders jedoch bei eckigen Öffnungen. Dort
Oberflächenspannung verschieden, und zwar ist sie am stärksten von
cken aus, weil dort der Krümmungsradius am kleinsten ist, während
rige Fläche des Strahles eben, oder gar wohl konkav sein kann. Un-
r Öffnung müssen daher vorzugsweise die von den Ecken der Öffnung
enden Flüssigkeitsteile nach der Mitte zu sich bewegen, und es mufs
der Strahl hauptsächlich von den Ecken aus zusammengeschnürt wer-
Daher treten dann die von den Seiten der Öffnung herkommenden
gkeitsteile über den Strahl heraus, und der Strahl mufs einen der
ng entgegengesetzten Querschnitt erhalten, dort seinen kleinsten Durch-
r haben, wo die Öffnung den gröfsten hat, und umgekehrt. An dieser
kehren sich dann die Verhältnisse um; durch die Oberflächenspannung
n jetzt stärker gewölbten Teilen des Strahles erhalten die hier be-
hen Teile des Strahles eine nach innen gerichtete Bewegung, und da,
ir sahen, der Querschnitt des Strahles wegen der beschleunigten Be-
g abwärts immer kleiner wird, so wird jetzt die Zusammenschnürung
sächlich von den entstandenen Ecken des Strahles ausgehen und damit
raustreiben der Flüssigkeit an den konkaven Stellen des Strahles eintreten.
Die Erscheinung ist also wesentlich eine Folge der verschiedenen Ober-
nspannung des Strahles, verbunden damit, dafs wegen der zunehmen-
nach unten gerichteten Geschwindigkeit der Bewegung die
des Strahles überhaupt, so lange der Strahl zusammenhängt,
Bestreben haben, sich der Mitte zu nähern, und dafs deshalb
n den Ecken der Öffnung niedergehenden Teile einen nur ge-
Widerstand gegen ihre horizontale Bewegung erfahren[1]).

Fig. 139.

Auch an Strahlen, welche aus einer kreisförmigen Öffnung hervor-
, beobachtet man meist Anschwellungen und Erscheinungen
her Art. Von der Kontraktionstelle abwärts ist der Strahl zunächst
cylindrisch, und dabei massiv und ganz klar. In einiger Ent-
g von derselben ändert er aber sein Ansehen vollständig, er er-
t gestört, erfährt eine merkliche Anschwellung (Fig. 139) und
trübe, so dafs es den Anschein hat, als bilde er keine kon-
rliche Flüssigkeitsmasse mehr. Auf diese erste Anschwellung
dann eine Stelle, wo der Strahl wieder zusammengeschnürt ist,
ese wieder eine Anschwellung und so fort. Die abwechselnden
wellungen und Einschnürungen nennt man nach Savart[2]),
zuerst genauer untersuchte, Bäuche und Knoten. Im Innern
rahles scheint sich ein kontinuierlicher Kanal herabzuziehen,
sam als Fortsetzung des massiven Strahles über dem ersten
e.

Dafs diese Anschwellungen und Einschnürungen übrigens ganz
beschaffen sind und von ganz anderen Ursachen herrühren als
igen, welche bei den aus eckigen Öffnungen hervorgehenden
en auftreten, läfst sich leicht zeigen.

Zunächst kann man leicht erkennen, dafs der Strahl an seinen

[1]) *Buff*, Poggend. Ann. Bd. C.
[2]) *Savart*, Annales de chim. et de phys. T. LIII. 337.

unteren Stellen nicht mehr kontinuierlich ist, sondern aus getrennten Tropfen besteht. Wenn man nämlich ein Kartenblatt horizontal sehr rasch durch einen Bauch des vertikal herabgehenden Strahles hindurchführt, so findet man auf demselben nicht einfach eine benetzte Linie, sondern statt dessen eine Reihe benetzter Stellen, welche zeigen, dafs auf einander folgende Stellen des Blattes von Tropfen getroffen sind. Hält man einen Draht oder ein Blech so in der Hand, dafs es ein wenig in den Strahl hinein reicht, so fühlt man, so lange es von dem glatten Teile desselben getroffen wird, einen gleichmäfsigen Druck. Wird dasselbe dagegen von einem Bauche getroffen, so fühlt man deutlich eine vibrierende Bewegung. Daraus folgt unmittelbar, dafs das Aussehen des Strahles an dieser Stelle nur eine optische Täuschung sein kann, indem wir nicht die einzelnen Tropfen sehen, sondern nur den Gesamteindruck der rasch nach einander an den einzelnen Stellen erscheinenden Tropfen erhalten.

Denn die einzelnen auf einander folgenden Tropfen gehen einer nach dem andern sehr rasch vor unserem Auge vorüber, jeder mufs daher auf unserer Netzhaut den Eindruck einer vertikalen Linie machen, gerade wie eine leuchtende Kohle, wenn sie rasch im Kreise geschwungen wird, den Eindruck eines feurigen Kreises macht; oder wie wir an einem rasch sich drehenden Rade nicht mehr die einzelnen Speichen sehen, sondern eine gleichmäfsig den Radkranz ausfüllende Fläche. Wenn nun ein Tropfen am Auge vorüber gefallen ist, so folgt ihm sofort ein zweiter und der von dem ersten Tropfen hinterlassene Eindruck setzt sich fort, und so weiter. Wir sehen demnach die Kontouren aller auf einander folgenden Tropfen als einen kontinuierlichen Strahl. Daraus folgt weiter, da wir abwechselnd Bäuche und Knoten wahrnehmen, dafs die Tropfen sich abwechselnd verbreitern und verlängern, dafs sie in der Mitte der Bäuche am breitesten und in den Knoten am schmalsten sein müssen.

Man kann dies sehr deutlich wahrnehmen, wenn man den Strahl so beobachtet, dafs man ihn immer nur eine sehr kleine Zeit wahrnimmt, so dafs während dieser Zeit die Tropfen ihre Stelle fast gar nicht ändern. Es gibt dazu mehrere Mittel, welche wir später kennen lernen werden; das sicherste ist die Beobachtungsmethode von Magnus[1]). In eine kreisförmige Scheibe von 250 Millimeter Durchmesser wird ein Spalt von 1 Millimeter Breite in der Richtung eines Radius eingeschnitten. Die Scheibe wird dann auf einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Axe befestigt und in eine sehr rasche Rotation versetzt, so dafs sie 20 bis 25 Umdrehungen in der Sekunde erhält. Man stellt das Auge und die rotierende Scheibe so, dafs man den Strahl sieht, wenn die Spalte dem Strahl parallel steht. Man sieht den Strahl dann nur so lange, aber jedesmal, wenn die Spalte vor dem Auge hergeht. Da die Spalte nur ein Millimeter breit ist, so beträgt sie nur $\frac{1}{780}$ der ganzen Kreisfläche und da die Scheibe 20 bis 25mal in der Sekunde rotiert, so ist die Spalte nur $\frac{1}{15600}$ bis $\frac{1}{19500}$ Sekunde vor dem Auge. In dieser kurzen Zeit ändert aber der einzelne Tropfen seine Stelle nicht merklich, und deshalb sehen wir sie einzeln, als wären sie unbeweglich. Da aber ferner die Spalte 20—25mal

[1]) *Magnus*, Poggend. Ann. Bd. CVI. p. 1.

in der Sekunde an unserem Auge vorüber geht, so sehen wir das einzelne Bild 25mal in der Sekunde, wir glauben es daher ununterbrochen zu sehen.

Wenn man auf diese Weise einen mit Bäuchen versehenen Strahl betrachtet, so erhält man das Bild Fig. 140. Man sieht, wie der Strahl aus lauter einzelnen Tropfen besteht, von denen man aber zwei Arten unterscheiden kann. Die einen sind sehr klein und kugelrund in der Axe des Strahles; sie bilden den erwähnten innern Strahl, um den sich die Bäuche herumlegen. Die andern sind viel gröſser, sie wechseln mit den ersten, welche in gleichen Abständen von einander stehen, ab und haben eine sehr verschiedene Gestalt. Man sieht zunächst unter dem kontinuierlichen Teile des Strahles, wie die Tropfenbildung eintritt, der Strahl zeigt Schwellungen und Einschnürungen, die bei β in einzelne Tropfen übergehen; die Einschnürungen werden zu den vorhin erwähnten kleinen Tröpfchen, die Anschwellungen zu den groſsen. Diese haben zuerst eine in die Länge gezogene Gestalt a, dann verkürzen sie sich, indem sie zugleich breiter werden b, bei c sind sie kugelförmig, bei d sind sie in vertikaler Richtung abgeplattet und in der horizontalen am stärksten ausgedehnt, bei e wieder mehr kugelförmig, bei f und noch mehr bei g, wo man den Knoten wahrnimmt, in die Länge gezogen. Von da ab wiederholen sich die Gestalten $a - g$, bis der Strahl unterhalb der Bäuche auseinandergeht, und zwar treten dieselben Gestalten immer an derselben Stelle auf. Daſs die Gestalt des Strahles deshalb die vorher beschriebene sein muſs, geht unmittelbar aus dieser Gruppierung der Tropfen hervor. Es fragt sich nun, wie entsteht diese Erscheinung.

Wir erwähnten vorhin, daſs nicht immer an den aus kreisförmigen Öffnungen hervorflieſsenden Strahlen diese Anschwellungen sich zeigen, sondern daſs oft der Strahl eine nahezu cylindrische Gestalt habe. Aber auch in diesem findet, wie Magnus[1]) nachwies, die Tropfenbildung statt, und zwar etwas tiefer als dort, wo sie dann eintritt, wenn sich Bäuche zeigen. Ein solcher cylindrischer oder vielmehr schwach konischer Strahl bietet nach Magnus ein Bild, wie Fig. 141. Auch hier sind die Tropfen bald länger bald breiter, aber die Formen wechseln nicht regelmäſsig; deshalb ist der nicht mit Bäuchen versehene Strahl auch an der untern Strecke nur breiter als an der obern. Die Tropfenbildung ist daher allen diesen Strahlen gemeinsam, betrachten wir sie zuerst.

Die Tropfenbildung ist Folge der beschleunigten Geschwindigkeit der herabfallenden Flüssigkeit; indem nicht soviel Flüssigkeit oben ausflieſst, als unten notwendig ist, um den Strahl als ein Kontinuum zu erhalten, zersplittert der Strahl und dadurch bilden sich infolge der Oberflächenspannung Tropfen.

Daſs diese Erklärung die richtige sei, folgt aus der Beobachtung des aus einem mit einer Hahnöffnung versehenen Gefäſse tropfenweise ausflieſsenden Wassers. Zunächst sammelt sich das Wasser an der Hahnöffnung an, verlängert sich dann in einen Tropfen; darauf tritt eine Einschnürung ein und der Tropfen fällt herab. Der herabfallende Tropfen strebt eine kugelförmige Gestalt anzunehmen und dabei oscilliert er, so daſs er abwechselnd in die Länge gezogen, abwechselnd abgeplattet erscheint. Die Einschnürung bildet dann mehrere kleine Tropfen. In diesem

[1]) *Magnus* a. a. O.

Falle, wo die Ausflufsmenge von Anfang an nicht so grofs ist, um kontinuierlichen Strahl zu bilden, tritt die Tropfenbildung von Anfang , Ferner, Plateau zeigte, wenn man den § 80 beschriebenen in Alkoholgemische gebildeten Ölcylinder durch Entfernung der beiden kreise, zwischen denen er gebildet war, verlänger er dann, wenn man eine gewisse Grenze übersc zerreifst. Unmittelbar vorher bilden sich abwecl Einschnürungen und Anschwellungen, deren letztere Tropfen bilden, während an Stelle der Einschnü kleine Tropfen auftreten. Also auch hier, wo die I keit nicht mehr ausreicht, um einen kontinuie Cylinder zu bilden, dieselbe Tropfenbildung infol Oberflächenspannung. Wenn nun in allen aus kreisfö Öffnungen ausfliefsenden Strahlen die Tropfenbildu Gemeinsame ist, so müssen noch besondere Umstän treten, um einmal die regelmäfsige Folge derselben zubringen, ein andermal nicht. Savart[1]) und M haben diese nachgewiesen; sie zeigten, dafs der Str Gestalt Fig. 141 hat, wenn die Ausflufsöffnung gan ist und keine zitternde Bewegung besitzt, dafs abe mal, wenn man derselben eine zitternde regelmäfs wegung mitteilt, die Bäuche auftreten. Savart hi dieses zu zeigen, das Gefäfs an Fäden schwebend dafs es nicht erschüttert werden konnte und der hatte die Gestalt Fig. 141, wurde aber durch d streichen eines Violoncells in der Nähe das Gefäfs mit die Bodenplatte in regelmäfsige Vibrationen ge so traten sofort die Bäuche in schönster Regelmä auf. Magnus zeigte dasselbe durch einen noch entsc deren Versuch. Die Ausflufsöffnung wurde in eine M scheibe eingeschnitten, und diese durch eine Kau röhre auf eine Hülse befestigt, welche aus dem Bo mit Flüssigkeit versehenen Gefäfses herabhing. Die M scheibe, in der sich die Ausflufsöffnung befand, wur auf ein Paar Kissen von Wolle gelegt, die auf ein Unterlage gelegt waren. Wurde nun das Gestell, a das Ausflufsgefäfs stand, in eine regelmäfsige vibr Bewegung versetzt, so zeigten sich keine Bäuche, v Vibrationen des Gefäfses sich nicht durch den Kau zur Bodenplatte fortpflanzen konnten; wenn aber die in der die Ausflufsöffnung angebracht war, mit dem Gestell in fest bindung gebracht war und somit vibrierte, so traten sofort die Bäuc

Fig. 140. Fig. 141.

a b c d e f g

Wie nun infolge dieser Vibrationen das regelmäfsige Abreifs Tropfen und damit die Bäuche entstehen, erklärt Magnus folgenden Indem der Rand der Ausflufsöffnung regelmäfsig auf- und niedergeh die Geschwindigkeit des ausfliefsenden Strahles abwechselnd besch

---

[1]) *Savart* a. a. O.
[2]) *Magnus* a. a. O.

und verzögert. Durch diese abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen entstehen die abwechselnden Anschwellungen und Einschnürungen, die in gröſster Tiefe die Trennung in einzelne regelmäſsige Tropfen zur Folge haben. Sind diese abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen nicht vorhanden, so fehlen die Bäuche und das Abreiſsen findet in gröſserer Entfernung von der Öffnung und viel weniger regelmäſsig statt. Wahrscheinlich trägt die geringere Entfernung, in welcher, wenn Bäuche vorhanden sind, die einzelnen Massen abreiſsen, nicht unwesentlich zu jener Regelmäſsigkeit bei, da alle Bewegungen in einem Strahl in geringerer Entfernung von der Öffnung regelmäſsiger sind als entfernt davon.

Noch auffallender und interessanter zum Teil sind die Formen, welche Flüssigkeitsstrahlen bilden, wenn sie durch feste Körper oder andere entgegenkommende Strahlen gestört werden; man sieht diese Erscheinungen häufig in Gärten als Zierat benutzt. Das Wasser wird nämlich von den festen Körpern nicht regelmäſsig zurückgeworfen, wie wir das bei den festen Körpern fanden, sondern breitet sich in oft höchst sonderbaren Formen aus. Es würde uns jedoch zu weit führen, darauf einzugehen, deshalb verweisen wir auf die Abhandlungen von Magnus[1]) und Savart[2]).

Drittes Kapitel.

Von den gasförmigen Körpern.

§ 88.

Allgemeine Beschaffenheit der Gase. Wir lernten § 46 auſser der festen und flüssigen Aggregatform noch eine dritte kennen, in welcher Körper vorkommen können, die gasförmige. Diese definierten wir dahin, daſs sie weder eine selbständige Gestalt wie die festen Körper, noch ein selbständiges Volumen wie die flüssigen Körper besitzen, sondern sich soweit ausbreiten, bis ein äuſseres Hindernis sie zurückhält.

Wir können uns leicht durch Beobachtung und Versuche davon überzeugen, daſs wir überall von einem Körper dieser Aggregatform, der Luft, umgeben sind; wir atmen sie ein, fühlen ihre Strömungen im Winde und ihren Widerstand bei raschen Bewegungen.

Wenn man eine scheinbar leere Glocke so in Wasser taucht, daſs ihre ganze Basis zugleich die Wasserfläche berührt, so vermag nur wenig Wasser in die Glocke einzudringen, auch wenn wir sie so tief in das Wasser hineindrücken, daſs sie ganz unter Wasser steht. Wir müssen daraus schlieſsen, daſs die Glocke mit etwas erfüllt ist, was dem Eindringen des Wassers sich entgegensetzt. Neigen wir nun die Glocke, indem wir aber dafür sorgen, daſs die Basis derselben stets unter Wasser bleibt, so weit, daſs das Niveau der in die Glocke eingedrungenen Flüssigkeit an einer Stelle den Rand der Glocke nicht mehr erreicht, so sehen wir bei fernerem Niederdrücken, wie

---

[1]) *Magnus* a. a. O. und Poggend. Ann. Bd. LXXX. p. 1. Bd. XCV. p. 1.
[2]) *Savart* a. a. O. und Ann. de chim. et de phys. T. LIV. p. 55 und p. 113. T. LV. p. 257.

aus ihr durch das Wasser grofse Blasen aufsteigen und wie dann das Wasser höher in die Glocke einsteigt. Noch deutlicher wird dieser Versuch, wenn wir die Glocke oben mit einem Hahn versehen. So lange der Hahn geschlossen ist, kann das Wasser in die Glocke nicht eindringen, öffnen wir aber denselben, so dringt beim Niederdrücken das Wasser ein, zugleich bemerken wir aber, wie aus der Hahnöffnung die Luft hervordringt, indem wir ihren Stofs fühlen, oder sehen, wie leichte Körperchen durch den hervordringenden Luftstrom fortgerissen werden.

Dieser Versuch beweist auf das evidenteste sowohl das Vorhandensein als die Körperlichkeit der Luft, indem er uns beweist, dafs in einen mit Luft erfüllten Raum ein anderer Körper nicht eindringen kann.

Durch einen ebenso einfachen Versuch können wir uns überzeugen, dafs die Luft eine Flüssigkeit ist, dafs ihre Teile frei beweglich sind. Denn kehren wir die Glocke um, so dafs ihre Basis nach oben gerichtet ist, so können wir flüssige und feste Körper leicht hineinbringen. Die eingebrachten Körper verdrängen die Luft ebenso leicht, wie eine Flüssigkeit, in die man sie eintaucht, oder wie eine schwerere die leichtere Flüssigkeit verdrängt, mit welcher sie sich nicht mischt. Wir müssen daher die Luft als eine Flüssigkeit betrachten und ihren Teilen dieselbe freie Beweglichkeit zuschreiben, wie den einzelnen Teilen der Flüssigkeiten.

Dasselbe zeigt uns der geringe Widerstand, den die Bewegung der Körper in einem mit Luft erfüllten Raume erfährt, der noch um vieles geringer ist als der Widerstand, den eine Bewegung in einem mit Flüssigkeit erfüllten Raume findet.

Dafs die Luft kein selbständiges Volumen besitzt, zeigt folgender Versuch. Man kann eine Blase leicht zum Teil mit Luft anfüllen. Bringt man sie dann in eine Glocke, aus der wir durch einen später zu beschreibenden Apparat, die Luftpumpe, die Luft fortschaffen können, so zeigt die in der Blase enthaltene Luft das Bestreben, sich auszudehnen, indem die Blase sehr bald vollständig gespannt ist, und selbst durch die ausdehnende Kraft der in ihr eingeschlossenen Luft zersprengt werden kann.

Die Luft hat demnach keine selbständige Gestalt, sie dehnt sich aus, bis sich ihrer Ausdehnung ein äufserer Widerstand entgegensetzt. Da nun dieselbe eine Flüssigkeit ist, so nennt man sie dieser Eigenschaft wegen eine ausdehnsame Flüssigkeit, eine expansibele Flüssigkeit, und die bisher betrachteten Flüssigkeiten im Gegensatz dazu tropfbare.

§ 89.

Eigenschaften der Gase, welche sie mit den Flüssigkeiten gemeinsam haben. Da die Gase Flüssigkeiten sind, so folgt, dafs sie eine Reihe von Eigenschaften besitzen, welche wir an den Flüssigkeiten kennen gelernt haben. Zunächst sind sie schwer wie alle Körper. Um dieses durch einen einfachen ohne weiteres verständlichen Versuch nachzuweisen, nehmen wir eine mit einem Hahne versehene Glaskugel von leichtem Glase, welche vielleicht 5—10 Liter Inhalt hat (Fig. 142), hängen sie an eine empfindliche Wage und bestimmen ihr Gewicht. Wenn wir dann die Kugel auf den bereits vorhin erwähnten Apparat bringen, mittels dessen wir die Luft aus ihr entfernen können, und die Luft aus ihr fortnehmen, so zeigt eine

neue Wägung, dafs nach Fortnahme der Luft die Kugel leichter geworden ist, und zwar bei einer Kapacität von 10 Liter um ungefähr 10 Gramm.

Die Luft und ebenso alle Gase, welche uns die Chemie kennen lehrt, sind demnach schwer wie alle Flüssigkeiten.

Wie bei den Flüssigkeiten nur dann Gleichgewicht war, wenn der Druck auf ein Flüssigkeitselement im Innern von allen Seiten derselbe war, so auch bei den Gasen; im Zustande des Gleichgewichts erhält jedes Gasmolekül von allen Seiten den gleichen Druck; ist derselbe in einer Richtung gestört, so tritt eine Bewegung ein. Dies zeigt sich schon in dem zuerst erwähnten Versuche mit der Glocke. Als der Hahn geöffnet wurde, während dieselbe in die Flüssigkeit eingedrückt war, trat sofort ein Ausströmen der Gase ein, da der von unten nach oben auf das in der Glocke befindliche Gas wirkende Druck gröfser war als der von oben nach unten gerichtete Druck. Von unten nach oben drückte die über dem Flüssigkeitsniveau unter der Glocke erhobene Flüssigkeitsschicht, und vielleicht ein äufserer auf der Flüssigkeit lastender Druck; von oben nach unten nur dieser letztere; deshalb drang die Luft aus der Hahnöffnung hervor.

Fig. 142.

Wenn wir auf ein in einem Gefäfse eingeschlossenes Gas durch einen dem Gefäfse genau anpassenden Kolben einen Druck ausüben, so mufs wegen der flüssigen Natur der Gase dieser Druck sich nach allen Richtungen gleichmäfsig fortpflanzen, es mufs demnach jedes Flächenstück von gleicher Gröfse auch einen gleichen Druck erfahren. Da nun die Gase, wie wir sahen, schwer sind, so mufs sich alles das, was wir bei den der Schwere unterworfenen Flüssigkeiten fanden, auch hier und besonders in der uns umgebenden atmosphärischen Luft wiederholen.

Denken wir uns zu dem Ende einen mehrere Meilen hohen Cylinder über die Erde erhoben, vollkommen verschlossen und vollständig mit Gas erfüllt, und zerlegen wir dieses Gas in lauter sehr dünne horizontale Schichten, so können wir diese als ebensoviele Kolben betrachten, welche auf das darunter liegende Gas drücken. Der Druck wird daher von oben nach unten zunehmen; in irgend einer Schicht aber auf ein gleiches Flächenstück überall gleich sein müssen, und zwar nach allen Richtungen gleich, ebenso nach allen Seiten auf die Wände des Cylinders, als auch nach oben oder nach unten; derselbe ist gleich dem Gewichte der über dieser Fläche befindlichen Luftsäule. Dieser Druck ist ganz unabhängig von der Form oder der Gröfse des Cylinders, vorausgesetzt nur, dafs seine Höhe dieselbe bleibt. Dieser letztere Umstand ist von bedeutender Wichtigkeit, da wir dadurch berechtigt sind, unsere Schlüsse auf die unsere Erde umgebende Atmosphäre auszudehnen. Die Atmosphäre ist eine Luftmasse, welche sich rings um die Erde als eine Schicht von etwa 8 Meilen Dicke herumlegt, und welche, wie die Chemie uns lehrt, ein Gemenge zweier gasförmiger Körper ist, von Sauerstoff und Stickstoff. Nach den vielfachsten Analysen enthält sie um wenig mehr als 79 Teile Stickstoff (79,03) und nahe 21 Teile Sauerstoff (20,97), und aufserdem noch geringe Mengen eines andern Gases, der Kohlensäure, und etwas Wasserdampf. Man nimmt an, die Atmosphäre

sei von einer letzten Schicht begrenzt, welche wegen ihrer geringen tigkeit und der Centrifugalkraft auf die darunter liegenden Schichten k Druck ausübt. Denn die Luft nimmt an der Umdrehung der Erde Te ist, Störungen abgerechnet, welche, durch Temperaturdifferenzen be in Luftströmungen sich zeigen, in Bezug auf die Punkte der Erdober unbeweglich. Mit der Höhe über der Erde mufs daher die centri Beschleunigung zunehmen, und deshalb in einer gewissen leicht zu b nenden Entfernung von der Erde der Schwere gleich werden.

Wir können demnach die Atmosphäre, indem wir von jenen Stör absehen, als ein im Gleichgewicht befindliches Flüssigkeitsmeer betra auf dessen Boden wir leben, von konstanter Höhe, und welches all Wirkungen hervorbringt, welche eine tropfbare Flüssigkeit von ge Dichte hervorbringen würde. Jede Fläche demnach einen Druck, der dem Gewichte de ihr befindlichen Luft gleich ist; derselbe ist ko in Schichten, welche mit der Erdoberfläche p sind; er vermindert sich, wenn wir empors nimmt zu, wenn wir uns der Erde nähern. An Orte ist der Druck auf gleiche Flächenstücke de wie sie auch gerichtet sind, und bei verschi Flächenstücken ihrer Gröfse proportional. E ferner derselbe sein im Zimmer wie in freie und an einer und derselben Stelle bis auf di hin erwähnten Störungen konstant sein.

Fig. 143.



Ehe wir dazu übergehen, diesen Druck zu m wird es gut sein, vorher die den Gasen und F keiten gemeinsamen Eigenschaften noch wei betrachten.

Sowie ein in Wasser getauchter Körper an Gewicht verliert, s auch stets ein Teil des Gewichtes der Körper von der Luft getragen; der von der Luft umgebene Körper ebenso einen an seinem Schwe angreifenden nach oben gerichteten Druck erhält, der dem Gewic von ihm verdrängten Luft gleich ist. Der experimentelle Nachweis Satzes ist nicht schwierig, jedoch begnügen wir uns hier damit, n weisen, dafs überhaupt ein Gewichtsverlust vorhanden ist, und seh Gröfse desselben als durch die früheren Lehren bewiesen an. Wir zu dem Ende eine kleine Wage an (Fig. 143), deren Balken an de Seite eine grofse hohle Kugel von dünnwandigem Glase trägt, währ der andern Seite ein kleines Gewicht ihr das Gleichgewicht hält. kleine Gewicht ist auf seinem Wagebalken verschiebbar, und man h dann so, dafs es der Kugel in der Luft genau das Gleichgewich Darauf bringt man diesen Apparat unter die Glocke einer Luftpump nimmt die Luft unter der Glocke fort. Man sieht dann, wie sich alln der Wagebalken nach der Seite der Kugel neigt, ein Beweis, dafs sie sc wird. Die mit dem kleinen Gewichte gleich schwere grofse Kugel in der Luft, da sie eine gröfsere Menge Luft aus der Stelle drängt an Gewicht als das kleine Messinggewicht; die Gewichtszunahme, w Luft fortgenommen wird, ist daher bei ihr gröfser als bei dem Gewicht.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satze ist die, dafs uns die Wage
nicht das wahre Gewicht der Körper gibt, sondern nur die Differenz zwischen
dem Gewicht des Körpers und dem der verdrängten Luft. Nennen wir das
wahre Gewicht des Körpers P, jenes, welches uns die Wage angibt, P', das
Volumen des Körpers v, und das specifische Gewicht der Luft s, so haben wir

$$P = P' + v \cdot s,$$

indem $v \cdot s$ das Gewicht der verdrängten Luft ist. Da indes auch die Gewichte, welche den Körper abwägen, ein Volumen v' Luft verdrängen, so
müssen wir, um das wahre Gewicht P zu erhalten, noch das Gewicht $v' \cdot s$
der von diesen verdrängten Luft abziehen, so dafs

$$P = P' + v \cdot s - v' \cdot s = P + (v - v')s.$$

Man sieht, darnach kann das wahre Gewicht gröfser oder kleiner sein
als das scheinbare, je nachdem $v > v'$ oder $v < v'$ ist, das heifst, je nachdem das Volumen des abzuwägenden Körpers oder das der Gewichte
gröfser ist.

Diese Korrektion, welche wir anbringen müssen, um das wahre Gewicht eines Körpers zu erhalten, können wir erst später in der Wärmelehre
vollständig bestimmen, da die Gröfse s sich sehr bedeutend mit der Temperatur der Luft ändert. Hier sei nur soviel erwähnt, dafs bei der Temperatur des schmelzenden Eises und 760^{mm} Barometerstand das Gewicht
eines Liter (1000 Cent. kub.) Luft nach den Versuchen von Regnault $1^{gr},293$
beträgt, das specifische Gewicht s der Luft also 0,001 293 ist.

Eine weitere wichtige Folge aus obigem Satze ist die, dafs in der
Luft gerade so wie im Wasser Körper schwimmen können, wenn das Gewicht der von ihnen aus der Stelle gedrängten Luft gröfser ist als ihr
eigenes Gewicht. Nennen wir s das specifische Gewicht der Luft, s' das
des Körpers vom Volumen v, so ist gerade wie § 67 $v(s' - s)$ das Gewicht, welches die Körper fallen macht. Ist nun $s' > s$, so fällt der Körper
zur Erde nieder, ist $s' = s$, so befindet er sich in der Luft im Gleichgewicht, ist $s' < s$, so steigt er in der Luft auf.

Hieraus geht hervor, dafs in der Wirklichkeit nicht alle Körper gleich
schnell fallen können, wie wir es im ersten Kapitel des ersten Abschnittes
voraussetzten, da die Kraft, mit welcher sie zur Erde niederfallen, durch
die Einwirkung der Luft modificiert, nicht einfach ihrem Gewichte proportional ist; specifisch leichtere Körper werden langsamer fallen müssen als
schwerere.

Wir werden aber in der Luftpumpe ein Mittel kennen lernen, um
Räume herzustellen, die keine oder nur sehr wenig Luft enthalten und
zeigen, dafs in diesen ein Stückchen Papier ebenso rasch fällt, als ein
Stückchen Platin.

Die letzte Bedingung $s' < s$ kann man herstellen, wenn man grofse
Ballons mit dünnen und leichten Wänden mit erwärmter Luft oder einem
Gase anfüllt, welches specifisch leichter ist als Luft, z. B. Wasserstoffgas
oder Leuchtgas.

Um die Kraft, mit welcher der Ballon aufsteigt, zu erhalten, haben
wir nur von dem Auftrieb des Ballons $v(s - s')$ das Gewicht p aller seiner
Bestandteile abzuziehen, wir erhalten also dafür

$$v(s - s') - p$$

Ist z. B. das Gas, mit dem der Ballon gefüllt ist, Wasserstof

$$s = 0{,}001\,2932$$
$$s' = 0{,}000\,0895$$

bei Null Grad Temperatur, und wir erhalten

$$0{,}001\,203\ v - p$$

für die Kraft, mit welcher ein solcher Ballon in der Luft empor wird in Kilogrammen, wenn v in Litern gegeben ist.

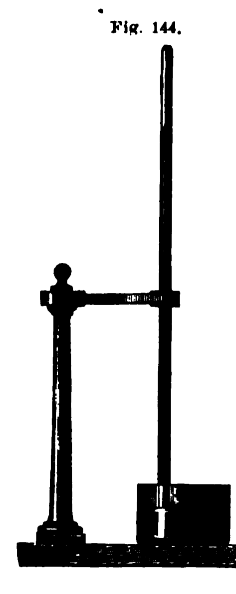
Die in neuerer Zeit vielfach benutzten Luftballons beruhen au Satze. Ein grofser Schlauch von leichtem und doch dichtem Ze mit einem leichten Gase gefüllt, so dafs selbst nach Anhängen ein chens etc. sein Gewicht noch kleiner ist als die aus der Stelle g Luft. Ein solcher Ballon wird sich daher mit allem Zubehör in erheben.

§ 90.

Das Barometer. Wir sahen in dem vorigen Paragraphen, auf dem Boden eines Luftmeeres uns befinden, und dafs deshalb jed einen ihrer Gröfse proportionalen Druck auszuhalten hat, der gleich Gewichte der Luftsäule, welche die Fläche zur Basis hat, deren Hö ist derjenigen der Atmosphäre. Es bietet keine Schwierigkeit, diese T durch den Versuch nachzuweisen und die Gröfse dieses Druckes zu

Füllt man eine Röhre von ungefähr 1 Meter Länge ganz mi silber an, schliefst sie mit dem Finger, stellt sie in ein Gefäfs mi silber wie Fig. 144 und öffnet dann durch W des Fingers die Röhre unter Quecksilber, das Quecksilber in der Röhre, aber nur bis gewissen Punkte, so dafs das Quecksilber in der Röhre ungefähr 760^{mm} höher steht als au

Fig. 144.



Daraus folgt nach den früher erkannte statischen Gesetzen, dafs auf der äufsern O des Quecksilbers ein Druck lastet, der im In Röhre nicht vorhanden ist und dem die Que säule von 760^{mm} das Gleichgewicht hält. kennen in diesem Drucke auf die äufsere Fl Quecksilbers den Druck der äufsern Luft; durch die Füllung mit Quecksilber alle Luft Röhre vertrieben, so ist dort kein dem äufse drucke gleicher Gegendruck. Deshalb m Quecksilber gehoben werden und zwar so w der Druck der gehobenen Quecksilbersäule d drucke gleich ist. Die gehobene Quecksil mifst also die Schwere einer ihr an Qu gleichen Luftsäule, deshalb nennt man diesen ein Barometer.

Die Idee, mittels dieses Versuches die Existenz des Luftdruck zuweisen, rührt von Viviani (1644) her. Schon früh kannte man d sache, dafs in Röhren, aus welchen die Luft ganz oder teilweise fortge war, Flüssigkeiten emporsteigen. Man hatte diese Erscheinung z

truktion der sogenannten Saugpumpen benutzt. Die Erklärung derselben suchte man aber nicht in einem Drucke der äufsern Luft, sondern in dem horror vacui, man nahm an, dafs die Natur einen Abscheu vor dem leeren Raum habe, und dafs infolge dieses Abscheues das Wasser in den Pumpenröhren aufsteige, wenn durch Hebung des Kolbens in denselben ein leerer Raum sich bilde. Auf das Unhaltbare dieser Erklärung wurde man aufmerksam, als in Florenz ein Pumpenmacher eine Saugpumpe herstellte, deren Saugrohr unter dem Bodenventil länger als 32 Fufs war; es gelang nicht, mit derselben das Wasser höher als nahe 32 Fufs zu heben. Nach der frühern Erklärungsweise hätte man annehmen müssen, dafs die Natur nur bis zu dieser Höhe einen Abscheu vor dem leeren Raume hätte. Galilei, an den man sich damals wandte, vermochte diese Schwierigkeit nicht aufzuklären; erst sein Schüler Viviani erkannte die Ursache des Steigens des Wassers. Er schlofs weiter, wenn der Luftdruck das Wasser bis zu einer Höhe von 32 Fufs oder 10,25 Meter heben kann, so kann er das Quecksilber, welches ungefähr 13,5 mal schwerer ist, nur bis zu einer 13,5 mal kleinern Höhe oder nur bis ungefähr 28 Zoll = 760^{mm} heben. Der von Vivianis Freund, Toricelli, ausgeführte Versuch bewies die Richtigkeit dieser Vermutung. Später zeigte dann Pascal in der That, dafs die Höhen, bis zu denen verschiedene Flüssigkeiten in so vorgerichteten Röhren gehoben werden, ihrem specifischen Gewichte umgekehrt proportional seien, ein Beweis, dafs ein bestimmtes Gewicht einer Flüssigkeit in einer Röhre von gegebenem Querschnitte gehoben wird, welches dem äufsern Drucke gleich ist.

Der vorhin beschriebene Apparat, das Barometer in seiner einfachsten Form, ist jedoch zu genauen Messungen über die Gröfse des Luftdruckes nicht geeignet. Dazu mufs dasselbe sorgfältig hergerichtet werden.

§ 91.

Konstruktion des Barometer. Damit das Barometer seinen Zweck erfülle, ein genau bestimmbares Mafs des Luftdruckes zu bieten, mufs es mehreren Bedingungen genügen:

1) Mufs das Quecksilber vollständig rein sein, da unreines Quecksilber eine andere Dichtigkeit hat als reines und an den Wänden der Glasröhre adhäriert.

2) Die Barometerröhre mufs ganz rein sein.

3) In dem über dem Quecksilber befindlichen Raume des Barometer darf keine Luft sein.

1. Um der ersten Bedingung zu genügen, mufs man das käufliche Quecksilber, welches stets eine geringe Menge Oxyd und fremde Metalle enthält, reinigen. Das beste Verfahren dazu ist, dafs man das Quecksilber in einer starken Glasflasche mit stark verdünnter Salpetersäure dauernd und heftig schüttelt. Man setzt das so lange fort, bis sich das Quecksilber in der verdünnten Säure in ganz kleine Kügelchen zerteilt, so dafs das Flüssigkeitsgemenge beim Schütteln als eine gleichförmige graue Masse erscheint. Dann giefst man die verdünnte Säure ab und füllt statt ihrer destilliertes Wasser in die Flasche und schüttelt wieder. Das Wasser wird mehrmals und zwar so lange erneuert, bis das abgegossene Wasser durchaus nicht mehr sauer reagiert; *man überzeugt* sich davon durch Prüfung mit

erwärmen, um das stofsweise Kochen zu verhindern. Nach einiger Übung ist es nicht schwer, ein ruhiges Kochen zu erzielen. Hat man die Spitze nun ausgekocht, so geht man mit der Flamme an der Röhre hinauf, indem man sie immer um die Röhre herumführt, und kocht die höhern Teile der Säule, aber nur bis ungefähr 5^{cm} unter der Oberfläche derselben, um zu verhindern, dafs das siedende Quecksilber mit der äufsern Luft in Berührung kommt, da hierbei sonst eine teilweise Oxydation des Quecksilbers eintritt und das gebildete Oxyd sich im Quecksilber auflöst und es verunreinigt. Ist das Kochen soweit vorgeschritten, so unterbricht man es und füllt das Rohr bis zum zweiten Drittel mit trocknem und heifsem Quecksilber. Man fängt dann etwas unter der Stelle, an der man vorhin das Kochen beendigte, wieder an vorsichtig zu erhitzen und verfährt wie vorhin. Ist auch der Teil ausgekocht, so füllt man das Barometerrohr vollständig, bis vielleicht 2^{cm} unter dem obern Ende an und kocht auch dieses Stück in der vorhin beschriebenen Weise aus, indem man immer stofsweises Kochen vermeidet und verhindert, dafs das siedende Quecksilber mit der Luft in Berührung kommt.

Man vertreibt auf diese Weise alle Luft und alle Feuchtigkeit, welche vorher noch in der Röhre waren, indem sie am Glase adhärierten, und erkennt, ob das Barometer wirklich gelungen ist, daran, dafs man in der ganzen Ausdehnung desselben keine Blase zwischen Glas und Quecksilber wahrnimmt, und dafs das Rohr wie ein vollkommener Spiegel aussieht.

Nach dieser Methode kann man es leicht dahin bringen, dafs nur selten ein Barometer mifslingt, und zugleich ist sie ziemlich ungefährlich. Bekanntlich sind die Quecksilberdämpfe giftig, und man mufs sich hüten, sie einzuathmen. Springt das Barometer, so löscht man die Flamme augenblicklich durch Zudrehen des Gashahns, und auf der Wanne von Blech kühlt sich das Quecksilber fast momentan ab, so dafs nur wenig Dämpfe sich entwickeln; hat man aber das Rohr nach sonstigen Methoden in eine geneigte rostartige Rinne gelegt und durch glühende Kohlen erhitzt, so ist bei einem Zerspringen des Rohres die massenhafte Entwicklung von Dämpfen wohl kaum zu vermeiden. Überdies hat man bei der angegebenen Methode die Erhitzung weit besser in seiner Gewalt.

Taupenot gibt eine Vorsichtsmafsregel, welche das Kochen sehr erleichtert (Annal. de chim. et de phys. III. Série. Tome XLIX. p. 91). Er schlägt vor, die Röhre ungefähr 10^{cm} länger zu nehmen, als man sie später bedarf, in dem Stücke einige Verengerungen anzubringen, an das offene Ende der Röhre eine Kautschukröhre zu befestigen, welche mit einer Luftpumpe in Verbindung steht, und dann die Luft über dem Quecksilber auszupumpen. Dann siedet das Quecksilber bei einer um 90° tiefern Temperatur und das Stofsen wird noch leichter vermieden.

Nach dem Kochen läfst man die Röhre sich abkühlen, schneidet den überschüssigen Teil derselben glatt ab und füllt die Röhre mit trocknem ... warmem Quecksilber soweit, dafs dasselbe in Form einer Kuppe ...r den Rändern der Röhre hervorragt. Man schliefst die Röhre mit ... Finger, indem man die Kuppe vorsichtig abstreift, kehrt sie um ... taucht sie in ein Gefäfs mit Quecksilber, wobei man darauf zu achten ..., dafs beim Umdrehen keine Luftblase in den leeren Raum der Röhre ...r dem Quecksilber eindringt.

Ist das Barometer auf diese Weise hergestellt, so mufs es fes gestellt und mit einer Teilung in Millimeter versehen werden, um Augenblick den vertikalen Abstand der beiden Quecksilberniveaus inn und aufserhalb der Röhre zu messen. Da nun aber das Quecksilber i Röhre nur steigen kann, wenn das Niveau im Gefäfs eine entspre Strecke sinkt, so mufs die Teilung so angebracht sein, dafs man zu beide Niveaus beobachten kann.

§ 92.

Verschiedene Formen der Barometer. Dient das Baromet zu genauen Versuchen im Laboratorium, so dafs es nicht von seiner gebracht zu werden braucht, und hat man ein Kathetometer zu Geb ist die Einrichtung desselben sehr einfach. Man wendet als Gefäfs parallelepipedischen Glaskasten an, den man auf ein in der Zimme am besten vor einem Fenster angebrachtes festes tischchen fest aufstellt (Fig. 145). Das Rohr mittels zweier Klammern an einem Brett bef welches mit dem Tischchen zugleich unten i Zimmerwand fest eingelassen ist, und welche an der Stelle, wo sich der leere Raum des Bar befindet, einen Ausschnitt erhält, so dafs man dem Barometer die helle Fensterfläche sieht.

Fig. 145.



Man mifst dann die Niveauunterschiede des Kathetometers. Um diese Messungen mit lichster Genauigkeit auszuführen, ist unten üb Gefäfs ein Stift A angebracht, der mittels Schraube in dem festen Gestell gehoben und g werden kann. Wenn man die Messung mache beginnt man damit, den Stift soweit herabzu dafs seine Spitze gerade das Quecksilber berühr kann dieses mit der gröfsten Genauigkeit err denn beim Herablassen sieht man das Bild des im Quecksilber und den Stift selbst sich gegen ei bewegen. Der Stift berührt in dem Augenblic Quecksilber, wo die beiden Spitzen genau auf ei treffen. Schraubt man zu weit, so höhlt si Quecksilber rings um den Stift aus. Darauf man das Kathetometer zunächst auf die Queck kuppe in der Röhre ein, indem man den horiz Faden des Fadenkreuzes gerade die Kuppe ta läfst. Man bemerkt den Stand des Kathetomete stellt dann unten auf das Niveau im Gefäfse ein, indem man die Spi Stiftes wieder gerade das Fadenkreuz berühren läfst. Die Differenz Stellungen gibt die Höhe des Barometerstandes. Hat man vorher die des Stiftes genau gemessen, so kann man auch so verfahren, da anstatt das Niveau des untern Quecksilbers mit dem Kathetome visieren, das obere Ende des Stiftes bestimmt. Zur Differenz der Ablesungen am Kathetometer fügt man dann, um den Barometerst *erhalten*, die Länge des Stiftes.

es Barometer ist das einfachste, und diese Messungsmethode ist este, denn man kann auf diese Weise die Niveauunterschiede am erhalten; mag das Barometer vertikal stehen oder nicht, man er- r den vertikalen Abstand der beiden Quecksilberoberflächen. Man ht die Höhe des Barometers bis auf ein Fünfzigstel Millimeter

meter von Fortin. Das soeben beschriebene Barometer kann r an einem festen Orte benutzt werden. Man bedarf aber in sehr len transportabler Barometer, teils auf Reisen, um den Luftdruck edenen Orten zu messen, teils, wie wir später zeigen werden, zu sungen. Man mufs daher dann ein tragbares r anwenden, an welchem der Mafsstab ein für st ist. Das vorzüglichste Gefäfsbarometer der s Fortinsche.

Fig. 146.

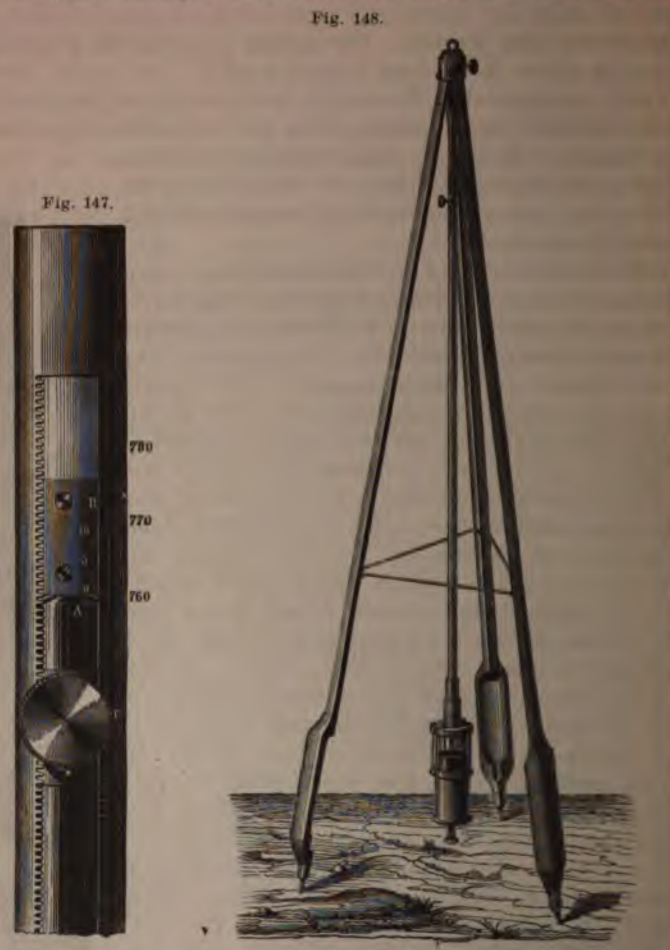
Gefäfs desselben (Fig. 146) besteht aus einem ler, welcher mit einem kupfernen Deckel ver- der in seiner Mitte eine Öffnung hat, um das rohr durchzulassen. Der Glascylinder steht Cylinder von Buchsbaumholz, der mittels n dem Deckel festgeschraubt ist. Der Boden chsbaumcylinders ist aus einem elastischen ldet, einem Beutel, dessen innere Seite aus kanisiertem Kautschuk, dessen äufsere aus teht, und der über den vorspringenden Rand lers von Buchsbaum fest aufgebunden ist. chsbaumcylinder ist in einem weiten Metall- est eingeschraubt, durch dessen Boden eine hindurchgeht, deren oben abgerundeter Kopf metallisches Stück drückt, welches in der Beutels befestigt ist und in dessen nach unten Höhlung der Kopf der Schraube hineinpafst. Gefäfs ist bis zu einer gewissen Höhe mit r gefüllt. Wenn man die Schraube dreht, elastische Boden des Gefäfses und damit die des Quecksilbers in dem Glascylinder ge- r gesenkt. Man ist daher imstande, das Niveau silbers im Gefäfse immer auf gleicher Höhe n. Um diese zu markieren, reicht von dem s Glascylinders ein Elfenbeinstift *s* in den ierab und man hat nur nötig, gerade so wie origen Barometer dafür zu sorgen, dafs die Stiftes *s* und ihr Bild sich berühren, indem Oberfläche des Quecksilbers mit Hülfe der soweit hebt. Diese Spitze ist der Ausgangs- an dem Barometer angebrachten Teilung.

Barometerrohr reicht durch die in der Mitte des Deckels an- Öffnung in das Gefäfs hinein, und ein Stück Leder, welches an und an den über den Deckel hervorragenden Wänden der Öffnung n ist, verschliefst dieselbe soweit, dafs kein Quecksilber heraus-

treten, aber die äufsere Luft ungehindert mit der des Gefäfses kom
cieren kann. Das Rohr ist vollständig von einer Messinghülse umg
um es gegen Stöfse zu schützen, in welcher nur, um den Stand des Q
silbers beobachten zu können, oben zwei gegenüberliegende Spalten
gebracht sind, die vielleicht zwei Decimeter unter und über den mit

Fig. 148.

Fig. 147.



Stand des Barometers von 760 Millimeter lang sind. Auf der Me
hülse ist eine Millimeterteilung angebracht, welche oben neben dem
der Spalte steht und deren Nullpunkt die Spitze des Elfenbeinstift
Der eine Rand der Spalte ist gezahnt (Fig. 147) und mittels eines T
ist daran ein Nonius auf und ab verschiebbar. Will man eine Ab
machen, so beginnt man damit, unten das Niveau des Quecksilbers i
fäfse einzustellen. Dann verschiebt man den Nonius, indem man das
in der durch den untern Rand desselben gehenden Horizontalebene h
lange, bis diese Ebene die Quecksilberkuppe tangiert, und hat nu
Stellung des in dieser Ebene liegenden Nullpunktes des Nonius a

Teilung zu bestimmen, um den Stand des Barometer bis auf Zehntel Millimeter genau zu erhalten. Das Barometer wird auf einem dreibeinigen Stativ, welches beim Transport zugleich als Etui dient (Fig. 148), so aufgehängt, dafs es durch die Schwere des Gefäfses immer vertikal hängt. Dazu ist es mittels einer sogenannten Cardanischen Aufhängung befestigt, das heifst um zwei zu einander senkrechte Axen drehbar. Das Barometer ist an dem Durchmesser eines Ringes drehbar befestigt, der selbst um einen zu jenem senkrechten Durchmesser drehbar ist.

Dieses Barometer ist sehr leicht transportabel und bietet so einen weitern Vorteil dar. Man schraubt dann das Quecksilber des Gefäfses in die Höhe, soweit, bis nicht nur das Gefäfs, sondern auch das Rohr selbst ganz mit Quecksilber gefüllt ist. Die vorher in dem Gefäfse befindliche Luft tritt dann durch das Leder aus. Dann kann man den Apparat legen oder umkehren, ohne dafs Luft in das Barometer eindringt, und ohne befürchten zu müssen, dafs durch etwaige Stöfse Schwankungen des Quecksilbers eintreten, so dafs durch den Stofs des Quecksilbers das Glas entzwei geht. Der zusammengelegte Dreifufs schützt als Etui das Barometer vor äufsern Verletzungen.

§ 93.

Korrektion wegen der Kapillarität. Da in den bisher beschriebenen Barometern das Rohr stets in ein mehr oder weniger weites Gefäfs mit Quecksilber taucht, so ist nach den § 73 vorgetragenen Lehren klar, dafs die Oberfläche des Quecksilbers in dem Rohre bedeutend stärker gekrümmt ist als in den Gefäfsen, und daraus folgt weiter, dafs in den Röhren wegen der kapillaren Depression das Quecksilber nicht so hoch steht, als es infolge des hydrostatischen Druckes thun würde. Wir müssen daher an den beobachteten Barometerständen eine Korrektion anbringen, indem wir die Depressionsgröfse bestimmen und diese der beobachteten Barometerhöhe hinzufügen. Dies ist jedoch sehr schwierig. Wir sahen, dafs die kapillare Depression abhängt von der Weite der Röhre und dem Winkel, unter dem die Flüssigkeitsoberfläche die Wandfläche schneidet. Wenn man aber nun den Winkel mifst, den die Quecksilberoberfläche mit der Wand bildet, so findet man denselben, wie wir bereits früher erwähnten, keineswegs konstant; ja die Schwankung ist im Barometer noch viel bedeutender als sonst, es kommt vor, dafs der Winkel nahezu ein rechter wird, wo dann gar keine Depression eintritt. Die Depression des Quecksilbers kann demnach in Röhren gleichen Durchmessers sehr verschieden sein, und man kann keine allgemein gültigen Tabellen aufstellen, um die Depression für Röhren von bestimmtem Durchmesser zu bestimmen. Man wird für jedes Barometer den Durchmesser der Röhre und für jede Beobachtung die Höhe des Meniskus messen, daraus den Winkel bestimmen müssen, unter dem die Quecksilberoberfläche die Wandfläche schneidet, und daraus dann die Depression berechnen. Um das leichter zu machen, sind verschiedene Tabellen berechnet, welche nach den Formeln von La Place die Depressionen bei verschiedenen Winkeln und Röhrendurchmessern angeben. Eine solche von Delcros berechnet findet sich im XIV. Bande der Memoiren der Brüsseler Akademie. Für einen Winkel von 36^0 gibt Bravais[1]) folgende Zahlen an:

[1]) *Bravais*, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome V.

Durchmesser der Röhre	Depression
4^{mm}	1^{mm},635
6	0 909
8	0 538
10	0 322
12	0 195
14	0 117
16	0 070
18	0 041
20	0 025.

Man sieht, wie die Depression mit der Weite der Röhre ra nimmt, und dafs sie bei einem Röhrendurchmesser von 20^{mm} schon halb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler beim Fort Barometer fällt. Wenn man die Röhre noch weiter, gegen 30^{mm} so ist der Fehler stets verschwindend klein. Deshalb wendet man festen Barometern auch Röhren von solchem Durchmesser an. I transportabeln ist jedoch eine solche Weite wegen des zu grofsen Ge des darin enthaltenen Quecksilbers nicht anwendbar. Doch auch bei darf der Durchmesser der Röhre füglich nicht unter 10^{mm} klein sei

§ 94.

Heberbarometer. Von den bisher beschriebenen Barometer Gefäfsbarometern, unterscheiden sich die Heberbarometer. Diesell stehen aus einer heberförmig gebogenen Glasröhre, deren langer S oben geschlossen und deren kurzer Schenkel oben offen ist. Sind die an der Stelle, wo die Quecksilberoberflächen sich befinden, gleich v bedarf es bei ihnen keiner Korrektion wegen der Kapillarität, so da bei der Unsicherheit dieser Korrektion mit diesen Barometern weit si Resultate erhält.

In dem Falle aber ändern sich beide Niveaus des Quecksil gleichem Mafse und deshalb mufs hier die Teilung in besonderer angebracht werden.

Kann man den Barometerstand mit dem Kathetometer bestim bedarf es auch in diesem Falle gar keiner Teilung, eine heberförn bogene Glasröhre wird vor einem mit Ausschnitten versehenen Brette befestigt (Fig. 149) und mittels desselben vertikal aufgehäng die beiden Quecksilberoberflächen nahezu vertikal unter einander zu b wird die Röhre meist noch einmal doppelt gebogen. Eine einfache A mit dem Kathetometer ergibt dann den Barometerstand mit gröfs nauigkeit. Hat man kein Kathetometer zu Gebote, so kann man z die Teilung auf dem Glase anbringen. Dazu wird der Abstand Punkte *a* und *b* genau gemessen und der Punkt *a* als Nullpunkt d lung betrachtet. Sei die Entfernung *ab* gerade gleich 760^{mm}, so wi den Teilstrich *a* mit 0 und *b* mit 760 bezeichnen. Über und unter *a* über und unter *b* werden dann eine Reihe von Teilstrichen gezoge den Barometerstand zu erhalten, beobachtet man, wie viel Teilstri obere und untere Kuppe des Quecksilbers über oder unter dem Null steht, und die Differenz beider Ablesungen gibt den Barometersta unserer Zeichnung würde z. B. die untere Kuppe am Teilstriche 1

Nullpunkte a, die obere bei 750 stehen, der Barometerstand wäre 750 — 10 = 740mm. Beim Ablesen hat man darauf zu achten, dafs uge sich mit dem Gipfel der Kuppe in der gleichen Horizontalebene let. Um dieses zu erhalten und zugleich um die Ablesung genauer zu en, sind bei feinern Apparaten an dem obern, sowie am untern Teile arometers verschiebbare, mit Fadenkreuz versehene kleine Mikroskope racht.

Anstatt die Teilung auf dem Barometerrohr selbst anzubringen, kann ich neben dem Rohre auf dem Brette angebracht werden. Ist das ein für allemal fest angebracht, und die Teilung fest, so erhält man den neterstand in gleicher Weise wie in vorigen Falle.

Häufig findet man an Barometern, ittels einer Ablesung den Barometer- zu erhalten, das Rohr oder die Skala iebbar angebracht. Ist wie in Fig. 150 ohr vertikal verschiebbar, so befindet uf dem Brette, auf welchem die Skala igt ist, der Nullpunkt der Teilung ert. Man stellt dann mit Hülfe der hraube das Rohr so, dafs die untere silberkuppe gerade an dem Null- ansteht. Die an dem obern Teile arometers angebrachte Teilung ist iesem Punkte aus aufgetragen und inmalige Ablesung ergibt den Stand rometers.

st die Skala verschiebbar, so wird ullpunkt derselben auf die untere eingestellt.

Man hat den Heberbarometern, um sser und sicherer transportieren zu , mancherlei Formen gegeben, deren ist, den offenen Schenkel zu ver- sen, so dafs kein Quecksilber heraus eine Luft in den leeren Raum des eter hinein kann. Die in Fig. 149 50 dargestellten Barometer werden ein mit Baumwolle umwickeltes äbchen geschlossen, nachdem man vorsichtiges langsames Neigen den Raum ganz mit dem Quecksilber hat. Das Stäbchen wird soweit r gedrückt, dafs es ganz auf dem Quecksilber aufsteht, und dann rometer umgekehrt, damit das Gewicht des Quecksilbers das Stäb- icht heraufdrücke.

Fig. 149. Fig. 150.

inen vortrefflichen Verschlufs bietet die Vorrichtung, welche der r Greiner an seinem Heberbarometer angebracht hat (Fig. 151).

Die innern Wände des langen und kurzen Schenkels gehen nicht ununte brochen in einander über, sondern der lange Schenkel ist mit dem kurz durch den künstlichen Glasverband aa verbunden. Der längere Schenkel i konisch ausgezogen und um diesen Konus liegt bei a angeschmolzen d ausgeweitete Teil des kürzeren Schenkels. Durch die Öffnung b, welc ungefähr 2^{mm} weit ist, kommuniciert der längere Schenkel mit dem kürzer der sie umgebende Raum ist stets mit Quecksilber gefüllt. Zum Transp wird das Barometer verschlossen, indem der Stopfen in die Verengerung des kürzern Schenkels hinab geschoben und dessen Stil in der Messi fassung d des kürzern Schenkels festgeklemmt wird.

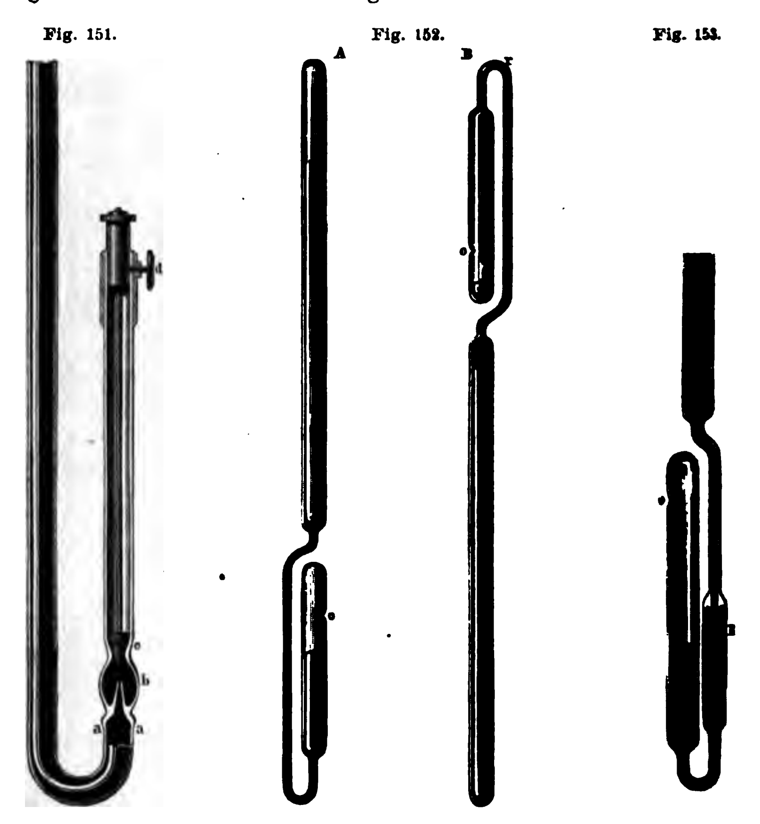


Fig. 151. Fig. 152. Fig. 153.

Fig. 152 A und B zeigt das Gay-Lussacsche Barometer, welc ebenfalls sehr leicht und sicher transportiert werden kann. Es besteht zwei Stücken einer gut cylindrischen Röhre, welche durch eine mehrf gebogene enge Röhre so verbunden sind, dafs die Quecksilbersäulen in beiden Röhren gerade unter einander liegen. Das Gefäfs des Barom hat nur eine sehr kleine Öffnung bei O, die dadurch erhalten wi dafs man in die vor der Glasbläserlampe erweichte Röhrenwand hin sticht. Zum Transport neigt man das Barometer langsam, bis der la Raum ganz mit Quecksilber erfüllt ist, und kehrt dann das Barometer v ständig um. Dann füllt das Quecksilber den langen Schenkel bis r i

s überschüssige fällt in den kürzeren Schenkel unter die Öffnung O, durch elche es wegen der kapillaren Depression des Quecksilbers im Glase nicht streten kann. Man sieht, dafs das umgekehrte Barometer, da es vollndig bis r mit Quecksilber erfüllt ist, beim Transport keine Stöfse erden kann, und zugleich, dafs durch die enge Röhre nicht wohl Luft in n leeren Raum des Barometer gelangt.

Das Barometer von Bunten (Fig. 153) ist vor dem Eindringen von Luft ch mehr gesichert, indem über der untern Biegung der engern Röhre e weitere Röhre angebracht ist, in welche sich der obere Teil der engen hre fortsetzt und in der er in einer feinen Spitze endigt; wenn nun doch e Luftblase eindringen sollte, so legt sich dieselbe in den Raum, der die tsetzung der engen Röhre umgibt, bei R und dringt nicht in den leeren um des Barometer.

Die drei letzten Barometer sind im übrigen gerade so auf einem Brette stigt, wie die zuerst beschriebenen einfachen Heberbarometer. Die Skala ndet sich entweder auf dem Rohre oder auf der Unterlage des Baroer mit den vorhin erwähnten Modifikationen[1]).

Bei dieser Art Barometer bedarf es keiner Korrektion wegen der illarität, aber bei diesen sowohl wie bei den Gefäfsbarometern einer rektion wegen der Temperatur. Das Quecksilber dehnt sich nämlich alle Körper beim Erwärmen aus und wird dadurch leichter; dem hen Gewichte der Luft hält daher von kaltem Quecksilber eine kürzere e das Gleichgewicht als von warmem. Die bei verschiedenen Temperan genommenen Barometerstände sind daher nicht vergleichbar. Man s deshalb die bei verschiedenen Temperaturen genommenen Stände auf he Temperatur und somit gleiche Dichtigkeit reducieren. Als solche maltemperatur nimmt man die Temperatur des schmelzenden Eises, Grad. Ist der Barometerstand B bei einer Temperatur t^0 nach der rmometerskala von Celsius, so ist, wie wir in der Wärmelehre nachen werden, der Barometerstand b bei der Temperatur Null Grad

$$b = \frac{B}{1 + 0{,}000\,18 \cdot t}.$$

§ 95.

Aneroidbarometer. Alle bisher betrachteten Barometer beruhen auf hydrostatischen Gesetze, dafs in kommunicierenden Röhren die Höhen ier Flüssigkeitssäulen von verschiedenem specifischen Gewicht sich veren umgekehrt wie die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten. Bourdon[2])

[1]) Eine Beschreibung und Theorie der in neuerer Zeit auf den meteorologin Observatorien vielfach als Registrierapparate benutzten Wagebarometer de hier zu weit führen und liegt, als von speciell meteorologischem Inter-, unsern Zwecken zu fern. Man findet eine ausführliche Besprechung deren in: *Schreiber*, Theorie und Praxis des Wagebarometers. *Carl*, Repertorium Experimentalphysik Jahrg. 1872.

[2]) *Bourdon*, Baromètre metallique. Comptes rendus hebdomadaires de l'Institut France. Bd. XXXVII. p. 656. Die Metallbarometer sind seitdem in sehr vielen chiedenen Formen konstruiert, da sie als Reisebarometer sehr bequem sind. ade zu letzterem Zwecke sind die Barometer von *Goldschmidt* in Zürich sehr

hat zuerst ein Barometer konstruiert, welches auf einem ganz andern P
cipe beruht, und welches, wenn auch zu exakten Messungen nicht so
eignet wie die bisher betrachteten, doch in sehr einfacher Weise
Schwankungen des Luftdruckes zu erkennen gibt. Das Barometer be
auf dem § 53 vorgetragenen Satze, dafs die Biegung von Stäben
Röhren proportional ist der Kraft, welche die Biegung hervorbringt. W
eine elastische kreisförmig gebogene Röhre an ihren Enden fest verschlo
wird, so krümmt sie sich demnach stärker oder schwächer, wenn bei
stantem innern Druck der äufsere Druck stärker oder schwächer wird.

Fig. 154.



dem Bourdonschen Barometer ist eine se
dünne elastische Röhre bei F befestigt und
A und B frei; im Innern der Röhre ist
Luft sehr stark verdünnt. Wenn nun der D
der atmosphärischen Luft stärker wird
nähern sich die Enden A und B, und
um die feste Axe C drehbarer Winkel
$ADCEB$ dreht sich und überträgt
Drehung mittels des gezähnten Radstücke
G auf einen Zeiger, der auf einer am Umf
des Barometer angebrachten Teilung eins
Nimmt der Luftdruck ab, so gehen die E
A und B der Röhre wieder aus einander
der Zeiger bewegt sich nach entgegenges
Richtung. Bei mittlerm Barometerstand
der Zeiger über F, steigt der Luftdruck
bewegt er sich zur rechten, fällt derselbe, zur linken Seite. Die Te
wird nach einem Quecksilberbarometer aufgetragen und gibt den Luft
in Millimetern Quecksilberhöhe an.

In neuerer Zeit hat Victor Pierre [1]) Reduktionsformeln angeg
mittels deren das Barometer bei nicht zu grofsen Schwankungen des
druckes auch zu Messungen geeignet ist, wenn nicht die äufserste Gen
keit verlangt wird. Die von Hempel in Paris gearbeiteten Metallbaro
sind indes so vorzüglich, dafs man sie, wenigstens wo nicht die äuf
Genauigkeit verlangt wird, ohne weiteres zu Messungen benutzen kan

§ 96.

Anwendung des Barometer. Wir haben bei der Konstruktion
Beschreibung des Barometer so lange verweilt wegen der Wichtigkei
Apparates. Wir werden dasselbe bei sehr vielen physikalischen U
suchungen in Anwendung finden.

Eine der wichtigsten Anwendungen findet es in der Meteorologie
es nicht nur den Luftdruck im allgemeinen mifst, sondern auch
Schwankungen desselben in jedem Augenblicke angibt, und so eine
Fundamentalerscheinungen der Witterungslehre auf das genaueste zu

geeignet. Man mufs dieselben aber ebenso wie alle übrigen Metallbaro
von Zeit zu Zeit nach einem Quecksilberbarometer regulieren. Besser noc
die von *Goldschmidt* sind die Barometer von *Naudet*.

[1]) Über das Bourdonsche Metallbarometer von *Victor Pierre*. Prag,
(*Aus den* Verhandl. der kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.)

n gestattet. Wir müssen uns damit begnügen, einige Resultate hier führen, deren weitere Ausführung der Witterungslehre angehört.

Beobachtet man an einem und demselben Orte regelmäfsig, vielleicht Stunden, das Barometer, so sieht man bald, dafs dasselbe keineswegs r denselben Stand hat, sondern bald höher bald tiefer steht. Bei genauen Untersuchung dieser Schwankungen unterscheidet man bald Klassen derselben: periodisch regelmäfsige und unregelmäfsige. Erstere gen nur wenige Millimeter, letztere können 30—40 Millimeter be- n. Betrachten wir zunächst die regelmäfsigen Schwankungen, welche r Region der Tropen fast allein vorhanden sind, so erkennt man, dafs arometer zweimal des Tages einen höchsten und zweimal einen tiefsten hat. Die höchsten Stände sind kurz nach Sonnenuntergang und des ens zwischen 9 und 10 Uhr Vormittags, die tiefsten einige Zeit vor naufgang und des Nachmittags gegen 4 Uhr. Die Zeiten, an denen Maxima und Minima auftreten, ändern sich im Laufe des Jahres etwas, efste Stand des Nachmittags und der höchste Stand am Abend tritt im er sehr viel später, dagegen der tiefste Stand am Morgen im Sommer viel früher ein als im Winter, nur der höchste Stand am Morgen fällt nahezu um dieselbe Zeit, im Sommer vielleicht $^1/_4$ Stunde früher als inter.

Wenn man aus den ständlichen Beobachtungen das arithmetische nimmt und so den mittlern täglichen Barometerstand bestimmt, so man bei einer Vergleichung der verschiedenen Barometerstände im des Jahres, dafs auch diese einer periodischen Änderung unterworfen die Barometerstände sind im Winter höher, der Luftdruck ist also r als im Sommer.

Nimmt man aber aus allen täglichen mittlern Barometerständen wieder rithmetische Mittel und bestimmt so den mittlern jährlichen Barometer- , so findet man denselben bei fortgesetzten Beobachtungen in ver- enen Jahren merklich gleich grofs, so dafs wir schliefsen müssen, dafs uftdruck im Grofsen und Ganzen, jene Schwankungen abgerechnet, derselbe bleibt.

Vergleicht man aber die so erhaltenen Jahresmittel, welche uns also nittlern Luftdruck eines Ortes geben, für verschiedene Orte mit ein- , so finden wir, dafs der Luftdruck für verschiedene Orte eine ver- ene Gröfse hat. Zunächst ändert sich der Barometerstand mit der ung eines Ortes über dem Boden, oder der Meeresfläche, nach einem ze, welches wir demnächst ableiten werden, nämlich so, dafs die neterhöhe in einer geometrischen Reihe abnimmt, wenn die Erhebungen er arithmetischen Reihenfolge wachsen, das heifst, wenn wir um

$$a, 2a, 3a \cdots\cdots na$$

aufsteigen, ist der Barometerstand

$$bq, bq^2, bq^3 \cdots\cdot bq^n,$$

q eine konstante Zahl bedeutet, welche kleiner als 1 ist.

Mit Hülfe dieses Gesetzes können wir alle an verschiedenen Orten, Höhe über der Meeresfläche bekannt ist, beobachteten Barometer- e auf die Meeresfläche reducieren. Thut man das, so findet man, dafs

auch dort der Barometerstand keineswegs an allen Orten derselbe ist, [illegible] er vielmehr sich mit der Länge und Breite eines Ortes ändert. Um [illegible] Änderungen des Barometerstandes mit der Länge eines Ortes auch [illegible] annähernd zu bestimmen, dazu reicht das vorhandene Beobachtungsmate[illegible] keineswegs aus. Für die Änderungen mit der Breite eines Ortes sch[illegible] aber ganz allgemein das Gesetz zu herrschen, dafs der Barometerstand [illegible] Äquator bis gegen den 30. Breitegrad zunehme, von dort bis zum 65. Brei[illegible] grad abnehme und in höheren Breiten wieder wachse. Um ein Bild die[illegible] Änderungen zu geben, führen wir Schouws Angaben hier an, der aus [illegible] Beobachtungen verschiedener Orte auf Inseln und an den Gestaden [illegible] atlantischen Oceans folgende Übersicht zusammengestellt hat[1]):

Breite nördlich	Barometerstand	Breite nördlich	Barometerstand
0	762,2	50	762,2
10	763,7	60	758,9
20	765,5	65	753,4
30	766,6	70	755,6
40	764,4	75	758,9

Die Barometerstände am Meeresufer, schliefst Schouw, scheinen r[illegible] lich das neben einander darzubieten, was in zeitlicher Reihenfolge die [illegible] lichen und jährlichen Schwankungen zeigen.

Von viel bedeutenderer Gröfse als die periodischen Änderungen [illegible] Barometerstandes sind die nicht periodischen. Dafs aber auch diese [illegible] gewissen Regelmäfsigkeit folgen, hat Dove auf das sicherste nachgewi[illegible] indem er den Begriff der barometrischen Windrose aufstellte und z[illegible] dafs die Barometerschwankungen auf das innigste mit den Änderunge[illegible] Windesrichtung zusammenhängen.

Der Barometerstand ist im allgemeinen bei Nordostwind am höc[illegible] sinkt bei Ost-, Südost-, Südwind, ist bei Süd- oder Südwestwind am ti[illegible] und steigt bei West-, Nordwest- und Nordwind[2]).

So ist z. B. für Carlsruhe:

Windrichtung	Barometerstand	Differenz
NO	757,74	
O	756,75	— 0,99
SO	754,50	— 2,25
S	752,92	— 1,58
SW	754,24	+ 1,32
W	754,86	+ 0,62
NW	756,26	+ 1,40
N	757,14	+ 0,88
NO	757,74	+ 0,60.

Den innern Zusammenhang dieser Thatsachen weist die Meteor[illegible] nach, sie zeigt, dafs die Luftströmungen, welche ein Sinken des Baro[illegible] bewirken, uns warme, und diejenigen, welche ein Steigen des Baro[illegible]

[1]) *Schouw*, Poggend. Ann. XXVI. p. 434.

[2]) *Doves* Repertorium der Physik. Bd. 4. Meteorologische Untersuchu[illegible] *Berlin* 1835 und Klimatologische Beiträge. Berlin 1857.

ten, uns kalte Luft zuführen. Die Wärmelehre wird uns den physi-
hen Grund dieser Thatsachen darbieten.
Mit der Änderung des Windes hängt nun aber auf das innigste die
ung des Wetters zusammen; im mittlern Europa bringt Süd- und
stwind im allgemeinen Regen, dagegen Nordostwind heiteres und
Wetter, so dafs der Barometerstand selbst mit dem Wetter parallel
Bei hohem Barometer haben wir sogenanntes gutes Wetter, bei
gem Regen und Wind; der mittlere Barometerstand entspricht dem
ange vom guten zum schlechten und vom schlechten zum guten
r. Deshalb findet man auch in vielen Häusern das Barometer als so-
ntes Wetterglas, und neben den entsprechenden Barometerständen die
hnungen gutes Wetter, veränderliches Wetter, Regen oder Wind u. s. f.[1]).
Bei einer sehr grofsen Anzahl physikalischer Erscheinungen kommt
uftdruck in Betracht; bei allen diesen brauchen wir daher das Baro-
So erwähnten wir vorhin, dafs wir bei Wägungen die Gewichte
n luftleeren Raum beziehen müfsten; wir werden sehen, dafs die
gkeit der Luft an der Erdoberfläche dem auf ihr lastenden Drucke
tional ist, diese Korrektion ändert sich demnach mit dem Barometer-
Ebenso werden wir das Barometer benutzen, um die Volumänderungen
se mit dem auf sie ausgeübten äufsern Druck zu vergleichen und zu
Reihe anderer Untersuchungen, so dafs die Ausführlichkeit, mit der
n Apparat beschrieben haben, gerechtfertigt ist.

§ 97.

Gröfse des Luftdruckes. Mittels des Barometer sind wir in den
gesetzt, auch in Kilogrammen den Druck zu bestimmen, welchen die
ns lagernde Luftmasse auf ein Flächenstück von bestimmter Gröfse
. Derselbe ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, deren
hnitt gleich ist jenem Flächenstück, und deren Höhe gleich ist der
les Quecksilbers im Barometer, also im Mittel gleich 760^{mm}. Nennen
shalb die Höhe des Barometerstandes h, die Gröfse des Querschnittes
das specifische Gewicht des Quecksilbers s, so ist der Druck P gleich

$$P = h \cdot q \cdot s,$$

tzen wir $h = 76^{cm}$, $q = 1^{cm}$ quadr., so erhalten wir, da

$$s = 13{,}5959,$$

$$P = 1{,}0333 \text{ Kilogramm},$$

r einen Querschnitt von q Quadratcentimetern

$$P = 1{,}0333 \cdot q \text{ Kilogr.}$$

Bei dieser Gröfse des Luftdruckes ist es ersichtlich, dafs er sehr
ge mechanische Wirkungen hervorbringen kann, wenn man bewirkt,
r nur einseitig auftritt, wenn man ihn also an der einen Seite eines
rs fortnimmt, wie wir es z. B. im Barometer gethan haben. Wir

[1]) Ausführlicheres in *Kämtz*, Lehrbuch der Meteorologie. II. Bd. Halle 1832,
Schmidt, Lehrbuch der Meteorologie als XXI. Bd. von *Karstens* allgemeiner
lopädie der Physik. Leipzig 1860.

wollen eine Reihe von Apparaten, welche auf dem Drucke der Luft ber
betrachten, wenn wir in der Luftpumpe ein Mittel kennen gelernt h
um aus irgend einem Raume die Luft fortzunehmen. Die Luftpumpe b
auf der zweiten Grundeigenschaft der Gase, durch welche sie sich vo
tropfbaren Flüssigkeiten unterscheiden, nämlich darauf, dafs die Gase
selbständiges Volumen haben, sondern sich so weit ausdehnen, bi
äufseres Hindernis sich ihnen entgegenstellt.

§ 98.

Mariottesches Gesetz. Da die Flüssigkeiten ein selbständiges
men haben, so haben sie auch eine bestimmte von dem äufsern D
dem sie unterworfen sind, nur in geringem Grade abhängige Dichtigl

Bei den Gasen ist das jedoch durchaus anders, da wir sahen,
ihr Volumen nur von dem äufsern Drucke abhängt. Es fragt sich
wie hängt das Volumen und die Dichtigkeit der Gase von dem ä
Drucke ab.

Diese Frage ist schon frühzeitig untersucht und zwar fast gleicl
von dem französischen Physiker Mariotte.[1]) und dem englischen Ph
Boyle[2]). Beide gelangten zu demselben Resultate, das sich in folge
nach dem erstern das Mariottesche genannten, Gesetze aussprechen

Wenn man eine gegebene Gasmenge in einem Gefäfse abschliefs
dieselbe dann verschiedenen Drucken P und P' aussetzt, so verhält si
Volumen des Gases in beiden Fällen, v und v' umgekehrt wie die Druc

$$v : v' = P' : P.$$

Anstatt dieses Ausdrucks können wir auch setzen

$$v' \cdot P' = v \cdot P,$$

oder das Produkt aus dem Volumen einer Gasmenge und dem Druck
dem sie steht, ist konstant.

Da nun, wie wir früher sahen, die Dichtigkeit eines Körp
gleichem Gewicht dem Volumen desselben umgekehrt proportional is

$$v : v' = d' : d,$$

so folgt aus dem Obigen, dafs die Dichtigkeit einer Gasmenge den D
welchen dieselbe ausgesetzt, direkt proportional ist, oder

$$d : d' = P : P'.$$

Die Versuche, mittels welcher Mariotte dieses Gesetz nachwies,
folgende. Er nahm eine lange Glasröhre, welche vor einem festen
befestigt und nahe ihrem Ende umgebogen war, so dafs ein kürzer
steigender Schenkel entstand, wie bei dem Heberbarometer. Der k
Schenkel war oben geschlossen, der längere oben offen (Fig. 155).
bringt nun zunächst eine kleine Menge Quecksilber in das Rohr, s
es in beiden Röhren bis zum Nullpunkte der Teilung reicht.

---

[1]) *Mariotte*, De la nature de l'air. Paris 1679.

[2]) *Boyle*, Nova experimenta physico-mechanica de vi aëris el
London 1662.

dann die in dem kürzern geschlossenen Schenkel enthaltene Luft
ig ab. Das Volumen der abgesperrten Luft wird gemessen durch
r der Röhre angebrachte Teilung. Das Gas erfüllt jetzt den ab-
n Raum unter dem Drucke der äufsern Luft, welche auf der Ober-
s Quecksilbers im offenen Schenkel lastet, und
ach den früher erkannten hydrostatischen Ge-
die geschlossene Röhre sich überträgt.

Fig. 155.

auf giefst man durch den Trichter in das offene
Quecksilber nach. Das Niveau desselben steigt
n Seiten, aber in dem geschlossenen Schenkel
m weniger als in dem offenen, und man findet,
Quecksilber in dem geschlossenen Schenkel bis
striche 5 angestiegen ist, die eingeschlossene
nur mehr die Hälfte ihres frühern Volumens
wenn der Unterschied der beiden Quecksilber-
gerade die Höhe des Barometer beträgt. Dann
auch das Gas den Druck zweier Atmosphären
en, indem aufser dem Drucke der äufsern Luft
Druck einer dem Gewichte der Luft an Gröfse
Quecksilbersäule auf das abgeschlossene Gas
Wenn man weiter Quecksilber hinzufügt,
Niveauunterschied gleich 2, 3, 4 . . . Baro-
en wird, so übt man dadurch einen Druck von
. . . Atmosphären aus, und man findet dann,
Volumen der abgesperrten Luft auch $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ . . .
rünglichen Volumens beträgt.

die Richtigkeit des Mariotteschen Gesetzes für
u prüfen, welche kleiner sind als der Druck
rn Atmosphäre, kann man sich folgendes Ver-
edienen, welches im wesentlichen schon Mariotte
. Eine möglichst cylindrische Barometerröhre
r ganzen Länge nach in Millimeter geteilt und
alibrieren der zwischen zwei Teilstrichen enthaltene Raum be-
Zu dem Ende bringt man gleiche Gewichte Quecksilber nach ein-
die Röhre.

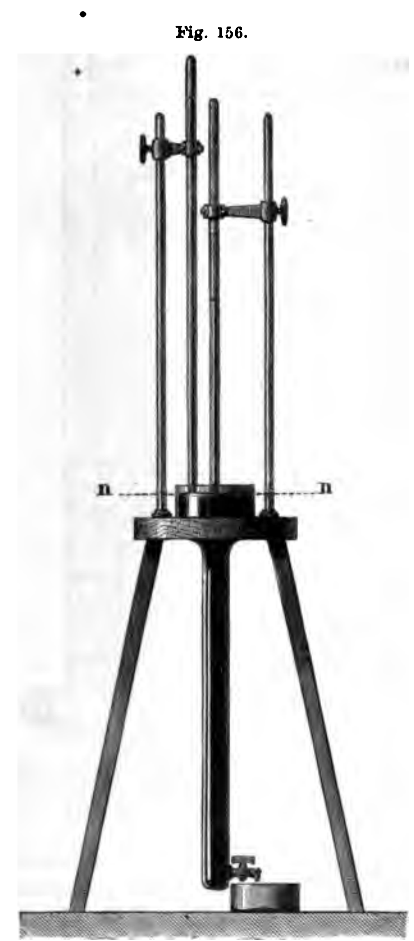
erste füllt die Röhre bis zum Teilstriche n, das erste und zweite
Teilstriche n', durch Hinzufügen des dritten fülle sich die Röhre bis
striche n'' u. s. f., so folgt daraus, dafs sich die Räume, welche bis
eilstrichen n, n', n'', reichen, verhalten wie $1:2:3$ . . . u. s. f.

man auf diese Weise das Kaliber der Röhre an allen Stellen be-
so füllt man dieselbe vollständig so, als wenn man ein Barometer
n wollte, und kehrt dann das fertige Barometer in das Gefäfs
6) um. Dasselbe besteht aus einer weiten Röhre von Glas oder
ser von Gufseisen, welche unten verschlossen und mit einem Hahne
ist und oben in einem weitern Gefäfs von Glas endet. Dieselbe
einem Dreifufs vertikal aufgestellt und bis nn mit Quecksilber ge-
er unten angebrachte Hahn dient dazu, um das Quecksilber leichter
zu können.

man das fertige Rohr in dies Gefäfs umgekehrt, so bringt man

mittels eines Zuleitungsrohres etwas trockne Luft in dasselbe. Die
steigt durch das Quecksilber in den leeren Raum auf, und sofort sieht
wie das Quecksilberniveau durch den Druck dieser Luft sinkt. Man d
nun die Röhre zunächst in das Gefäfs herunter, so weit, dafs die (
flächen des Quecksilbers im Innern der Röhre und aufserhalb von gle

Fig. 156.



Höhe sind; der Teilstrich, neben
chem das Quecksilber steht, gibt
dann den Raum, welchen die Luft
dem Drucke einer Atmosphäre
nimmt. Zieht man darauf das
weiter aus dem Quecksilber h
so vermehrt man dadurch das Vol
der abgesperrten Luft; aber zu
steigt auch das Quecksilber infolg
äufsern Luftdruckes in der Röhre e
und der Unterschied zwischen der Q
silberhöhe in dieser Röhre und der
meterhöhe gibt uns den Druck,
welchem sich das Gas befindet.
auswärts lastet auf dem Queck
der Druck der ganzen Atmosphär
ein Druck gleich dem einer Q
silbersäule von der Höhe des
meter, im Innern hält diesem D
zum Teil die gehobene Queck
säule das Gleichgewicht; der
schufs der Barometerhöhe über
Quecksilbersäule drückt also da
zusammen; diesem Drucke häl
Elasticität des Gases, der Druck
es infolge des Bestrebens, sich a
dehnen, auf die Wände ausübt
Gleichgewicht.

Um diese Unterschiede zw
dem Barometerstande und der i
serer Röhre gehobenen Queck
säule zu messen, ist neben der Röl
festes Barometer angebracht. Ma
dieselben mittels des Kathetomet

Vergleicht man die von dem Gase angefüllten Räume und die Dru
unter welchen es steht, so findet man stets

$$P \cdot v = P' \cdot v'.$$

Füllt z. B. das Gas, wenn das Rohr so tief eingetaucht ist, da
Oberfläche des Quecksilbers innerhalb und aufserhalb der Röhre vo
cher Höhe ist, die Röhre bis zum Teilstriche n, so füllt es die Röh
zum Teilstriche n', das Volumen des Gases ist also doppelt so grofs,
die Höhe des Quecksilbers in der Röhre gerade die Hälfte der Baro
höhe beträgt u. s. f.

Mittels dieser schon von Mariotte angestellten Versuche kann man das [...]gestellte Gesetz nachweisen; indes können sie keinen Anspruch auf [...]se Genauigkeit machen, da es besonders äufserst schwierig ist, die Tem[...]atur konstant zu erhalten. Das ist aber durchaus erforderlich, da bei [...]er Temperaturänderung das Gas ebenfalls sein Volumen ändert, das [...]riottesche Gesetz also nur bei konstanter Temperatur der Gase gültig [...]n kann.

Überdies kann man bei diesen Methoden die Drucke, denen das Gas [...]gesetzt ist, nur zwischen verhältnismäfsig engen Grenzen variieren lassen. [...] der Wichtigkeit dieses Gesetzes fragt es sich jedoch, ob es strenge und [...]gemein gültig ist.

Seit Mariotte und Boyle sind deshalb sehr vielfach Versuche darüber [...]estellt, ob dieses Gesetz für alle Gase und für alle Drucke gültig sei. [...] älteren Versuche von Musschenbroek[1]), Sulzer[2]), Robison[3]) gelangten [...] keinem entscheidenden Resultate; der erstere schlofs in Übereinstimmung [...] Boyle, dafs unter Drucken, welche gröfser waren als vier Atmosphären, [...] Luft weniger, die letzteren, dafs sie mehr zusammengedrückt würde, [...] das Gesetz verlangt.

Im Jahre 1826 publicierten dann Oersted und Schwendsen[4]) Versuche [...]h einer der beschriebenen ähnlichen Methode, aber mit besseren und ge[...]eren Apparaten, und nach einer zweiten ganz verschiedenen Methode. [...] komprimierten Luft in dem Kolben einer Windbüchse und bestimmten [...]tels einer Wage das Gewicht und somit die Dichtigkeit der in dem Kol[...] enthaltenen Luft. Den Druck, unter welchem die Luft stand, bestimm[...] sie mit Hülfe eines Sicherheitsventiles aus dem Drucke, den dieselbe [...] die Wände des Kolbens ausübte. Das Ventil wurde mit einem ein[...]igen Hebel festgedrückt, und das Gewicht auf demselben so lange ver[...]oben, bis die eingeschlossene Luft es gerade zu heben imstande war. [...] der ersten Methode dehnten Oersted und Schwendsen ihre Versuche [...] zu einem Drucke von 8, mit der letztern bis auf 68 Atmosphären aus. [...] schlossen aus ihren Versuchen, dafs für Luft das Mariottesche Gesetz [...] zu diesen Drucken strenge gültig sei; bei der unvermeidlichen Un[...]auigkeit der letztern Methode darf man daraus jedoch nur schliefsen, [...] es mit grofser Annäherung unter so hohen Drucken noch besteht.

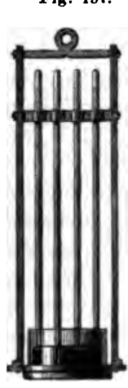
Für andere Gase als die atmosphärische Luft fanden die genannten Phy[...]r das Gesetz jedoch nicht bestätigt, besonders wenn die Gase durch Kom[...]sion flüssig zu machen sind. Sie fanden z. B., dafs sich schweflige Säure [...] zu einem Drucke von zwei Atmosphären gerade so verhielt wie atmosphä[...]he Luft, dafs aber bei höheren Drucken das Gas stärker komprimiert [...]de.

Gleiche Resultate erzielten die Versuche von Despretz[5]). Er brachte [...]rere graduierte oben geschlossene Röhren, deren eine Luft, die übrigen [...]re Gase enthielten, in einen Oerstedschen Kompressionsapparat (Fig. 70 [...]), nachdem er die offenen Enden der Röhren in ein Gefäfs mit Queck-

[1]) *Musschenbroek*, Cours de physique. Paris 1759. Tome III.
[2]) *Sulzer*, Mémoires de Berlin 1753.
[3]) *Robison*, System of Mech. Phil. III.
[4]) *Oersted* und *Schwendsen*, Edinburgh Journal of science. Vol. IV. p. 224.
[5]) *Despretz*, Annales de chim. et de phys. Tom. XXXIV.

silber eingesetzt hatte (Fig. 157). Bei einer Kompression des Wasse dem Apparate wurde auch das Gas der Röhren komprimiert. Der D war in dem ganzen Apparate derselbe, und da die Röhren alle ein gle Volumen hatten und dafür gesorgt war, dafs das Nivea Quecksilbers beim Beginne des Versuches in allen R gleich war, so hätte es auch in allen Röhren dasselbe bl müssen, wenn die Gase alle dem Mariotteschen Gesetze fol Es war das jedoch nicht der Fall, als die eine Röhre atmo rische Luft, die zweite Ammoniakgas, die dritte Sch wasserstoff und die vierte Cyangas enthielt. Das Vol dieser Gase nahm schon bei einem Drucke, welcher gröfser war als der zweier Atmosphären, schneller al die Drucke zunahmen, schneller, als das Volumen der sphärischen Luft abnahm.

Fig. 157.



Despretz schlofs ferner, dafs Wasserstoffgas und sphärische Luft bis zu einem Drucke von 15 Atmosp dem Mariotteschen Gesetze folgen, dafs aber bei einem D von 20 Atmosphären und darüber die Luft stärker zusan gedrückt werde, als das Gesetz von Mariotte es verlang

Durch Despretzs Versuche wurde also die exakte Gültigkeit de setzes von Mariotte auch für atmosphärische Luft wieder in Frage ge deshalb nahmen auf Aufforderung der französischen Akademie Arag Dulong[1]) die Frage wieder auf.

Dieselben verfolgten mit ihren Versuchen die Kompression der sphärischen Luft bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären nach Methode, die sich im Principe durchaus nicht von der Mariottes schied; die aber durch die Sorgfalt, mit welcher die einzelnen des Apparates gearbeitet waren, und die Genauigkeit, mit welcher Physiker beobachteten, Resultate ergab, welche das höchste Vertraue dienen. Die zu komprimierende Luft war in einer sorgfältig ausgeme Röhre von $1^m,70$ Länge und 5^{mm} lichtem Durchmesser eingeschlossen. Röhre war von einem weitern Cylinder umgeben, durch welchen konti lich Wasser derselben Temperatur hindurchlief, um die in der Röhr geschlossene Luft auf konstanter Temperatur zu erhalten. Die mit Röhre kommunicierende offene Röhre hatte eine Länge von 27 Meter. V der nähern Details der Apparate und der einzelnen Vorsichtsmafsr welche diese Physiker anwandten, müssen wir auf die Originalabhan verweisen.

Dulong und Arago unternahmen drei Versuchsreihen; in jede selben wurde der kurze geschlossene Schenkel ihrer Röhre mit Luft dem Drucke der Atmosphäre angefüllt, und diese dann immer stärke primiert. Nach jeder Erhöhung des Druckes wurde das Volumen d geschlossenen Luft und die Niveaudifferenz des Quecksilbers in d schlossenen und offenen Röhre gemessen. Bei jeder Versuchsreihe der Druck bis auf 27 Atmosphären verstärkt. Folgende Tabelle die von ihnen erhaltenen Zahlen in einer Versuchsreihe, bei der die

[1]) Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. p. 193 ff.

ır genau auf 13° erhalten war. Die erste Kolumne enthält den Druck llimeter Quecksilberhöhe, die zweite das Volumen der Luft in der lossenen Röhre, die dritte das Volumen berechnet nach dem Mariotte-Gesetze von dem Anfangsvolumen und dem Anfangsdrucke aus, und erte endlich die Unterschiede zwischen dem so berechneten und dem chteten Volumen.

Tabelle der von Dulong und Arago erhaltenen Zahlen.

Druck in mm. Quecksilber	Beobachtetes Volumen	Berechnetes Volumen	Differenz
mm 760,00	501,3	—	—
3612,48	105,247	105,470	0,230
3757,18	101,216	101,412	0,206
4625,18	82,286	82,380	0,094
5000,78	76,095	76,198	0,103
5737,38	66,216	66,417	0,201
8596,23	44,008	44,320	0,312
9992,36	37,851	38,132	0,281
12620,00	30,119	30,192	0,073
13245,06	28,664	28,770	0,106
14667,36	25,885	25,978	0,093
16534,9	22,968	23,044	0,076
16584,4	22,879	22,972	0,093
18438,5	20,547	20,665	0,118
20236,6	18,833	18,872	0,039
20498,6	18,525	18,588	0,063

Vergleicht man die beobachteten mit den berechneten Zahlen, so findet lieselben sehr nahe gleich. Man mufs daraus schliefsen, dafs die che Kompression der Luft, wenn überhaupt, sich nur sehr wenig von ıch dem Mariotteschen Gesetze berechneten unterscheidet. Mehr darf edoch daraus nicht schliefsen, da die Unterschiede nicht gleich Null und da die beobachteten Volumina immer kleiner sind als das berech-Volumen. Es kann das seinen Grund haben entweder in der nicht ommenen Richtigkeit des Gesetzes oder auch in Ungenauigkeiten der ngen. Die Art der Abweichungen spricht jedoch für das Erstere.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, ist man niemals ıde, ganz vollkommene Messungen zu machen; wenn die Abweichungen ıen den Beobachtungen und den nach einem vermuteten Gesetze an-lten Berechnungen nur sehr klein sind, so ist man zu der Annahme ıtigt, dafs die Unterschiede gleich Null sein würden, wenn die ngen ganz vollkommen wären, und dann auf die Richtigkeit des Ge-zu schliefsen. Indes wird in dem Falle der Unterschied zwischen chtung und Rechnung bald positiv, bald negativ sein, das heifst, bald die beobachtete, bald die sich aus den Rechnungen ergebende Zahl r sein, da es ebenso wahrscheinlich ist, dafs die unvermeidlichen chtungsfehler, bei einer sonst richtigen Methode, die Resultate ver-

gröfsern als verkleinern. Abweichungen, welche immer in demselben Sinne erfolgen, und seien sie auch noch klein, lassen entweder einen konstanten Fehler in der Methode oder eine Ungenauigkeit des Gesetzes vermuten. Da ersterer nun nicht aufzufinden ist, so dürfen wir durch diese Versuche das Gesetz nicht als bewiesen ansehen; müssen vielmehr annehmen, dafs die sich zeigenden Abweichungen zum Teil allerdings in den Beobachtungsfehlern, zum Teil jedoch in einer Ungenauigkeit des Mariotteschen Gesetzes ihren Grund haben.

Arago und Dulong schlossen anders; sie glaubten, wie man überhaupt im Anfange dieses Jahrhunderts geneigt war anzunehmen, dafs die Naturerscheinungen einfachen Gesetzen folgen, dafs der mathematische Ausdruck derselben stets wenig kompliciert sein müsse. Deshalb übersahen diese Physiker es, dafs die Abweichungen stets in demselben Sinne stattfanden, und hielten bei der geringen Gröfse der Unterschiede das Gesetz für bewiesen.

Arago und Dulong konnten ihre Versuche nicht über andere Gase als die atmosphärische Luft ausdehnen, da die französische Regierung ihnen die Benutzung der Gebäude entzog, in denen ihre Apparate aufgestellt waren.

Diese Lücke suchte Pouillet[1]) auszufüllen. Pouillet nahm für die Luft nach den vorhergegangenen Versuchen das Mariottesche Gesetz als richtig an, und verglich mit den Kompressionen der Luft jene der andern Gase. Seine Versuchsmethode war derjenigen von Despretz ähnlich; die Röhren in welchen er die Gase komprimierte, hatten eine Länge von zwei Meter.

Die Resultate Pouillets sind folgende:

1) Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Stickoxyd und Kohlenoxydgas folgen bis zu 100 Atmosphären dem Kompressionsgesetz der atmosphärischen Luft.

2) Die Gase, schweflige Säure, Ammoniak, Kohlensäure und Stickoxydulgas, welche bei relativ geringen Drucken schon in die tropfbar flüssige Form übergehen, werden merklich stärker komprimiert als die atmospärische Luft, sobald ihr Volumen auf $1/3$ oder $1/4$ komprimiert ist.

3) Das Gleiche gilt für leichtes und schweres Kohlenwasserstoffgas, welche bei einem Drucke von 100 Atmosphären noch nicht flüssig werden.

Folgende Tabelle enthält die von Pouillet mitgeteilten Resultate. Die erste Kolumne enthält die Drucke, die zweite die theoretischen Volumina, die folgenden die Quotienten $\frac{v'}{v}$ der beobachteten Volumina v' und der theoretischen v für die darüber stehenden Gase.

Lange Zeit nahm man mit Arago und Dulong an, dafs die atmosphärische Luft so wie Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff dem Mariotteschen Gesetze vollständig folgen, bis Regnault die Frage 1845 wieder aufnahm. Er war durch gewisse Erscheinungen beim Ausdehnen der Gase durch die Wärme auf die Vermutung geführt worden, dafs das Gesetz von Mariotte auch für diese Gase nur ein annähernd richtiges sei. Da nun das Gesetz über die Kompression der Gase ein Fundamentalgesetz der Physik ist, indem es in fast alle Bestimmungen über die Gase eingeht, so stellte Regnault eine Reihe neuer Versuche über diesen Punkt an[2]).

---

[1]) *Pouillet*, Éléments de Physique. 4. édit. Tome I. p. 327.

[2]) Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. T. XXI. p. 32[illegible]

in - n	Theoretisches Volumen v	$\frac{v'}{v}$ Kohlensäure	$\frac{v'}{v}$ Stickoxydul	$\frac{v'}{v}$ Leichtes Kohlenwasserstoffgas	$\frac{v'}{v}$ Schweres Kohlenwasserstoffgas
	1,00	1,000	1,000	1,000	1,000
	0,50	1,000	0,996	0,998	0,994
	0,25	1,000	0,988	0,995	0,989
	0,20	0,989	0,983	0,992	0,986
7	0,15	0,980	0,971	0,989	0,983
	0,10	0,965	0,956	0,981	0,972
3	0,065	0,934	0,923	0,949	0,962
	0,050	0,919	0,896	0,956	0,955
	0,040	0,880	0,849	0,951	0,948
	0,030	0,808	0,787	0,951	0,931
	0,025	0,739	0,732	0,940	0,919
	0,020	—	—	0,907	0,899
	0,012	—	—	—	0,850

Apparate, welche Regnault anwandte, waren im wesentlichen die-
welche auch Arago und Dulong angewandt hatten, auch er benutzte
hode von Mariotte, ein abgeschlossenes Gasvolumen durch Queck-
ilen zusammendrücken zu lassen, und mafs dann zugleich das Vo-
les Gases und den zugehörigen Druck.

ne Verbesserung der Methode liefs jedoch eine bedeutend gröfsere
keit in den Messungen erzielen.

ago und Dulong waren bei ihren Versuchen stets davon ausgegangen,
e geschlossene Röhre mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre
n und diese nach und nach bis zu einem Drucke von 27 Atmo-
zusammen zu pressen. Da nun das Anfangsvolumen des Gases
em Drucke einer Atmosphäre gleich 1 war, so war es unter dem
von 5 Atmosphären nur $^1/_5$, bei 10 nur $^1/_{10}$, bei 20 nur $^1/_{20}$ u. s. f.
le bei den hohen Drucken das Volumen sehr klein und dadurch war
öglich, es mit der gröfsten Genauigkeit auszumessen, besonders
an beachtet, dafs es äufserst schwierig ist, das Volumen der ein-
Teile der Röhre genau zu erhalten, und dafs der Meniskus des
bers nicht genau seine Gestalt beibehält.

sich hieraus unvermeidlich ergebenden Ungenauigkeiten der Messung
Regnault folgendermafsen:

ne Glasröhre von 8—10 Millimeter lichtem Durchmesser und 3 Meter
wurde vertikal aufgestellt. Die Röhre, an ihrem obern Ende durch
ahn verschlossen, kommunicierte an ihrem untern Ende mit einer
vertikal aufgestellten, oben offenen Röhre von 36 Meter Länge,
die Quecksilbersäule enthielt, welche das in der ersten Röhre ab-
sene Gas zusammendrücken sollte. Auf der oben verschlossenen
von drei Meter Länge waren zwei Marken gezogen, die eine an
ntern Ende, welche das Volumen der ganzen Röhre bestimmte, in-
Anfang jedes Versuches dafür gesorgt war, dafs das Quecksilber

in dieser Röhre bis zu dieser Marke stand; die zweite Marke war in der Mitte der Röhre gezogen, so dafs sie genau das halbe Volumen der Röhre von ihrem obern Ende bis zur untern Marke bestimmte.

Man füllt nun zunächst die Röhre mit trockener Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre bis zur untern Marke, dann drückt man, indem man die Quecksilbersäule in der langen Röhre verlängert, die Luft so weit zusammen, bis sie gerade das halbe Volumen annimmt, bis also das Quecksilber in der verschlossenen Röhre bei der zweiten Marke steht. Ist das Mariottesche Gesetz genau richtig, so mufs jetzt die Höhe der Quecksilbersäule in der offenen Röhre über der in der verschlossenen genau die Höhe des Barometer sein, der Druck mufs genau gleich zwei Atmosphären sein.

Man füllt nun zu einem zweiten Versuche die ganze geschlossene Röhre bis zur untern Marke mit trockner Luft unter dem Drucke zweier Atmosphären und komprimiert wieder auf die Hälfte; der Druck mufs dann gleich vier Atmosphären sein.

Füllt man dann das Volumen 1 mit trockner Luft unter dem Drucke von vier Atmosphären und komprimiert diese auf das Volumen $^1/_2$, so mufs jetzt der Druck acht Atmosphären sein u. s. f.

Kurz, man untersucht auf diese Weise, ob der Druck, der ein Volumen Luft, welches unter dem Drucke h steht, auf die Hälfte reduciert, gleich $2h$ ist. Die Gasvolumina sind bei diesen Versuchen stets sehr grofs und deshalb der genauesten Messung fähig.

Wegen der Einzelnheiten des Apparates und der Vorsichtsmafsregeln bei den Messungen müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen, nur müssen wir kurz erwähnen, wie die geschlossene Röhre mit Luft unter höheren Drucken angefüllt wurde. Die Röhre kommunicierte mittels des an ihrem obern Ende befindlichen Hahnes mit einer Pumpe, durch welche man bei geöffnetem Hahn Luft in die Röhre pumpen konnte. Man füllte auf diese Weise die Röhre bis zur untern Marke mit Luft an und bestimmte den Druck, unter welchem die Luft sich befand, aus der Höhe der Quecksilbersäule in der langen Röhre. Man hatte es auf diese Weise in der Hand, die Röhre, in welcher das Gas komprimiert wurde, bis zur untern Marke mit Luft unter beliebigem Drucke anzufüllen.

Um zu zeigen, wie Regnault aus diesen Versuchen die Resultate erhielt, wollen wir zunächst eine Versuchsreihe mit atmosphärischer Luft folgen lassen, bei welcher das Volumen 1 mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre angefüllt wurde. Die geschlossene Röhre kommunicierte beim Beginne des Versuches frei mit der atmosphärischen Luft; als sie bis zur untern Marke mit Luft angefüllt war, wurde der Hahn geschlossen und durch Einfüllen des Quecksilbers in die lange Röhre das Volumen möglichst genau auf $^1/_2$ reduciert.

Kolumne 1 enthält die Volumina V_0 und V_1 beim Beginne des Versuches und nach der Kompression, Kolumne 2 die entsprechenden Drucke [illegible] Millimeter Quecksilberhöhe, Kolumne 3 die Temperaturen der Luft, [illegible]ne 4 das Verhältnis der Volumina $\frac{V_0}{V_1}$, Kolumne 5 das Verhältnis [illegible] Kolumne 6 das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$.

Volumina V_0 und V_1	Drucke P_0 und P_1	Temperatur °C.	$\frac{V_0}{V_1}$	$\frac{P_1}{P_0}$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$
1939,69 969,26	738,72 1476,25	4,44	2,001 215	1,998 389	1,001 414
1939,69 969,86	738,99 1475,82	4,40	1,999 990	1,997 076	1,001 448
1940,21 970,10	739,07 1476,34	4,40	2,000 010	1,997 565	1,001 224
1939,47 969,39	739,19 1476,80	4,43	2,000 701	1,997 863	1,001 421

Wäre das Mariottesche Gesetz genau richtig, so müfsten die in einer Horizontalreihe befindlichen Zahlen der Kolumnen 4 und 5 genau gleich sein, da nach dem Mariotteschen Gesetz

$$V_0 : V_1 = P_1 : P_0;$$

und da ebenso

$$V_0 \cdot P_0 = V_1 \cdot P_1,$$

so müfsten die Zahlen der letzten Kolumne gleich 1 sein.

Man sieht aber, während $\frac{V_0}{V_1}$ fast genau gleich 2 ist, dafs $\frac{P_1}{P_0}$ stets kleiner als 2 und somit $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} > 1$ ist.

Es folgt also aus diesen Versuchen, dafs die atmosphärische Luft schon bei einer Druckdifferenz von einer Atmosphäre von dem Gesetze Mariottes abweicht. Gleiches fand Regnault bei allen übrigen Gasen.

In der folgenden Tabelle sind die von Regnault erhaltenen Zahlen für atmosphärische Luft, Stickgas, Kohlensäure und Wasserstoffgas zusammengestellt.

Für jedes Gas sind zwei Kolumnen verzeichnet; die erste enthält die Drucke P_0 beim Beginne der Versuche, die zweite das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$, wo V_1 stets fast genau $\frac{1}{2}$ V_0 war und P_1 der dem Volumen V_1 entsprechende Druck ist.

Tabelle von Regnaults Versuchen über die Kompression der Gase.

Luft		Stickstoff		Kohlensäure		Wasserstoff	
P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$
738,72	1,001 414	753,62	1,000 788	764,03	1,007 725	—	—
2112,53	1,002 765	1159,26	1,000 996	1414,77	1,012 313	—	—
4140,82	1,003 090	2159,60	1,001 381	2164,81	1,018 973	2211,18	0,998 584
19,22	1,003 495	3030,22	1,001 955	3186,13	1,028 494	3989,47	0,996 961
70,15	1,004 286	4953,92	1,002 860	4879,77	1,045 625	5845,18	0,996 121
36,41	1,006 366	5957,96	1,003 271	6820,22	1,066 137	7074,96	0,994 697
		7297,06	1,003 924	8393,68	1,084 278	—	—
		8628,54	1,004 768	9620,06	1,099 830	9175,25	0,993 126
		9775,38	1,004 881			10361,78	0,992 327
		10981,42	1,006 456				

Man sieht, dafs bei diesen vier untersuchten Gasen das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ nur sehr wenig von der Einheit abweicht, so dafs also das Mariottesche Gesetz, wenn es auch nicht genau richtig ist, doch nur wenig von der Wahrheit abweicht. Wir werden es deshalb in den meisten Fällen als richtig annehmen dürfen, ohne fürchten zu müssen, grofse oder auch nur merkliche Ungenauigkeiten zu erhalten, besonders da wir in den meisten Fällen nur kleinere Drucke anzuwenden haben, und wie die Tabelle zeigt, für Drucke, welche nur wenig von dem der Atmosphäre verschieden sind, das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ sich der Einheit immer mehr nähert.

Bei aufmerksamer Betrachtung jener Tabelle findet man, dafs die drei ersten Gase, Luft, Stickstoff, Kohlensäure, alle in demselben Sinne von dem Mariotteschen Gesetze abweichen, dafs bei allen $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} > 1$, also bei allen das Volumen in rascherem Verhältnisse abnimmt, als der Druck wächst, oder das beobachtete Volumen V_1 kleiner ist, als es nach dem Mariotteschen Gesetze sein sollte. Dasselbe Resultat enthielten schon die Versuche von Arago und Dulong. Die neuen Versuche indes zeigen weiter, dafs das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ wächst, wenn der anfängliche Druck, unter dem das dem Versuche unterworfene Gas steht, gröfser ist, dafs also die Abweichungen zwischen dem wirklichen Verhalten der Gase und dem Mariotteschen Gesetze um so gröfser werden, je mehr die Zusammendrückung des Gases wächst. Wenn nun auch die Regelmäfsigkeit dieser Zahlen auf das entschiedenste dafür spricht, dafs die beobachteten Abweichungen nicht Folge der Beobachtungsfehler sind, sondern einer Ungenauigkeit des Gesetzes zugeschrieben werden müssen, so ist es doch gut, nachzuweisen, dafs sie gröfser sind als die Beobachtungsfehler, welche wir annehmen dürfen. Sei deshalb der beobachtete Wert

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \alpha,$$

und nehmen wir V_1 genau $= \frac{1}{2} V_0$, so ist

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \frac{2 \cdot P_0}{P_1} = \alpha,$$

oder

$$\frac{2 \cdot P_0}{\alpha} = P_1.$$

Wäre nun das Mariottesche Gesetz genau richtig, so müfste

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1'} = \frac{2 P_0}{P_1'} = 1,$$

oder

$$P_1' = 2 P_0$$

sein. Der Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung ist demnach

$$P_1' - P_1 = 2 P_0 - 2 \frac{P_0}{\alpha} = 2 P_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Dieser Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung läfst sich nun rechnen, wenn wir in diesen Ausdruck die Werte P_0 und α unserer Tabelle einsetzen, man erhält dann den Unterschied in der Höhe der Quecksilbersäulen, wie sie beobachtet wurden, und wie sie nach dem Gesetze von Mariotte hätten sein sollen. Für Luft erhalten wir dann

P_0	$P'_1 - P_1$
738mm,72	2mm,08
2112 53	11 65
4140 82	25 50
4219 05	29 36
6770 15	57 68
9336 41	118 01.

Diese Differenzen sind offenbar zu grofs, als dafs man sie den Beobachtungsfehlern zuschreiben könnte. Das Mariottesche Gesetz ist demnach nicht strenge richtig, wenn auch die Abweichungen so unbedeutend sind, dafs wir sie im allgemeinen nicht zu beachten haben werden.

Stickstoff, Kohlensäure und Sauerstoff verhalten sich wie atmosphärische Luft, sie werden stärker zusammengedrückt, als das Mariottesche Gesetz verlangt. Sie bilden also mit den von Despretz und Pouillet untersuchten Gasen, Ammoniak, schweflige Säure, Cyan u. s. f. eine Gruppe; diese Gase besitzen eine Zusammendrückbarkeit, welche mit dem äufsern Drucke zunimmt.

Anders jedoch das Wasserstoffgas; für dieses ist das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ stets kleiner als 1. Dieses Gas wird also bei steigenden Drucken weniger stark zusammengedrückt, V_1 nimmt nicht in demselben Verhältnisse ab, wie P_1 wächst; und da bei immer gröfsern Anfangsdrucken der Wert $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ immer kleiner wird, so folgt, dafs mit wachsendem Drucke die Kompressibilität abnimmt.

Folgende Tabelle, welche Zahlen enthält, welche Regnault aus seinen Versuchen berechnete, zeigt, wie die Kompressibilität wächst bei den drei ersten und abnimmt bei dem letzten Gase. Sie gibt die Drucke an, welche erforderlich sind, um ein Gas, welches unter dem Drucke 1 Meter Quecksilber das Volumen 1 hat, auf $^1/_2$, $^1/_4 \cdots$ zu komprimieren.

Volum[illegible]	Luft		Kohlensäure		Stickgas		Wasserstoff	
	Druck	Differenz	Druck	Differenz	Druck	Differenz	Druck	Differenz
	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter
[illegible]	1,0000	+ 0,0000	1,0000	+ 0,0000	1,0000	+ 0,0000	1,0000	— 0,0000
[illegible]	1,9978	+ 0,0022	1,9829	+ 0,0171	1,9986	+ 0,0014	2,0011	— 0,0011
[illegible]	3,9874	+ 0,0126	3,8973	+ 0,1026	3,9919	+ 0,0081	4,0068	— 0,0068
[illegible]	7,9456	+ 0,0543	7,5193	+ 0,4807	7,9641	+ 0,0359	8,0339	— 0,0339
[illegible]	9,9162	+ 0,0838	9,2262	+ 0,7738	9,9435	+ 0,0565	10,0560	— 0,0560
[illegible]	11,8823	+ 0,1177	10,8632	+ 1,1368	11,9191	+ 0,0809	12,0844	— 0,0844
[illegible]	15,8044	+ 0,1956	13,9260	+ 2,0740	15,8597	+ 0,1403	16,1616	— 0,1616
[illegible]	19,7198	+ 0,2801	16,7054	+ 3,2946	19,7885	+ 0,2115	20,2687	— 0,2867

Um diese Erscheinungen zusammenzufassen, kann man sich ein Gas denken, welches genau dem Mariotteschen Gesetze folgt und welches die Grenze bildet zwischen den beiden Gruppen, deren eine, Luft, Stickgas, Kohlensäure, stärker komprimiert wird, deren andere, allein durch den Wasserstoff repräsentiert, jedoch in geringerm Grade zusammengedrückt wird als jenes angenommene Gas. Das Mariottesche Gesetz ist demnach ein Gesetz, dem sich die verschiedenen Gase mehr oder weniger annähern. Die Abweichungen hängen ab von der Natur des Gases, von den anfänglichen Drucken und andern Umständen; in welcher Weise jedoch die Differenz zwischen dem beobachteten Werte von $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ und dem theoretischen Werte, der gleich 1 ist, oder

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} - 1 = \beta$$

von diesen Umständen abhängt, läfst sich bisher nicht bestimmen.

Man kann indes aus den Beobachtungen in übersichtlicher Weise eine die Abweichungen der Gase vom Mariotteschen Gesetz darstellende Interpolationsformel ableiten. Für eine gegebene Gasmenge hat das Produkt PV für jeden Druck oder auch für jedes Volumen einen bestimmten Wert, und nach dem Mariotteschen Gesetz sollte dieses Produkt für jeden Druck oder jedes Volumen denselben Wert haben. Die Abweichung der Gase von diesem Gesetz besteht nun darin, dafs mit steigendem Druck oder abnehmendem Volumen dieses Produkt kleiner wird; man kann dieselbe deshalb darstellen, indem man die Veränderung dieses Produktes durch eine Gleichung wiedergibt, welche die Abhängigkeit desselben von dem Drucke P oder dem Volumen V ausdrückt. Gehen wir von irgend einem Drucke P_0 aus und nennen das zugehörige Volumen V_0, so können wir entweder setzen

$$\frac{PV}{P_0 V_0} = 1 - A\left(\frac{V_0}{V} - 1\right) + B\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2 \cdots\cdots$$

oder auch

$$\frac{PV}{P_0 V_0} = 1 - A_1\left(\frac{P}{P_0} - 1\right) + B_1\left(\frac{P}{P_0} - 1\right)^2 \cdots\cdots \text{I}$$

Dafs wir in den Klammern den Überschufs der betreffenden Quotienten über 1 setzen müssen, erkennt man daraus, dafs für $V = V_0$ oder $P = P_0$ die Quotienten auf der linken Seite der Gleichung gleich 1 werden müssen.

Man erkennt weiter leicht, dafs in der ersten Formel V im Nenner, in der zweiten P im Zähler stehen mufs, da die Abweichungen der Gase vom Mariotteschen Gesetze um so gröfser werden, je kleiner das Volumen oder je gröfser der Druck wird. Setzen wir $P_0 = 1$, etwa 1 Meter Quecksilber und V_0 ebenfalls gleich 1, nehmen also etwa an, dafs sich unsere Werte auf 1 Liter Gas unter dem Drucke 1 Meter Quecksilber beziehen, so können wir obige Formeln schreiben

$$PV = 1 - A\left(\frac{1}{V} - 1\right) + B\left(\frac{1}{V} - 1\right)^2 \cdots\cdots \text{Ia}$$

$$PV = 1 - A_1 (P - 1) + B_1 (P - 1)^2 \cdots\cdots \text{IIa}$$

Die erste Form der Interpolationsgleichung wurde von Regnault selbst

benutzt[1]), während Jochmann[2]) und Schröder van der Kolk[3]) die zweite wählten. Der letztere zeigte, dafs für keines der untersuchten Gase sich alle beobachteten Werte von PV mit der von Regnault bei seinen Beobachtungen angenommenen Genauigkeit mit einem Paare von Konstanten darstellen liefs, er benutzte deshalb die Gleichung nur für kleinere Intervalle. Wir begnügen uns indes hier damit, die von Regnault aus seinen Beobachtungen abgeleiteten Konstanten anzuführen, da wir doch noch im § 102 und später in der Wärmelehre auf diese Rechnungen zurückkommen müssen.

Die durch ihre Logarithmen gegebenen Konstanten für die vier von Regnault untersuchten Gase sind:

Luft	$\log A = 0{,}043\,5120 - 3$	$\log B = 0{,}287\,3751 - 5$
Stickstoff . . .	$\log A = 0{,}838\,9375 - 4$	$\log B = 0{,}847\,6020 - 6$
Kohlensäure . .	$\log A = 0{,}931\,0399 - 3$	$\log B = 0{,}862\,4721 - 6$
Wasserstoff . .	$\log A = 0{,}738\,1736 - 4$	$\log B = 0{,}925\,0787 - 6.$

Für den Wasserstoff ist zu beachten, dafs PV stets gröfser als 1 ist, es ist deshalb in der Gleichung das zweite Glied positiv zu setzen. Die Konstanten leitete Regnault aus den für 8^m und für 16^m Druck beobachteten Werte von PV ab.

Später hat Regnault[4]) noch einige andere Gase bis zu einem Drucke von etwa 8 Atmosphären untersucht. Die von ihm für dieselben berechneten Interpolationsformeln haben die Gestalt

$$\frac{V_0 \cdot 0{,}76}{V \cdot P} = 1 - A\,(P - 0{,}76) - B\,(P - 0{,}76)^2,$$

wenn die Drucke ebenfalls in Meter Quecksilber gegeben sind. Die Logarithmen der Konstanten haben folgende Werte:

Sauerstoff . . .	$\log A = 0{,}269\,9060 - 3$	$\log B = 0{,}664\,6643 - 5$
Kohlenoxyd . .	$\log A = 0{,}780\,5656 - 3$	$\log B = 0{,}848\,9327 - 4$
Stickoxydul . .	$\log A = 0{,}814\,6743 - 3$	$\log B = 0{,}667\,0487 - 4$
Stickoxyd . . .	$\log A = 0{,}446\,5181 - 3$	$\log B = 0{,}439\,5015 - 4.$

In der Gleichung für Stickoxydul ist B negativ, also das dritte Glied positiv zu setzen.

Für eine Anzahl anderer Gase hat Regnault das Verhalten gegenüber dem Mariotteschen Gesetze bis zu einem Drucke von zwei Atmosphären verfolgt. Folgende Tabelle enthält die Resultate; in dieselbe sind auch die früher erwähnten Gase aufgenommen, sie ist geordnet nach dem Grade, in welchem die Gase vom Mariotteschen Gesetze abweichen, die Abweichung ist um so gröfser, je gröfser der Quotient $\frac{P_0 V_0}{P \cdot V}$ ist. Die Zahlen gelten für eine Temperatur von $7^0{,}9$ C.

	P_0	P	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P_0 \cdot V_0}{P \cdot V}$
Luft	702,78	1457,61	2,074	1,002 15
Stickoxyd	720,08	1416,33	1,967	1,002 85
Kohlenoxyd	703,18	1457,28	2,072	1,002 93

---

1) *Regnault*, Mémoires de l'Acad. T. XXI. p. 418 ff.
2) *Jochmann*, Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik etc. Bd. V. p. 101.
3) *Schröder van der Kolk*, Poggend. Ann. Bd. CXVI.
4) *Regnault*, Mémoires de l'Acad. T. XXVI. p. 299 ff.

	P_0	P	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P_0 \cdot V_0}{P \cdot V}$
Grubengas	706,53	1383,73	1,958	1,006 34
Stickoxydul	703,10	1448,63	2,060	1,006 51
Kohlensäure	774,03	1550,63	2,003	1,007 22
Chlorwasserstoff . .	708,93	1460,03	2,059	1,009 25
Schwefelwasserstoff	722,53	1409,93	1,951	1,010 83
Ammoniak	703,53	1435,33	2,040	1,018 81
Schweflige Säure	697,83	1341,58	1,922	1,020 88
Cyan	703,48	1428,58	2,031	1,023 53

Die Abweichungen vom Mariotteschen Gesetze, stets im Sinne ei stärkern Kompressibilität, sind zum Teil sehr beträchtlich, sie sind, wie später zeigen werden, im allgemeinen um so gröfser, je leichter die G zu Flüssigkeiten kondensiert werden.

§ 99.

Abweichung der Gase vom Mariotteschen Gesetze bei hoh Drucke. Die Regnaultschen Versuche ergeben uns das Verhalten der G von etwa 1 bis 30 Atmosphären. Sowohl für Drucke, welche kleiner als derjenige einer Atmosphäre, als für gröfsere Drucke hat er die G nicht verfolgt. Für erstere Drucke glaubte er, dafs die Beobachtungsfe zu grofs seien, um einige Sicherheit über das Verhalten der Gase erha zu können. Da indes die Gase nach Regnaults Beobachtungen mit stei dem Drucke immer weiter vom Mariotteschen Gesetze abweichen, n man an, dafs sie in ihrem Verhalten sich demselben um so mehr näh je kleiner der Druck wird.

Es sind nun in neuerer Zeit Versuche über das Verhalten der G bei Drucken, die kleiner sind als der Druck einer Atmosphäre, von Beobachtern durchgeführt worden, von Siljeström[1]), Mendelejeff[2]) Amagat[3]). Der erstere schliefst aus seinen Versuchen, dafs in der mit abnehmendem Drucke das Produkt aus Druck und Volumen stets nehme, dafs sich dasselbe aber nicht einer bestimmten Grenze annäh dafs also selbst bei grofser Verdünnung die Gase nicht dem Mariottes Gesetze folgen. Die Versuche von Siljeström sind indes von Mendel einer scharfen Kritik unterzogen, und da Siljeström selbst angibt, dafs von ihm beobachteten Abweichungen vom Mariotteschen Gesetze d Änderungen des beobachteten Druckes verschwinden, die im allgeme kleiner sind als die von ihm zugegebenen Beobachtungsfehler der einze Beobachtungen, so kann man trotz der zahlreichen Versuche, die Siljeström angestellt sind, seine Folgerungen nicht für begründet halte

Mendelejeff kommt bei seinen mit Kirpitschoff angestellten Versuche dem entgegengesetzten Resultate; er findet, dafs, wenn man von dem Dr einer Atmosphäre aus den Druck des Gases vermindert, das Produkt wieder abnimmt, so dafs dasselbe also bei dem Druck einer Atmosp

---

[1]) *Siljeström*, Poggend. Ann. Bd. CLI.
[2]) *Mendelejeff*, Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft Bd. pp. 486. 1339.
[3]) *Amagat*, C. R. T. LXXXII. p. 914.

aximum hätte. Mir sind bisher nur die vorläufigen von Mendelejeff
Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft veröffentlichten
ate bekannt; die dort mitgeteilten Zahlen zeigen indes bei kleinen
en eine derartige Abnahme des Produktes PV, daſs man an der
gkeit derselben zweifeln muſs. Bezogen auf das Produkt PV bei
Druck als Einheit erhält Mendelejeff bei 51,628^{mm} 0,993 06, bei
^{mm} schon 0,971 14 und bei 14,555^{mm} gar nur 0,965 51. So lange
nicht die vollständige Arbeit von Mendelejeff und Kirpitschoff vor-
kann ich die vorläufigen Resultate nicht für richtig halten.

afür sprechen auch die Versuche von Amagat; derselbe findet, daſs
einen Drucken die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, oder
ur so wenig von demselben abweichen, daſs die Abweichungen durch
vermeidlichen Beobachtungsfehler verdeckt werden. Das von Amagat
nen Versuchen benutzte Verfahren war folgendes. Zwei Kugeln dick-
gen Glases, jede von etwas mehr als 100^{kc} Inhalt, waren durch ein
Rohr mit einander verbunden. An der untern befand sich ein langes
welches in ein tiefes, auf und nieder verstellbares Gefäſs mit Queck-
tauchte. Die obere Kugel trug ein Ansatzrohr, welches durch einen
ig durchbohrten Hahn mit einer gegabelten Röhre in Verbindung
deren einer Arm zu einer Luftpumpe, deren anderer zu einem Mano-
führte.

Während nun das untere Ende des langen Rohres in Quecksilber
e, wurde aus den Kugeln die Luft ausgepumpt, bis das Quecksilber
eine Marke stieg, die sich an dem die beiden Kugeln verbindenden
Rohr befand, und dann am Manometer der Druck des noch in der
Kugel vorhandenen Gases abgelesen. Darauf wurde das Quecksilber-
so weit gesenkt, bis das Quecksilber aus der untern Kugel bis zu
n dem untern langen Rohr befindlichen Marke hinabsank, und wieder
ruck des jetzt nahezu auf das doppelte Volumen gebrachten Gases
sen.

ie beiden Kugeln befanden sich, um die Temperatur konstant zu er-
, in einem Wasserbade, und es schwankte infolge dessen die Tem-
r nur etwa um $^1/_{30}$ Grad.

ei sieben Versuchsreihen, bei denen die Temperaturen stets zwischen
d 12° waren, ergaben sich folgende Resultate:

Reihe	Zahl der Einzelversuche	Anfangsdruck P_0^{mm}	$\frac{PV}{P_0 V_0}$
1	5	6,541	1,0018
2	5	6,546	1,0035
3	8	10,499	1,0000
4	6	10,516	0,9998
5	6	10,552	1,0022
6	4	6,538	1,0011
7	7	6,536	1,0018

ie Abweichungen der Zahlen der letzten Reihe sind kleiner als die
hen Beobachtungsfehler, so daſs in der That diese Zahlen eine Ab-
ng der Luft vom Mariotteschen Gesetze nicht erkennen lassen. Wir
deshalb, bis weitere Versuche vorliegen, annehmen, daſs dem Ver-

halten der Gase in Drucken über 1 Atmosphäre entsprechend, di
weichung vom Mariotteschen Gesetze immer kleiner wird, je klein
Druck wird; oder die Gase nähern sich mit wachsender Verdünnu
ihrem Verhalten dem Gesetze mehr und mehr.

Wenn man die Gase stärkern als den von Regnault angew
Drucken unterwirft, so tritt bei der Mehrzahl, wie schon erwähnt
der Übergang in die flüssige Form ein, bei einigen, den sogenannte
manenten Gasen, Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlenoxy
nicht, wenigstens dann nicht, wenn man die Kompressionen bei der g
lichen Temperatur unserer Umgebung vornimmt. Wir beschränk
hier auf die Besprechung des Verhaltens der Gase bei gewöhnliche
peratur und werden erst im dritten Bande, wenn wir die Kontinui
flüssigen und gasförmigen Zustandes besprechen, auf das Verhalt
Gase in den verschiedenen Temperaturen zurückkommen.

Die Untersuchung des Verhaltens der permanenten Gase in weit
Drucken, bis zu 2000 Atmosphären, ist zuerst von Natterer[1]) vorgen
derselbe komprimierte die Gase in der Flasche seines § 110 beschr
Kompressionsapparates und mafs den Druck, ähnlich wie Oerst
Schwendsen bei ihren vorhin erwähnten Versuchen, indem er gegen
der Flasche angebrachtes Ventil einen Hebel wirken liefs und die G
bestimmte, welche den Hebel im Gleichgewicht hielten. Das kompr
Gas liefs er dann durch eine Röhrenleitung unter eine in einer pn
schen Wanne stehende Glocke treten, deren Kubikinhalt genau 10
grofs war als der Kubikinhalt der Flasche des Kompressionsap
Wenn nun die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, so mufs je
wenn die Glocke einmal aus der Flasche unter dem Drucke einer
sphäre gefüllt wird, der Druck um 10 Atmosphären abnehmen, si
Gase weniger kompressibel, als es das Mariottesche Gesetz verla
mufs der Druck bei jeder Füllung der Glocke um mehr als 10 Atmos
abnehmen und zwar um so mehr, je mehr die Gase in dem Sinne v
Gesetze abweichen. Es zeigte sich, dafs in hohen Drucken die
abnahme bis zu mehr als dem 10fachen wuchs; als Stickstoff z. B.
2790 Atmosphären komprimiert war, sank bei dem ersten Austret
10 Volumen Gas der Druck um 136, dann um 132 Atmosphären, e
der Druck auf 75 Atmosphären herabgegangen war, nahm er für jed
Volume heraustretenden Gases um 10 Atmosphären ab.

Indem Natterer in dieser Weise die Flasche allmählich entleer
nach jedesmaligem Ausfliefsen von 10 Volumen den Druck beoba
liefs sich auch rückwärts bestimmen, wieviel Volume Gas in der F
bei einem bestimmten Drucke komprimiert waren. Da nun der rec
Wert der in der Flasche enthaltenen Anzahl Volumina das Volum
in der Flasche unter dem Drucke einer Atmosphäre vorhandenen
angibt, so läfst sich auf diese Weise das Produkt $P \cdot V$ für jeden
angeben, jenes bei 1 Atmosphäre Druck gleich 1 gesetzt. In dieser
sind in folgender Tabelle einige von Natterers Angaben zusammeng
die erste der für jedes Gas angegebenen Kolumnen enthält die Dr

[1]) *Natterer*, Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. V. Bd. VI. B
Poggend. Ann. Bd. LXII. Bd. XCIV. Die hier angeführten Versuche find
P. A. Bd. XCIV.

Atmosphären, die zweite die Anzahl der in der Flasche unter diesen cken komprimierten Volumina der Gase, deren reciproker Wert das men jener Gasmenge ist, welche unter dem Drucke einer Atmosphäre lasche ausfüllt, die dritte Kolumne enthält den Quotienten $\frac{P_0 V_0}{P \cdot V} = \frac{1}{PV}$, n Abweichung von der Einheit den Grad der Abweichung vom Mariotte- Gesetze in derselben Weise angibt wie bei den Zahlen von Regnault.

Wasserstoff			Sauerstoff		
P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P \cdot V}$	P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{PV}$
2790	1008	0,3613	1354	657	0,4582
2347	958	0,4081	1106	617	0,5578
1781	848	0,4761	923	577	0,6251
1508	778	0,5159	764	537	0,7028
1259	708	0,5615	563	467	0,8294
1015	628	0,6187	463	417	0,9006
751	528	0,7030	370	347	0,9378
505	398	0,7881	276	267	0,9674
365	308	0,8438	243	237	0,9753
248	218	0,8790	210	207	0,9857
100	98	0,9800	188	187	0,9947
78	78	1,0000	177	177	1,0000

Stickstoff			Kohlenoxyd		
P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P \cdot V}$	P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{PV}$
2790	705	0,2527	2790	727	0,2606
2046	645	0,3152	2088	677	0,3242
1640	605	0,3680	1674	637	0,3805
1458	585	0,4012	1416	607	0,4286
1228	555	0,4519	1196	577	0,4824
1035	525	0,5072	1016	547	0,5383
801	475	0,5930	814	507	0,6228
600	415	0,6917	599	447	0,7462
403	335	0,8312	408	367	0,8999
206	195	0,9466	204	197	0,9657
107	105	0,9813	138	137	0,9928
85	85	1,0000	127	127	1,0000

Für geringere als die zuletzt in den Tabellen angegebenen Drucke er- Natterer für die Produkte $P \cdot V$ den Wert 1, da diese Methode selbst- ständlich nicht imstande ist, die kleinen Abweichungen der Gase vom otteschen Gesetze in geringeren Drucken erkennen zu lassen.

Die Versuche Natterers sind neuerdings wiederholt von Cailletet[1];

[1] Cailletet, Comptes Rendus T. LXX. p. 1131.

das von demselben angewandte Verfahren ist dem von demselben Physiker bei der Kompression der Flüssigkeiten benutzten ähnlich. Die Gase befanden sich in einer unten offenen und mit dem offenen Ende in Quecksilber tauchenden Gasröhre von etwa 50^{kc} Inhalt; an das obere Ende der Röhren war ein innen vergoldetes Kapillarrohr angesetzt, welches oben geschlossen war. Diese Vorrichtung war in einen mit Wasser angefüllten Kompressionsapparat gesetzt. Liefs man nun auf das Wasser den durch ein Desgoffesches Manometer (§ 64) gemessenen Druck wirken, so pflanzte sich derselbe auf das Quecksilber fort, und dieses stieg, wenn der Druck grofs genug war, in das kapillare Rohr und löste das Gold an den Wänden soweit auf, als es in das Rohr eingedrungen war. Der Raum des kapillaren Rohres, an dessen Wandung das Gold nicht aufgelöst war, gab dann das Volumen des komprimierten Gases, welches nach Beendigung der Kompression bestimmt wurde. Die von Cailletet auf diese Weise bei einer Temperatur von 15^0 erhaltenen Zahlen gibt folgende Tabelle, zusammengestellt mit den Zahlen von Natterer.

Druck in Atmosphären	$\frac{V_0 P_0}{VP}$ Wasserstoff		Luft	
	Cailletet	Natterer	Cailletet	Natterer
60	0,9810	—	1,0137	—
80	„	—	1,0118	—
100	0,9552	0,9800	1,0098	1,0000
200	0,9158	0,9050	0,9990	0,9502
300	0,8761	0,8600	0,9405	0,9200
400	0,8374	0,8312	0,8672	0,8628
605	0,7580	0,7533	0,7215	0,7185

Später hat Cailletet[1]) Messungen über die Kompressibilität des Stickstoffes angestellt, bei welchen er direkt die Höhe der drückenden Quecksilbersäule mafs. Die Einrichtung des Kompressionsgefäfses zeigt Fig. 158. In einer starken Röhre von Stahl, $1{,}8^m$ lang und 25^{mm} weit, befindet sich das oben in eine enge Röhre verlängerte mit dem Gase gefüllte Gefäfs R. Die Glasröhre ist wieder auf ihrer innern Seite vergoldet. Die Stahlröhre ist oben durch den eisernen Conus *D* und die Schraube *C* verschlossen; dieselbe ist vollständig mit Quecksilber gefüllt. An dem untern Ende ist die Stahlröhre, wie die Fig. zeigt, mit einer 3^{mm} weiten Röhre *TT* von weichem Stahl verbunden, welche eine Länge von 250^m hat, und welche um eine Holztrommel von 2^m Durchmesser gewickelt ist, die sich um eine vertikale Axe drehen kann. Das Gefäfs hängt selbst an einem 4^{mm} dicken ebenfalls um eine Holztrommel gewickelten Stahldraht. Die Stahlröhre ist vollständig und mit grofser Sorgfalt mit Quecksilber gefüllt, so dafs die Quecksilbersäule nirgendwo durch eine Luftblase unterbrochen ist. Die ganze Vorrichtung war über dem 500^m tiefen artesischen Brunnen zu Butte-aux-Cailles aufgestellt. Durch Drehen der den Draht und die Stahlröhre tragenden Holztrommeln wird dann der Apparat vorsichtig und langsam in den Brunnen hinabgelassen, bis zu einer Tiefe, die genau durch die Länge des abgewickelten Stahldrahtes gemessen wird, der dann auch die Höhe der drückenden Quecksilbersäule entspricht. Die an dem Apparate angebrachten Maximumthermometer gestatten nach dem Herausziehen des-

[1]) *Cailletet*, D'Almeida Journal de physique T. VIII.

die Temperatur zu bestimmen, welche der Apparat im Brunnen hatte, er also die Kompression stattgefunden hatte. Dieselbe war bis zu einer von 84^m 15^0 und stieg dann bei dem Hinablassen bis 182^m auf 17^0. Das Volumen der komprimierten Luft ergab sich gerade wie bei den beschriebenen Versuchen aus der Strecke, bis zu welcher in der öhre das Gold aufgelöst war.

Folgende Tabelle gibt einige der von Cailletet erhaltenen Resultate; rucke sind in Meter Quecksilber, die Volumina in Volumteilen des ressionsgefäfses angegeben.

Druck P	Volum V	$P \cdot V$	Druck P	Volum V	PV
30,359	207,93	8184	89,388	97,97	8267
44,264	184,20	8153	99,188	86,06	8536
49,271	162,82	8022	114,119	76,69	8751
59,462	132,86	7900	144,241	62,16	8966
64,366	123,53	7951	154,224	54,97	9023
69,367	115,50	8011	174,100	52,79	9191
79,234	103,00	8162	181,985	51,27	9330.

Das Minimum von PV, also die stärkste Kombilität des Stickstoffs, ergibt sich somit hier bei ^{m} Quecksilberdruck, von da ab nimmt dieselbe mer steigendem Mafse ab.

Amagat[1]) hat die Kompressibilität der Gase noch r verfolgt und seine Versuche auf sämtliche sonte permanente Gase ausgedehnt. Die Versuche n in einem Schachte von 400 Meter Tiefe in der von Saint-Etienne ausgeführt, auf dessen Boden ompressionsapparat aufgestellt war. Das Ver-, welches Amagat anwandte, war demjenigen von ult gleich, jedoch mufste er, wie Biot und Arago, ompressionen mit einer und derselben Gasfüllung hmen. Um die kleinen Volumina mit Genauigu messen, war deshalb dem Gasbehälter eine olche Form gegeben, wie sie auch von Cailletet lt war. Das Manometerrohr war ein enges Stahlon 2^{mm} Durchmesser im Lichten und einer Wand- von 1,5^{mm}. Dasselbe war aus einzelnen Stücken mengesetzt und wurde nach Bedürfnis vert, wenn zu höhern und höhern Drucken übergen wurde. Bei jedem einzelnen Versuche te das Manometer in einer Glasröhre, in welcher bere Niveau des Quecksilbers beobachtet wurde. Höhe der Quecksilbersäule wurde an einem mit n versehenen Stahldrahte gemessen, welcher dem Manometer im Schacht herabhing, indem hülfe in einem Fahrstuhl in dem Schacht empor-

Fig. 158.



[1]) *Amagat*, Annales de chim. et de phys. V. Série. T. XIX.

stieg und durch Einfüllen oder Herausnehmen von Quecksilber aus der Glasröhre bewirkte, daſs das obere Niveau des Quecksilbers in gleicher Höhe mit einer Marke des Drahtes war.

Auf die Details dieser begreiflicherweise mit den gröſsten Schwierigkeiten verknüpften und deshalb um so verdienstvolleren Versuche können wir hier nicht eingehen; wir müssen deshalb auf die Abhandlung von Amagat verweisen, in welcher die zur Überwindung aller Schwierigkeiten angewandten Maſsregeln vortrefflich beschrieben sind.

In folgender Tabelle sind die Resultate der Messung für Stickstoff von Amagat zusammengestellt.

Druck P Meter Hg.	PV	Druck in Atmosph.	Druck ber. nach dem M. G.	Differenzen
20,740	50989	27,289	27,289	0,000
35,337	50897	46,496	46,580	+ 0,084
47,176	50811	62,034	62,251	+ 0,217
55,481	50857	73,001	73,181	+ 0,188
61,241	50895	80,580	80,728	+ 0,140
69,140	50987	90,975	90,978	+ 0,003
82,970	51226	109,171	108,665	— 0,506
96,441	51602	126,896	125,388	— 1,508
128,296	52860	168,810	162,835	— 5,975
158,563	54214	208,635	196,224	— 12,411
190,855	55850	251,127	229,271	— 21,855
221,103	57796	290,934	256,669	— 34,275
252,353	59921	332,039	282,544	— 49,495
283,710	62192	373,302	306,005	— 67,247
327,388	65428	430,773	335,707	— 95,066

Den kleinsten Wert erhält das Produkt PV hier bei einem etw kleineren Drucke, als bei den Versuchen von Cailletet, bei einem Dru von 47^{m} Quecksilber.

Die Kompressibilität der übrigen Gase verglich Amagat dann mit d des Stickstoffs nach dem Verfahren von Despretz und Pouillet. Aus d beobachteten Volumverminderung des Stickstoffs wurde nach den in d vorigen Tabelle angegebenen Zahlen der Druck in Meter Quecksilber rechnet.

In folgender Tabelle sind die von Amagat erhaltenen Resultate zusammengestellt, wobei nur zu bemerken ist, daſs die Drucke auf die er Decimale abgerundet sind, da die von Amagat für die verschiedenen G angegebenen Drucke in der zweiten Decimale etwas verschieden sind. D erste Kolumne enthält so die Drucke in Meter Quecksilber, für welche d in den folgenden Kolumnen angegebenen Werte von PV erhalten wurd

P	PV für Luft	Sauerstoff	Wasserstoff	Kohlenoxyd	Grubengas	Äthylen
24,1	26968	26843	27381	27147	26325	21473
34,9	26908	26614	27618	27102	25596	18352
45,2	26791	—	27652	27007	24998	12263
55,5	26789	26185	27960	27025	24433	9772
64,0	26778	26050	28129	27060	24074	9370

	PV für					
	Luft	Sauerstoff	Wasserstoff	Kohlenoxyd	Grubengas	Äthylen
2	26792	25858	28323	27071	23724	9703
2	26840	25745	28533	27158	23318	10675
5	27041	25639	—	27420	22951	12210
9	27608	25671	29804	28092	22915	15116
6	28540	25891	30755	29217	23739	18962
5	29585	26536	31625	30467	25054	22115
2	30572	—	32426	31722	26742	25065
0	—	28756	—	—	—	29333
0	32488	—	33887	33919	29289	—

Mit Ausnahme des Wasserstoffs, bei welchem entsprechend dem schon
legnault gefundenen Verhalten das Produkt PV stetig zunimmt, zeigen
lase ein Minimum des Produktes PV, welches aber bei jedem Gase
nem andern Drucke eintritt. Am auffallendsten ist das Verhalten des
ens, bei welchem der Wert des Produktes bei dem Minimum weniger
n Drittel des Wertes bei 300^m Druck beträgt, und bei welchem dann ein
ides Ansteigen des Produktes eintritt, dafs die Kompressibilität dieses
in höhern Drucken ohne Zweifel kleiner wird, als das aller übrigen
Überall findet man aber das zuerst von Natterer gefundene Resultat
igt, dafs je weiter ein Gas komprimiert wird, um so mehr dasselbe
Mariotteschen Gesetze abweicht, dafs das Volumen ganz erheblich
mer abnimmt, als es nach diesem Gesetze der Fall sein müfste.
Das Mariottesche Gesetz ist somit nur ein ideales Gesetz, dem sich
irklichen Gase bei geringen Drucken mehr oder weniger anschliefsen,
rucken von weniger als drei Atmosphären so nahe, dafs wir es in den
en Fällen unbedenklich bei Gasmessungen anwenden dürfen, das heifst,
wir Gasquantitäten durch Messung des Volumens unter solchen
ten bestimmen oder vergleichen wollen, dafs wir sie mit Anwendung
lariotteschen Gesetzes auf das bei einem Normaldrucke, etwa dem
e einer Atmosphäre von ihnen ausgefüllte Volumen reducieren dürfen.

§ 100.

Dynamische Theorie der Gase. Die Gase sind gegenüber den festen
lüssigen Körpern dadurch charakterisiert, dafs sie kein selbständiges
nen haben, dafs eine bestimmte Quantität Gas nur unter einem be-
ten Druck auch ein bestimmtes Volumen ausfüllt, wobei dann die
auf die Wände des Raumes, in dem sie eingeschlossen sind, einen
ie in dem Raum haltenden genau gleichen Gegendruck ausüben. Der
gie nach liegt es nahe, in diesem Drucke der Gase wie bei den festen
lüssigen Körpern eine elastische Gegenwirkung gegen den äufsern
zu sehen, also eine gegenseitige Abstofsung der Moleküle des Gases.
des die Gase stets, ihr Volumen mag so klein oder so grofs sein wie
ll, einen bestimmten Druck erheischen, um in einem bestimmten
nen gehalten zu werden und den diesem gleichen Gegendruck aus-
so müfste man schliefsen, dafs die Moleküle der Gase sich gegen-
stets und unter allen Umständen abstofsen, eine Annahme, die man
vielfach und lange Zeit gemacht hat. Unter Annahme, dafs die Ab-

stofsung der Gasmoleküle mit einer Kraft stattfindet, die mit wachsende Entfernung abnimmt, läfst sich in der That das die Gase wenigstens ide charakterisierende Mariottesche Gesetz ableiten. Wir werden indes in d Wärmelehre bei Besprechung der innern Arbeit bei Ausdehnung der Ga Erscheinungen kennen lernen, welche den Beweis liefern, dafs eine solc Abstofsung zwischen den Gasmolekülen nicht vorhanden ist.

Schon Daniell Bernoulli[1]) sprach es aus, dafs man sich auch ei ganz andere Vorstellung von der Natur des gasförmigen Zustandes mach kann, dafs die Annahme genüge, dafs die Gasmoleküle sich ganz unabhän von einander frei im Raume bewegen, bis sie aneinander oder an eine fe Wand treffen, wo sie dann nach den Gesetzen des elastischen Stof zurückgeworfen werden. Diese Ansicht wurde mehr als ein Jahrhund kaum oder nur ganz vereinzelt beachtet und geteilt, bis sie vor etwa dreil Jahren infolge unserer neuern Auffassung über das Wesen der Wärme k nach einander von drei Physikern, von jedem selbständig und ohne Kennt der frühern vereinzelt ausgesprochenen Vorstellung, wieder neu gebil wurde, von Joule[2]), Krönig[3]) und Clausius[4]). Besonders Clausius füh diese Auffassung des Gaszustandes in der glücklichsten Weise durch leitete für eine Reihe von Erscheinungen die Gesetze des Verhaltens Gase ab. Wenn auch die ganze Fruchtbarkeit dieser Theorie der Gase in der Wärmelehre hervortreten wird, so ergeben sich doch eine Reihe Erscheinungen, die uns an dieser Stelle zu betrachten obliegen, so unmit bar aus dieser Theorie, dafs wir dadurch veranlafst werden, dieselbe j vorzuführen, ihre Vervollständigung in der Lehre von der Wärme uns behaltend.

Nach dieser Theorie existiert in den Gasen kein eigentlicher Gle gewichtszustand, die Moleküle sind vielmehr immerfort in einer geradl fortschreitenden Bewegung, bis sie an eine feste Wand stofsen und dieser als vollkommen elastische Körper zurückgeworfen werden, oder zwei Moleküle in geradem oder schiefem Stofse an einander prallen. denke sich, sagt schon Bernoulli, ein cylindrisches senkrecht stehen Gefäfs und darin einen beweglichen Stempel, auf welchem ein Gewicht li Die Höhlung möge äufserst kleine Körperchen enthalten, welche sich gröfster Geschwindigkeit nach allen Richtungen hin bewegen; dann wür diese Körperchen, welche gegen den Stempel anprallen und ihn tragen, elastische Flüssigkeit darstellen.

Um die Möglichkeit einer solchen stetig fortdauernden Bewegung veranschaulichen, stellt sich Krönig einen Kasten vor, in welchem eine zahl absolut elastischer Kugeln sich befinden, deren Volumen jedoch ge den ganzen innern Raum des Kastens nur klein ist. Wenn man di Kasten lebhaft auf und ab und hin und her schüttelt, so erhalten

[1]) *Bernoulli* in seiner Hydrodynamik, sectio decima, aus dem Jahre 1 Nach einer Bemerkung von *P. Du Bois Reymond* Poggend. Ann. Bd. CVII.

[2]) *Joule*, Philos. Mag. Series IV vol. XIV. p. 211.

[3]) *Krönig*, Poggend. Ann. Bd. XCIX.

[4]) *Clausius*, Poggend. Ann. Bd. C. In Poggend. Ann. Bd. CXV p. 2 Clausius an, wie weit man sich in frühern Zeiten dieser Hypothese angeschlo Mit der Theorie von Clausius stimmt im wesentlichen die Theorie *ll*, Phil. Mag. Series IV vol. XIX und XX. Eine andere Theorie entwick ll später Phil. Mag. Series IV vol. XXXII und XXXV.

geln eine Bewegung, wie sie für die Gasmoleküle angenommen ist, und nn diese Kugeln sowie die Wände des Kastens als absolut elastisch annommen werden, so dauert die Bewegung ohne Ende fort.

Aufser dieser geradlinig fortschreitenden Bewegung müssen, wie ausius hervorgehoben, die Moleküle zunächst noch eine rotierende Begung haben, da im allgemeinen die Stöfse, mit denen die Moleküle auf ander prallen, nicht lediglich centrale sein werden; jeder schiefe Stofs ingt aber, wie wir sahen, eine Rotation der Moleküle um eine in ihnen gende Axe hervor. Dadurch ist, bei den zusammengesetzten Molekülen nigstens, sofort auch die Wahrscheinlichkeit oscillierender Bewegungen r einzelnen Teile der Moleküle gegeben. Diese rotierende und oscillierende wegung nennt Clausius im Gegensatze zu der fortschreitenden Bewegung rselben die Bewegung der Bestandteile. Bei einem bestimmten Gase und gebener Temperatur müssen die lebendigen Kräfte dieser beiden Begungen in einem konstanten Verhältnisse stehen. Es folgt das einfach s der Überlegung, dafs in einem eine äufserst grofse Anzahl von Molelen enthaltenden Raume in jedem Zeitelemente alle überhaupt nur möghen Arten von Stöfsen stattfinden müssen; da nun die Bewegung der standteile nur von der Art, wie die Moleküle aufeinander prallen, bei ner gegebenen Zahl von Stöfsen abhängig ist, so wird sie in jedem Zeitmente in der gleichen Weise erzeugt; es mufs sich daher die gesamte wegung in einem stationären Zustande befinden, in welchem die lebengen Kräfte beider Bewegungen in einem bestimmten und für immer sich bleibenden Verhältnisse stehen.

§ 101.

Mittlere Wegelänge der Moleküle. Um über den durch diese ffassung gegebenen Gaszustand nähern Aufschlufs zu erhalten, unterchen wir zunächst die Wegestrecken, welche die einzelnen Gasmoleküle Mittel zurücklegen zwischen je zwei Stöfsen. So schwierig diese Aufbe zu sein scheint, in so einfacher Weise ist dieselbe von Clausius durch wendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst worden[1]).

Die Moleküle stofsen einander und ändern ihre Bewegungsrichtung, nn sie sich bis zu einem gewissen Abstande genähert haben; diese Entrnung ist durch den Radius einer Kugelfläche gegeben, welche wir uns n den Schwerpunkt der Moleküle gelegt denken. Diesen Radius nennt ausius den Radius der Wirkungssphäre, und den von jener Kugelfläche schlossenen Raum die Wirkungssphäre. Diese soll demnach so bestimmt in, dafs, wenn der Schwerpunkt eines andern Moleküls in diese Kugelche eintritt, der Stofs zwischen beiden Molekülen selbst stattfindet. In lchem Verhältnisse der Radius der Wirkungssphäre zur Gröfse des Moleles selbst steht, darüber läfst sich nur auf Grund von Hypothesen etwas ssagen. Nimmt man z. B. an, die Moleküle haben Kugelform und die

[1]) *Clausius* hat diese Frage zuerst Poggend. Ann. Bd. CV, Abhandlungen r mechanischen Wärmetheorie (Braunschweig bei Vieweg 1864—1867) Ablung II p. 272 behandelt. Später nochmals in etwas anderer Weise Sitzungsrichte der niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1874. Poggend. n. Erg.-Bd. VII. Obige Ableitung schliefst sich an die zweite.

Stofswirkung trete wie bei elastischen Kugeln ein, wenn die Ober
sich berühren, so erkennt man, dafs der Radius der Wirkungssphären
dem Durchmesser der Moleküle ist, denn in dem Falle tritt der St
wenn die Mittelpunkte der Moleküle, also deren Schwerpunkte u
Summe der beiden Radien von einander entfernt sind.

Um die zwischen zwei Stöfsen zurückgelegte Wegestrecke
rechnen, denken wir uns zunächst einen irgendwie durch eine beliebi
regelmäfsige Oberfläche begrenzten Raum und in diesem einen bewe
Punkt. Der Punkt befinde sich an einer beliebigen Stelle des Raun
dafs für alle gleich grofsen Teile des Raumes die Wahrscheinlichk
Punkt zu enthalten gleich grofs sei. Der Punkt mache dann eine
lich kleine Bewegung von der Länge dl nach irgend einer beliebigen
tung, so dafs alle möglichen Richtungen gleich wahrscheinlich sind
untersuchen zuerst die Frage, wie grofs ist dann die Wahrscheinli
dafs der Punkt bei dieser unendlich kleinen Bewegung die Obe
treffe.

Zu dem Zwecke suchen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit au
der Punkt irgend ein Element ds der Oberfläche treffe. Man denk
den Punkt ruhend und statt dessen das betrachtete Flächenelement d
der der vorher angenommenen Bewegung des Punktes entgegenge
Richtung um die Strecke dl bewegt. Dadurch beschreibt das Fl
element einen unendlich kleinen prismatischen Raum und die Wahr
lichkeit, dafs der ruhend gedachte Punkt in diesem Raume lieg
ganz dieselbe wie diejenige, dafs der bewegte Punkt das Flächene
ds trifft.

Für alle diejenigen Fälle, in denen die gedachte Bewegung des F
elementes von dem begrenzten Raume nach aufsen geht (welche jen
wegung des Punktes entsprechen, bei denen er sich von dem Flächene
ds entfernt), so dafs also der von dem Flächenelemente beschriebene
Raum aufserhalb des gegebenen Raumes liegt, ist die Wahrscheinli
dafs der Punkt in dem kleinen Raume liegt, gleich Null. Für solch
dagegen, in denen die gedachte Bewegung des Flächenelementes nac
geht, so dafs der von demselben beschriebene kleine Raum einen T
gegebenen Raumes bildet, wird die Wahrscheinlichkeit, dafs der
sich gerade in diesem Teile des gegebenen Raumes befindet, gleich
Bruche, dessen Zähler dieser Teil des Raumes und dessen Nenn
ganze Raum ist.

Sei ϑ der Winkel, welchen die Bewegungsrichtung des Elemen
der auf dem Elemente nach innen gerichteten Normalen macht, s
die Gröfse des kleinen Raumes dargestellt durch den Ausdruck

$$ds \cos\vartheta \cdot dl,$$

denn der Raum ist ein schiefes Prisma von der Länge dl, dessen z
senkrechter Querschnitt $ds \cdot \cos\vartheta$ ist. Der Raum ist positiv, we
kleine Raum im Innern des gegebenen, negativ, wenn er aufserhal
denn im letztern Falle ist der Winkel ϑ ein stumpfer. Für negative
des Ausdruckes ist somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit Null.
[illegible]den ganzen gegebenen Raum U, so ist die Wahrscheinlichkei
gedachten Bewegungsrichtung der Punkt sich in dem

ume befinde

$$\frac{ds \cos \vartheta \, dl}{U}.$$

Damit ist indes die Wahrscheinlichkeit, dafs der Punkt sich in dem trachteten Raume befinde, respektive die Wand treffe, nur gegeben, wenn e Bewegungsrichtung mit dem Element ds den Winkel ϑ bildet. Um die ahrscheinlichkeit überhaupt zu finden, dafs der Punkt in dem kleinen ume sich befinde, müssen wir erst noch die Wahrscheinlichkeit aufchen, dafs der Punkt sich in dieser Richtung, die wir die Richtung ϑ nnen wollen, bewege.

Zu dem Ende denken wir uns um den Punkt eine Kugel beschrieben t dem Radius eins. Die möglichen Bewegungsrichtungen sind dann sämtche Radien der Kugel. Denken wir uns jetzt durch den Punkt, also den ttelpunkt der Kugel die Richtung der Normale zu dem Flächenelement legt, so liegen alle Richtungen ϑ auf einem Kegelmantel, der die Kugelerfläche in einem Kreise schneidet, nicht in zwei Kreisen, da wir nur n Winkel ϑ mit der nach innen gezogenen Normalen des Elementes in tracht zu ziehen haben. Der Radius des Kreises, in welchem der Kegel e Oberfläche schneidet, ist $\sin \vartheta$, somit der Umfang des Kreises $2\pi \sin \vartheta$. ltiplicieren wir den Umfang $2\pi \sin \vartheta$ mit dem Bogenelement $d\vartheta$, so erlten wir eine kleine Zone auf der Kugelfläche, deren Flächeninhalt $\sin \vartheta \, d\vartheta$ ist. Die Wahrscheinlichkeit nun, dafs der Punkt bei seiner wegung eine Richtung habe, die zwischen ϑ und dem davon unendlich enig verschiedenen $\vartheta + d\vartheta$ liegt, ist dann gleich dem Quotienten aus m Flächeninhalt dieser Kugelzone und dem Flächeninhalt der Kugel. nn die zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegenden Richtungen schneiden die gelfläche sämtlich in dieser Zone, während die Durchschnittspunkte ntlicher möglicher Richtungen mit der Kugelfläche die ganze Kugelfläche len. Da der Radius der Kugel gleich eins angenommen wurde, ist die erfläche der Kugel 4π. Die Wahrscheinlichkeit somit, dafs die Begungsrichtung mit der Innenseite der Normalen einen spitzen Winkel de, der zwischen ϑ und $d\vartheta$ liegt, ist

$$\frac{2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta}{4\pi} = \frac{\sin \vartheta \, d\vartheta}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Punkt sich in der Richtung ϑ bee und bei der Bewegung dann das betrachtete Oberflächenelement ds fe, ist dann gleich dem Produkte aus den beiden berechneten Wahreinlichkeiten. Denn unter den Fällen $\frac{\sin \vartheta \, d\vartheta}{2}$, in denen sich der Punkt der verlangten Richtung bewegt, sind es nur die Fälle $\frac{ds \cos \vartheta \, dl}{U}$, in en er das Flächenelement ds trifft, die Wahrscheinlichkeit, dafs beides mmen eintritt, ist somit

$$\frac{ds \cos \vartheta \, dl \sin \vartheta \, d\vartheta}{2U}.$$

Da wir nun über die Lage des Oberflächenelementes gar keine nähere raussetzung gemacht haben, so gilt die gleiche Wahrscheinlichkeit für

jedes Element der Oberfläche; ist s ein Stück der Oberfläche, so
Wahrscheinlichkeit, dafs dieses unter dem Winkel ϑ von dem na
beliebigen Richtung durch die Strecke dl bewegten Punkte getroff
in dem Verhältnis gröfser als die eben berechnete Wahrscheinlich
welchem s gröfser ist als ds. Um diese Wahrscheinlichkeit zu e
haben wir somit die vorhin berechnete mit $\frac{s}{ds}$ zu multiplicieren, :

$$\frac{s \cos\vartheta \, dl \sin\vartheta \, d\vartheta}{2U}.$$

Um dann die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dafs die Oberfl
Gefäfses überhaupt an irgend einer Stelle unter dem Winkel ϑ g
wird, haben wir nur s durch die ganze Oberfläche S zu ersetzen,
wird also

$$\frac{S \cdot \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{2U} dl.$$

Wir wollen jetzt annehmen, der Punkt bewege sich nicht nu
die kleine Strecke dl, sondern habe eine gewisse Geschwindigkei
der er sich fort bewegt, bis er die Oberfläche trifft und von dieser n
Elasticitätsgesetzen abpralle, worauf er nach einer andern Richt
derselben Geschwindigkeit weiter geht. Dabei soll vorausgesetzt
dafs die Wechselwirkung zwischen Oberfläche und Punkt nur in u
barer Nähe stattfinde, so dafs die Änderung der Bewegungsrich
dem Stofse in unmerklich kleiner Zeit vor sich gehe, und demnach
schwindigkeit trotz der während der Stofszeit stattfindenden Abw
als konstant betrachtet werden dürfe. Dann ist die Zeit dt, in
Punkt den Weg dl zurücklegt, immer dieselbe, und wir könne
setzen $dl = udt$. Setzen wir das für dl ein, so erhalten wir für di
scheinlichkeit, dafs das Stück s der Oberfläche in der Zeit dt v
Punkte unter dem Winkel ϑ getroffen wird,

$$\frac{s \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \cdot u}{2U} dt;$$

für die ganze Oberfläche haben wir nur s mit S zu vertauschen.

Hieraus erhalten wir die Anzahl von Stöfsen, welche das Fläc
s in der Zeit einer Sekunde unter dem Winkel ϑ erhält, durch
Überlegung. Nennen wir den Faktor von dt für einen Augenblick x
Ausdruck sagt dann, dafs das Flächenstück s durchschnittlich ein
unter dem Winkel ϑ in einer solchen Zeit ndt bekommt, dafs

$$nxdt = 1, \quad ndt = \frac{1}{x};$$

denn im Verlaufe dieser Zeit wird die Wahrscheinlichkeit des Stofs
eins. Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Fal
gleich 1 ist, so bedeutet das, dafs der Fall wirklich eintritt; d
Wahrscheinlichkeit wird mathematisch durch den Quotienten aus d
der zutreffenden und der Zahl der möglichen Fälle definiert. Ist ab
Quotient gleich 1, so heifst das, die Zahl der zutreffenden Fälle is
der Zahl der möglichen, oder die vermutete Erscheinung tritt ein.

Findet nun in der Zeit ndt ein Stofs statt, so ist die Zahl der Stöfse in der Zeit einer Sekunde

$$\frac{1}{ndt} = x = \frac{su \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta}{2U}.$$

Das ist also die Zahl der Stöfse, die das Flächenstück s der Oberfläche unter dem Winkel ϑ erhält im Laufe einer Sekunde; ersetzen wir s durch S, so erhalten wir die Zahl der Stöfse, welche die ganze Oberfläche in der Richtung ϑ während einer Sekunde erhält.

Um daraus die Zahl von Stöfsen zu berechnen, welche die Oberfläche in einer Sekunde überhaupt erhält, haben wir den zuletzt gefundenen Ausdruck für jeden zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Wert von ϑ zu bilden, da der Winkel ϑ nur ein spitzer sein darf, und dann die Summe aller dieser Ausdrücke zu bilden. Die Zahl Z der Stöfse, welche die ganze Oberfläche in der Sekunde erhält, ist somit nach E IV, E 5 und E VIII

$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Su}{2U} \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = -\frac{Su}{2U} \cdot \tfrac{1}{2}\left(\cos^2 \frac{\pi}{2} - \cos^2 0\right) = \frac{Su}{4U},$$

wie sich nach oft ausgeführter Rechnung gemäfs den Entwicklungen der Einleitung ergibt. Die Zahl der Stöfse ist also gleich dem Produkte aus der Geschwindigkeit des Punktes und der Gröfse der Oberfläche dividiert durch den vierfachen Raum, in welchem sich der Punkt bewegt.

Aus der Zahl der Stöfse in der Sekunde erhalten wir den zwischen zwei Stöfsen zurückgelegten Weg, indem wir die in der Sekunde zurückgelegte Strecke durch die Stofszahl dividieren, sie wird

$$l = \frac{u \cdot 4U}{Su} = \frac{4U}{S}.$$

Der hier abgeleitete Satz über die Zahl der Stöfse Z und über den zwischen zwei Stöfsen im Mittel zurückgelegten Weg führt uns nun unmittelbar zur Lösung unserer Aufgabe der Bestimmung der mittleren Wegelänge der Moleküle.

Der Raum W sei mit Gas gefüllt; er enthalte die sehr grofse Zahl N der Moleküle von der von uns vorhin angenommenen Beschaffenheit; der Radius der Wirkungssphären sei gleich ϱ. Um auch jetzt wieder vom einfachern Fall auszugehen, denken wir uns zunächst, dafs nur eines der Moleküle sich in der für die Gasmoleküle angenommenen Bewegung befinde, alle übrigen seien fest, das heifst sie ändern ihren Ort im Raume nicht. Die Anordnung dieser Moleküle sei eine ganz beliebige, jedoch so, dafs immer in gleich grofsen mefsbaren Stücken des betrachteten Raumes die gleiche Anzahl von Molekülen vorhanden sei. Der in unsern Entwicklungen [angen]ommene bewegliche Punkt repräsentiert uns dann den Schwerpunkt [des] beweglichen Moleküls. Derselbe bewegt sich so lange fort, bis er in [die] Wirkungssphäre eines festen Moleküles oder an der Wand des Raumes [ko]mmt, welche das Gas einschliefst. Wir haben demnach, um die Zahl [der] Stöfse, die das bewegliche Molekül in der Zeiteinheit erfährt, in dem [vorh]in für Z entwickelten Ausdrucke nur für S die Summe der Oberflächen

aller Wirkungssphären der im Raum vorhandenen Moleküle und de
dungen des Gefäfses einzusetzen. Denn die Summe aller dieser Fläch
uns die Begrenzung des Raumes, in welchem sich unser Punk
bewegen kann. Da wir bei unserer Entwicklung die Form de
grenzung des betrachteten Raumes ausdrücklich als ganz beliebig ang
men haben, gilt unsere Entwicklung für den in dieser Weise begr
Raum unmittelbar.

Der Raum U, in welchem sich der Punkt bewegen kann, ist d
der gegebenen Gasmenge ausgefüllte Raum, vermindert um den
welchen die Wirkungssphären der Moleküle ausfüllen, denn in die Wirk
sphären kann der Punkt nicht eindringen[1]).

Die Oberfläche der Wirkungssphäre jeden einzelnen Moleküls ist
die Summe der Oberflächen für N Moleküle somit $N \cdot 4\varrho^2\pi$. Setz
die Gröfse der Gefäfswand, welche das Gas einschliefst, gleich Σ, s

$$S = N 4\varrho^2\pi + \Sigma.$$

Ist ferner V der von der gegebenen Gasmenge eingenommene
so wird, da $\frac{4}{3}\varrho^3\pi$ der von der Wirkungssphäre jedes einzelnen M
eingenommene Raum ist,

$$U = V - N \cdot \tfrac{4}{3}\varrho^3\pi.$$

Damit erhalten wir, wenn u die Geschwindigkeit des bewegten
küls ist,

$$Z_1 = \frac{N 4\varrho^2\pi + \Sigma}{4(V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi)} \cdot u,$$

und für die mittlere Wegelänge des Moleküls die zwischen je zwei
im Mittel zurückgelegte Strecke

$$l_1 = 4\,\frac{V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi}{N 4\varrho^2\pi + \Sigma}.$$

Bei der Bestimmung dieses Wertes l_1 ist noch die Voraussetzu
macht, dafs die Moleküle mit Ausnahme des einen betrachteten in
seien. Nach unserer Gastheorie sind nun alle Moleküle in Bewegun
Geschwindigkeit der Bewegung ist im Mittel für alle dieselbe, wir
sie also für alle gleich u.

Zunächst sieht man, dafs die Zahl der Stöfse, welche das Molek
festen Wand erteilt, dadurch nicht geändert werden kann, da di
Wand an der Bewegung der Moleküle nicht teilnimmt, die Verhältni
Moleküls der festen Wand gegenüber somit nicht geändert werden. Sch
wir daher

$$Z_1 = \frac{N \cdot 4\varrho^2\pi \cdot u}{4(V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi)} + \frac{\Sigma \cdot u}{4(V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi)},$$

so kann nur das erste Glied des Ausdruckes für Z_1 geändert werden

---

[1]) Darauf, dafs bei Berechnung der mittlern Wegelänge der v
Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllte Raum in Betracht gezogen
müsse, hat zuerst *Van der Waals* in seiner Abhandlung: „Over de Cont
van den Gas- en Vloeistofftostand. Academisch Proefschrift, Leiden,
hingewiesen.

Die Änderung desselben ergibt sich auf folgende Weise; die Zahl dieser Stöfse ist bei ruhenden Molekülen der Geschwindigkeit u des bewegten proportional, denn sie ist, wenn wir den Faktor von u der Kürze halber mit a und das erste Glied des Ausdruckes für Z_1 mit Z'_1 bezeichnen,

$$Z_1' = a u.$$

Für die zwischen zwei Stöfsen im Mittel verstreichende Zeit τ erhalten wir dann

$$\frac{1}{Z_1'} = \frac{1}{a u} = \tau.$$

Sind nun aufser dem betrachteten auch alle übrigen Moleküle in Bewegung, so ist, wenn wir zunächst annehmen, dafs während der Zeit τ die Bewegung aller Moleküle aufser dem betrachteten dieselbe Richtung habe, die zwischen zwei Stöfsen stattfindende Zeit in dem Mafse kleiner oder gröfser als τ, in welchem die Moleküle durch ihre Bewegung sich dem betrachteten genähert oder von demselben entfernt haben. Für die Berechnung dieser geänderten Stofszeit τ' gelangen wir zu demselben Resultate, wenn wir auch jetzt noch uns alle Moleküle als ruhend denken, dagegen dem betrachteten Moleküle eine in dem Mafse gröfsere oder kleinere Geschwindigkeit beilegen, dafs es den bei ruhenden Molekülen vorhandenen Abstand in derselben Zeit τ' zurücklegt, wie den durch die Bewegung der Moleküle verkleinerten Abstand mit der Geschwindigkeit u. Wir haben also einfach anstatt der Geschwindigkeit u die relative Geschwindigkeit des Moleküls gegenüber derjenigen der anderen Moleküle zu setzen. Bewegen sich z. B. alle Moleküle mit dem betrachteten in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit v, so entfernt sich ein in der Bahn des Molekül liegendes anderes Molekül in der Zeit τ um die Strecke $v\tau$, das Molekül hat also aufser dem frühern Wege noch den Weg $v\tau$ zurückzulegen, um an das folgende anzustofsen. Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir dem betrachteten Molekül die Geschwindigkeit $(u - v)$ beilegen, während die anderen ruhen, auch dann hat es nach der Zeit τ noch den Weg $v\tau$ zurückzulegen, um zum Stofs zu gelangen. Ebenso wie bei gleichgerichteter Geschwindigkeit haben wir auch, wenn die Geschwindigkeit v eine andere Richtung hat, anstatt u die relative Geschwindigkeit des betrachteten Moleküls zu setzen, das heifst also jene Geschwindigkeit, mit welcher es sich zwischen den als ruhend gedachten andern Molekülen bewegen müfste, um gegen dieselben die gleiche Bewegung zu erhalten, welche durch die Bewegung aller Moleküle bewirkt wird. Bildet die Geschwindigkeit v mit derjenigen u den Winkel φ, so ist nach dem Satz von dem Parallelogramm der Bewegungen diese relative Geschwindigkeit

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cdot \cos\varphi},$$

oder wenn wir voraussetzen, dafs die Geschwindigkeit aller Moleküle dieselbe u des betrachteten sei

$$r = u\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\varphi}.$$

Haben die Moleküle nicht alle die gleiche Richtung der Bewegung, welche mit der des betrachteten Moleküles den Winkel φ bildet, sondern haben deren Bewegungen alle möglichen Richtungen, so dafs für jedes

Molekül jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich ist, so ist lative Geschwindigkeit des Moleküles gegen jedes der anderen eine andere. Nehmen wir aber aus allen diesen relativen Geschwind das arithmetische Mittel, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs dieses an ein anderes stöſst, also auch im Mittel die zwischen zwei Stöſ strichene Zeit, dieselbe als wenn das Molekül diese mittlere Geschwi besäſse, alle übrigen aber in Ruhe wären.

Zur Berechnung dieser mittlern relativen Geschwindigkeit $\bar{r}$ ha dieselbe Betrachtung anzustellen wie vorhin, als wir die Zahl de berechneten, welche die Oberfläche unter dem Winkel ϑ treffen. zahl der Moleküle, deren Bewegungsrichtung mit derjenigen des be ten Moleküls Winkel bilden, welche zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liege hält sich zur Gesamtzahl der Moleküle wie die Zone $2\pi \sin \varphi\, d\varphi$ zu fläche der Kugel 4π, sie ist somit, da wir die Anzahl der in dem vorhandenen Moleküle N genannt haben,

$$N \tfrac{1}{2} \sin \varphi\, d\varphi.$$

Denn auch jetzt sind sämtliche Bewegungsrichtungen die Radi Kugel, die zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ gelegenen die zu der entspre Zone gehörigen Radien. Nach dem Begriffe der mittlern Geschwi als der Summe aller Geschwindigkeiten dividiert durch die Anzahl d küle, müssen wir zur Berechnung von $\bar{r}$ die Summe aller möglich tiven Geschwindigkeiten, und zwar jeder einzelnen so oft, als Molek ihr begabt sind, bilden, und dann die Gesamtsumme durch N div Die vorhin berechnete Geschwindigkeit r besitzt die Anzahl $N \frac{1}{2}$ si Das Produkt

$$N u \sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi} \cdot d\varphi$$

gibt somit, wenn wir auch jetzt u als die mittlere absolute Geschwi aller Moleküle bezeichnen, den Anteil, den die mittlere Geschwind an der Gesamtsumme hat. Bilden wir nun den gleichen Ausdruck zwischen o und π liegenden Werte, so erhalten wir in der Sumn dieser Ausdrücke dividiert durch N die gesuchte mittlere Gesch keit $\bar{r}$. Dieselbe wird somit

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \int_0^\pi N u \sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi} \cdot d\varphi.$$

Da nun

$$\sqrt{1 - \cos \varphi} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}; \quad \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2},$$

so wird, wenn wir gleichzeitig die konstanten Faktoren vor das S zeichen setzen,

$$\bar{r} = 4u \int_0^\pi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{2}.$$

Nach den schon oft benutzten Sätzen der Einleitung ist

$$\int_0^\pi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{2} = \tfrac{1}{3} \left(\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^2 o \right) = \tfrac{1}{3},$$

demnach wird

$$\bar{r} = \tfrac{4}{3} u.$$

Für die zwischen zwei Stöfsen innerhalb der Moleküle im Mittel verstrichene Zeit ergibt sich darnach

$$\tau' = \frac{1}{a\bar{r}} = \frac{1}{a\,\frac{4}{3}u},$$

somit für die Stofszahl

$$Z' = \frac{1}{\tau'} = \tfrac{4}{3}\,a u = \tfrac{4}{3}\cdot\frac{N 4 \varrho^2 \pi u}{4(V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi)},$$

oder für die Stofszahl Z, welche das Molekül im Mittel in der Sekunde innerhalb der Moleküle und an der Wand des Gefäfses erhält,

$$Z = \frac{\frac{4}{3} N 4 \varrho^2 \pi + \Sigma}{4(V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi)}\,u,$$

und daraus für die von dem Molekül im Mittel zwischen zwei Stöfsen zurückgelegte Wegestrecke

$$l = 4\,\frac{V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi}{\frac{4}{3} N 4 \varrho^2 \pi - \Sigma}.$$

Da wir in den letzten Entwicklungen die mittlere Geschwindigkeit des nach beliebiger Richtung mit der Geschwindigkeit u zwischen der nach bebigen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit u sich bewegenden olekülzahl N berechnet haben, gilt dieser unser Ausdruck für jedes der Moleküle, so dafs also der gefundene Wert für l uns die mittlere Wegenge irgend eines Moleküles in dem mit Gas gefüllten Raume V liefert. ie mittlere Wegelänge hängt demnach einigermafsen von der Ausdehnung r Wandflächen des Gefäfses ab, das heifst denken wir uns einen Kubikter Luft in der äufsern Atmosphäre ohne Wandfläche, so ist die Wegege etwas gröfser, als wenn wir ihn durch eine feste Wand umgrenzen. des, wenn auch die Wirkungssphäre eines Moleküles eine sehr kleine berfläche hat, so ist doch, wenn die Gase nicht sehr verdünnt sind, die hl der Moleküle eine so grofse, dafs wir in dem Ausdrucke für l im enner Σ gegen das erste Glied vernachlässigen und schreiben dürfen

$$l = \frac{V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi}{\frac{4}{3} N \varrho^2 \pi},$$

der

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi}{N\frac{4}{3}\varrho^3\pi}.$$

Das Verhältnis der mittleren Wegelänge zu dem Radius der Wirkungshäre ist also gleich dem Verhältnisse des von den Wirkungssphären der oleküle freien von dem Gase eingenommenen Raumes zu dem von den irkungssphären der Moleküle ausgefüllten Raume. Dieses letztere Vertnis können wir auch als den für jedes Molekül vorhandenen freien m bezeichnen, das heifst denken wir uns den gegebenen Raum in soviel rfel geteilt, als derselbe Moleküle enthält, so ist der Quotient aus der tlern Wegelänge und dem Radius der Wirkungssphäre gleich dem Quoten aus dem Rauminhalt eines solchen Würfels weniger dem Rauminhalt einer Wirkungssphäre und dem Rauminhalt der letztern. Nennen

wir also λ die Seite eines solchen Würfels, so dafs $N\lambda^3 = V$, so wird

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{\lambda^3 - \frac{4}{3}\varrho^3\pi}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi},$$

$$l = \left(\frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi} - 1\right)\varrho;$$

die mittlere Wegelänge ist also gleich dem Quotienten aus dem Rauminhalte eines der Würfel dividiert durch den Rauminhalt einer Wirkungssphäre weniger eins multipliciert mit dem Radius der Wirkungssphäre. Dieselbe ist jedenfalls eine sehr kleine Gröfse, so dafs wir erkennen, dafs die Entwicklung unserer Auffassung über den Gaszustand dahin führt, dafs die Bewegung der Gasmoleküle wesentlich eine oscillierende ist, wobei sie aber nicht bei jeder Oscillation denselben Weg hin und her zurücklegen, und wobei nicht die Oscillationsweiten immer dieselben sind.

Um das letztere zu erkennen, müssen wir noch einmal auf die Bedeutung der mittlern Wegelänge zurückkommen. Dieselbe ist nicht etwa, dafs jedes Molekül zwischen je zwei Stöfsen den Weg l zurücklegt. Die in Wirklichkeit zurückgelegten Wege sind sehr verschieden, sie sind aber bald gröfser bald kleiner als l, und im ganzen so, dafs wenn wir die zwischen einer grofsen Zahl Stöfsen zurückgelegten Wege durch die Zahl der Stöfse dividieren, diese Länge herauskommt. Oder auch, zählen wir die von sämtlichen Molekülen N, die den Raum V erfüllen, zwischen je zwei Stöfsen zurückgelegten Wege zusammen, so ist diese Summe dividiert durch die Zahl der Moleküle gleich der mittlern Wegelänge, die von sämtlichen Molekülen zurückgelegten Wege sind also so grofs, als wenn jedes den Weg l zurückgelegt hätte.

Um den Gaszustand vollständig zu übersehen, wollen wir deshalb die Frage noch untersuchen, welche Wegstrecken die Moleküle wirklich zurücklegen; wir berechnen deshalb zunächst nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit die Anzahl Moleküle, welche einen Weg von x Wegelängen zurücklegen, keinen gröfsern und keinen kleinern. Sei die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Molekül die mittlere Wegelänge l zurücklegt, ohne schon vorher anzustofsen, gleich a, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs es nochmals den Weg l zurücklegt ohne anzustofsen, gleich $a \cdot a = a^2$, die Wahrscheinlichkeit, dafs es den Weg $3l$, ohne vorher anzustofsen, a^3, also diejenige, dafs es den Weg $x \cdot l$ zurücklegt, ohne vorher anzustofsen, a^x. Schreiben wir nun, da a ein echter Bruch ist, $a = e^{-\alpha}$, so können wir diese Wahrscheinlichkeit schreiben

$$W = e^{-\alpha x}.$$

Enthält unser Raum N Moleküle, so bedeutet der Satz, dafs die Wahrscheinlichkeit, dafs jedes Molekül den Weg $x \cdot l$ zurücklegt, gleich W sei, nichts anderes, als dafs von der ganzen Zahl N eine solche Zahl n diesen Weg zurücklegt, ohne schon vorher anzustofsen, dafs

$$\frac{n}{N} = W$$

ist. Die Zahl n der den Weg xl, ohne vorher anzustofsen, zurücklegenden Moleküle ist somit

$$n = NW = Ne^{-\alpha x}.$$

Alle übrigen Moleküle werden schon nach Zurücklegung kleinerer Vege gestofsen. Um nun aber die Zahl der Moleküle zu bestimmen, welche erade den Weg $x \cdot l$ zurücklegen und keinen gröfsern, müssen wir aus- echnen, wie viele am Ende dieses Weges einen Stofs erhalten. Wir finden iese Anzahl, wenn wir von der eben gefundenen Zahl diejenige abziehen, elche ohne anzustofsen den von x unendlich wenig verschiedenen Weg $(x + dx) l$ zurücklegen; denn die Differenz dieser Zahlen ist eben jene An- ahl von Molekülen, welche keinen gröfsern Weg als $(x + dx) l$, wofür bei er vorausgesetzten Kleinheit von dx auch $x \cdot l$ gesetzt werden darf, ohne tofs zurücklegen kann. Diese Differenz ist

$$Ne^{-\alpha x} - Ne^{-\alpha(x+dx)} = Ne^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha dx}).$$

Bei der vorausgesetzten Kleinheit von dx können wir setzen

$$e^{-\alpha dx} = 1 - \alpha dx,$$

d erhalten somit für die Zahl der Moleküle, die gerade den Weg x ohne ofs zurücklegen, keinen gröfsern und keinen kleinern

$$Ne^{-\alpha x} \cdot \alpha dx.$$

Hiermit sind wir imstande den Koefficienten α zu bestimmen, indem r die Summe aller von den Molekülen zwischen je zwei Stöfsen zurück- legten Wege berechnen, die, wie wir sahen, gleich Nl ist.

Da die eben berechnete Molekülzahl gerade den Weg x zurückgelegt t, so ist das Produkt

$$x \cdot Ne^{-\alpha x} \cdot \alpha dx$$

r in Summe von diesen Molekülen zurückgelegte Weg. Den von allen Molekülen zurückgelegten Weg erhalten wir dann, wenn wir für jeden ert von x zwischen Null und Unendlich den gleichen Ausdruck bilden d alle diese summieren, also in der Summe

$$\int_0^\infty x Ne^{-\alpha x} \alpha dx.$$

Für diese Summe gibt die Integralrechnung den Wert

$$\frac{N}{\alpha};$$

nun die Summe der von allen Molekülen zurückgelegten Wege gleich ist, so folgt

$$\frac{N}{\alpha} = N \cdot l; \quad \alpha = \frac{1}{l}.$$

Mit dem so bestimmten Werte von α ergibt sich somit die Wahrschein- hkeit, dafs ein Molekül den Weg xl zurücklegt, zu e^{-x}, und hiernach die hl der Moleküle, welche den Weg xl zurücklegt, zu Ne^{-x}. Die Zahl der leküle, welche also die mittlere Wegelänge ohne vorher angestofsen zu ben zurücklegt, ist

$$Ne^{-1} = 0,3679\, N,$$

o nur etwa 37%; alle übrigen haben schon nach Zurücklegung eines zern Weges einen Stofs erhalten. Für den doppelten Weg findet man 13,5%, für den dreifachen 4,9%, für den zehnfachen 0,0045%, so

also von einer Million Moleküle im Durchschnitt nur 45 ungestört die 10fache mittlere Wegelänge zurücklegen.

§ 102.

Ableitung des Mariotteschen Gesetzes. Die Entwicklungen des letzten Paragraphen führen uns sofort zu der Beziehung, welche zwischen dem Druck eines Gases und dem von demselben eingenommenen Raum bestehen mufs. Nach unserer Theorie kann der Druck, den das Gas auf die Wandungen des Gefäfses ausübt, in welches es eingeschlossen ist, nur herrühren von den Stöfsen, welche die an die Wand prallenden Moleküle der Wand erteilen.

Wenn ein Raum von der Gröfse U ein mit der Geschwindigkeit u sich bewegendes Molekül enthält, so erhält das Flächenstück s der Wand im Durchschnitt pro Sekunde (p. 445)

$$\frac{s u \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{2U}$$

Stöfse in der Richtung ϑ. Enthält der Raum N Moleküle, so ist für jedes dieser N Moleküle die Stofszahl dieselbe, die in der Richtung ϑ von allen diesen Molekülen ausgeübten Stöfse haben somit die Zahl

$$\frac{N s u \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{2U}.$$

Das an die Wand anprallende Molekül wird nach den Gesetzen des elastischen Stofses von der Wand zurückgeworfen, das heifst also die gegen die Wand senkrechte Komponente der Geschwindigkeit wird in die entgegengesetzte verwandelt. Die zur Wand senkrechte Komponente der Geschwindigkeit für die in der Richtung ϑ gegen die Wand fliegenden Moleküle ist $u \cdot \cos\vartheta$; indem diese in die entgegengesetzte verwandelt wird, ist es dasselbe, als wenn dem Molekül in der von der Wand fortgewandten Richtung die Geschwindigkeit $2u\cos\vartheta$ erteilt würde. Nennen wir nun m die Masse des einzelnen Moleküls, so ist die dieser Geschwindigkeit entsprechende Bewegungsgröfse $m \cdot 2u\cos\vartheta$. Die gesamte Bewegungsgröfse, welche die in der Richtung ϑ gegen die Wand fliegenden Moleküle infolge ihres Anpralls an das Stück s der Wand in der Zeit einer Sekunde erhalten, ist demnach, da jedes in der Richtung ϑ gegen die Wand fliegende Molekül bei jedem Stofse dieselbe Bewegungsgröfse $2mu\cos\vartheta$ erhält,

$$2mu\cos\vartheta \cdot \frac{Nsu\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{2U} = \frac{sNmu^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{U}.$$

Hieraus erhalten wir in schon oft abgeleiteter Weise die Bewegungsgröfse, welche sämtliche in allen möglichen Richtungen gegen die Wand fliegenden Moleküle infolge ihres Anpralls an die Wand in einer Sekunde erhalten, in der Summe

$$\frac{sNmu^2}{U}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\,d\vartheta,$$

denn die möglichen Richtungen entsprechen allen Werten von ϑ zwischen 0 entsprechend dem senkrechten Anprall, und $\frac{\pi}{2}$ entsprechend einer der Wand parallelen Bewegung. Diese Summe ist, da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = -\tfrac{1}{3}\left(\cos^3 \tfrac{\pi}{2} - \cos^3 o\right) = \tfrac{1}{3}$$

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{sNmu^2}{U}.$$

Denken wir uns jetzt die Wandfläche s vollkommen frei beweglich, so ıſs, damit sie nicht durch die Stöſse der Moleküle zurückgetrieben wird, n der andern Seite auf die Wand ein Druck ausgeübt werden, und zwar ıſs wegen der groſsen Zahl von Stöſsen, die in stetiger Folge stattfinden, eser Druck ein stetiger sein. Die Gröſse dieses Druckes ist dadurch ge-ben, daſs er, die Zeit einer Sekunde wirkend, der Masse der gegen die 'andfläche s prallenden Moleküle dieselbe Bewegungsgröſse erteilen muſs. ennen wir diesen Druck für die Flächeneinheit p, so muſs nach dem § 11)geleiteten Satze, daſs der Antrieb einer Kraft in der Zeit t gleich der in eser Zeit t erreichten Bewegungsgröſse sein muſs, und da die hier in Be-acht gezogene Zeit die Zeit einer Sekunde ist,

$$ps = \tfrac{1}{3}\,\frac{sNmu^2}{U},$$

ler

$$p = \tfrac{1}{3}\,\frac{Nmu^2}{U}, \quad pU = \tfrac{1}{3}\,Nmu^2.$$

Wie wir im vorigen Paragraphen sahen, ist U der von den Wirkungs-hären der Moleküle freie Raum des mit dem Gase gefüllten Gefäſses, so ſs wir also zu dem Satze gelangen, daſs das Produkt des Druckes, den ı Gas auf die Flächeneinheit ausübt in den von den Wirkungssphären ıien Raum, den das Gas einnimmt, gleich einem Drittel der doppelten)endigen Kraft der fortschreitenden Bewegung der in dem Raume wegten Moleküle ist[1]). Für die Gröſse U erhielten wir im vorigen ıragraphen

$$U = V - N\,\tfrac{4}{3}\,\varrho^3\pi.$$

Bei den jedenfalls sehr kleinen Werten von ϱ können wir, wenn das s nicht eine sehr groſse Dichtigkeit hat, den von den Wirkungssphären ıgefüllten Raum vernachlässigen, und erhalten dann

$$pV = \tfrac{1}{3}\,Nmu^2.$$

Da für eine gegebene Gasmasse die Zahl der Moleküle konstant ist, ınso die Masse m jedes Moleküls und, wie wir schon hier hervorheben llen, für eine konstante Temperatur, auch die Geschwindigkeit u, so ist letzte Gleichung der Ausdruck des Mariotteschen Gesetzes, daſs das)dukt aus dem Drucke und dem Volumen bei einer gegebenen Gasmenge l gegebener Temperatur konstant ist.

Die Entwicklung läſst aber zugleich erkennen, daſs das Gesetz nur ſenähert richtig sein kann, und daſs die Gase um so mehr davon ab-ichen müssen, je kleiner der von dem Gase eingenommene Raum ist, nigstens dann, wenn der von den Wirkungssphären eingenommene Raum

---

1) *Krönig*, Poggend. Ann. Bd. XCIX. Genauer abgeleitet zuerst von *usius*, Poggend. Ann. Bd. C.

nicht verschwindend klein ist. Setzen wir in die Gleichung den richtigen Wert für U ein, so wird:

$$p\left(V - N\tfrac{4}{3}\varrho^{-3}\pi\right) = \tfrac{1}{3} N m u^2.$$

Da für eine gegebene Gasmasse der von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllte Raum eine konstante Gröfse ist, so können wir, wenn wir denselben mit b bezeichnen und die Konstante der rechten Seite mit R, diese Gleichung auch schreiben

$$p(V - b) = R; \quad pV = R + pb.$$

Wir erkennen demnach[1]), dafs die dynamische Gastheorie anstatt zu dem Mariotteschen Gesetze, zu dem Satze gelangt, dafs das Produkt aus dem Drucke und Volumen eines Gases nicht konstant ist, sondern dafs es mit wachsendem Drucke wachsen mufs und zwar um so mehr, je gröfser der Druck p ist, unter welchem das Gas steht. Weiter aber erkennt man, dafs diese Beziehung nur so lange gültig sein kann, wie die Bewegungen die in der Theorie vorausgesetzten sein können. Das ist höchstens so lange möglich, als der Abstand der Schwerpunkte zweier Moleküle nicht kleiner als der doppelte Radius der Wirkungssphäre ist, denn nur dann könnte noch ein Molekül zwischen zwei andern hindurchgehen; es kann also diese Beziehung nicht mehr gelten, sobald der ganze von dem Gase angefüllte Raum nicht gröfser ist als der doppelte Raum, den die Wirkungssphären der Gase ausfüllen.

Von den von Regnault untersuchten Gasen entspricht indes nur der Wasserstoff dieser Beziehung, denn nur bei diesem wächst das Produkt pV mit wachsendem Drucke, bei allen übrigen Gasen dagegen nimmt mit wachsendem Drucke zunächst das Produkt pV ab, um dann, erst wenn der Druck auf 60—70 Atmosphären gewachsen ist, wieder zuzunehmen, wie sich übereinstimmend aus den Versuchen von Cailletet und Amagat ergab.

Wir müssen daraus schliefsen, dafs unsere Theorie noch nicht ganz den wirklichen Verhältnissen entspricht; in der That haben wir bei Entwicklung derselben eine Voraussetzung gemacht, die nicht strenge richtig sein kann[2]), die Voraussetzung nämlich, dafs die zwischen den Molekülen thätigen Kräfte nur im Augenblicke des Stofses wirksam seien, und dafs die Dauer dieser Wirkungen so klein sei, dafs der Einflufs, den sie auf die Geschwindigkeit der Bewegung haben, vernachlässigt werden dürfe. Ist das nicht der Fall, wird die Geschwindigkeit durch den Stofs für eine gegen die Zeit der freien Bewegung erhebliche Zeit geändert, so mufs die Geschwindigkeit u, die wir als mittlere der Moleküle für ein gegebenes Gas und gegebene Temperatur bezeichneten, einigermafsen von der Zahl der Stöfse abhängen, somit da die Stofszahl von dem Volumen der gegebenen Gasmenge abhängt, mit dem Volumen des Gases sich etwas ändern.

Anstatt die Änderung der Geschwindigkeit zu berechnen, kann man, wie Van der Waals[3]) gezeigt hat, den Einflufs der Molekularkräfte durch

[1]) Dieser Ausdruck ist zuerst von *Van der Waals* in der schon erwähnten Abhandlung Over de continuiteit van den Gas- en Vloeistofftoestand, Leiden 1873. p. 48 abgeleitet.

[2]) *Clausius*, Poggend. Ann. Bd. C; neue Folge Bd. IX.

[3]) *Van der Waals*, a. a. O. p. 54 ff.

ine etwas andere Betrachtung in Rechnung ziehen. Wir erhielten für den ruck des Gases für die Flächeneinheit der Wandfläche

$$p = \frac{R}{(V-b)}.$$

Sind nun zwischen den Gasmolekülen anziehende Kräfte thätig, so ufs dadurch die Geschwindigkeit, mit der die Moleküle gegen die Wand iegen und damit der Druck p kleiner werden. Der Effekt ist also derselbe, ie wenn die gegen die Wand fliegenden Moleküle eine gegen das Innere es Gases wirkende Anziehung erhalten, durch welche der Druck p nicht leich dem berechneten, sondern kleiner, also

$$p = \frac{R}{(V-b)} - \alpha$$

in mufs. Jedes auf die Wand drückende Molekül erfährt diese Druckrminderung, dieselbe mufs also zunächst proportional sein der in einem gebenen Momente in der Wandschicht vorhandenen Moleküle. Diese ist er der Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle, also der ichtigkeit des Gases proportional. Aufserdem mufs die auf jedes einzelne olekül wirkende, gegen das Innere des Gases gerichtete Anziehung, wie ir das bei allen ähnlichen Wirkungen finden, der Anzahl der auf das in r Grenzschicht befindliche wirkenden Moleküle proportional sein.

Denken wir uns nun um ein solches Molekül mit dem gröfsten Abnde, bis auf welchen die Moleküle anziehend auf dasselbe wirken, eine ugel gelegt, so wird jedes innerhalb der in das Gas fallenden Halbkugel gende Molekül auf das betrachtete anziehend wirken. Die Zahl der in eser Halbkugel liegenden Moleküle ist wieder der Dichtigkeit des Gases oportional, so dafs also die Gröfse α dem Quadrate der Dichtigkeit prortional ist. Da nun bei einer gegebenen Gasmenge die Dichtigkeit dem lumen umgekehrt proportional ist, können wir schreiben

$$\alpha = \frac{a}{V^2}$$

d

$$p = \frac{R}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

r auch

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = R.$$

In der Form

$$pV = R - \frac{a}{V} + pb + \frac{ab}{V^2}$$

nnt man, dafs der Gang der Werte pv wesentlich von dem Verhälte a und b abhängig ist, dafs, wenn der Wert von a hinreichend grofs der Wert von pv mit abnehmendem Volumen zuerst bis zu einem imum abnehmen kann und dann erst bei wachsendem Volumen zunimmt.

So lange das Volumen nicht zu klein ist, können wir in dem Gliede den Druck p nach dem Mariotteschen Gesetze durch

$$p = \frac{R}{V}$$

ersetzen, und dann

$$pV = R - \frac{a - bR}{V} + \frac{ab}{V^2}$$

schreiben. In dieser Form erkennt man, dafs die aus der Theorie sic
gebende Gleichung mit der empirischen Gleichung zusammenfällt, w
Regnault zur Darstellung seiner Beobachtungen gewählt hat. Die
war (§ 98 Ia)

$$pV = 1 - A\left(\frac{1}{V} - 1\right) + B\left(\frac{1}{V} - 1\right)^2$$

$$pV = 1 + A + B - \frac{A + 2B}{V} + \frac{B}{V^2},$$

so dafs

$$R = 1 + A + B, \quad a - bR = A + 2B, \quad ab = B.$$

Die Regnaultschen Beobachtungen zeigen somit, dafs bis zu e
Drucke von 20 Meter Quecksilber das Verhalten der Gase ganz der
wickelten Theorie entspricht.

An den Messungen von Cailletet und Amagat läfst sich dann pr
ob auch bei gröfsern Drucken die Volumabnahme der Theorie entsp
Ich habe zu diesem Zwecke die Versuche Amagats mit Stickstoff gew
Amagat gibt die Produkte pV in Metern Quecksilber und den willkürl
Volumeinheiten seines Apparates an. Um die Produkte in denselben
heiten, wie sie Regnault zur Darstellung seiner Versuche zu Grunde
bei denen das Volumen des Gases bei dem Drucke von 1 Meter Queck
gleich 1 gesetzt wird, auszudrücken, habe ich zunächst nach den Regn
schen Angaben (§ 98) das Volumen V für den kleinsten von Amaga
gewandten Druck $20{,}740^m$ berechnet. Dasselbe ergibt sich zu 0,(
Dann wurde aus den von Amagat gegebenen Werten für pV und p da
demselben beobachtete Volumen berechnet. Das Volumen bei $20{,}740^m$
ergab sich so zu 2458 in den Amagatschen Einheiten. Durch Multi
tion mit $\frac{0{,}0477}{2458}$ wurden dann sämtliche Volumina auf die Regnau
Einheit reduciert. Es wurde dann aus den Regnaultschen Konst
A und B

$$A = 0{,}000\,690\,1$$
$$B = 0{,}000\,007\,04$$

die Konstanten a, b, R der Gleichung bestimmt. Dieselben ergaben s

$$R = 1{,}000\,697 \quad a = 0{,}003\,03 \quad b = 0{,}002\,325.$$

Schliefslich wurden aus den Amagatschen Beobachtungen nac
Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R$$

die Konstanten R berechnet, welche, wenn die Beobachtungen mi
Theorie stimmen, den oben angegebenen Wert von R liefern müssen.
gende Tabelle enthält einige Werte zur Vergleichung von Theori
Beobachtung:

p	$\frac{a}{V^2}$	V	$V-b$	R
20,740	1,331	0,047 7	0,045 37	1,0012
47,176	6,936	0,020 9	0,018 57	1,0049
69,140	14,794	0,014 3	0,011 97	1,0049
96,441	28,105	0,010 38	0,008 06	1,0032
128,296	47,400	0,007 995	0,005 67	0,9963
158,563	68,745	0,006 64	0,004 315	0,9811
221,103	117,760	0,005 07	0,002 570	0,9319

Die bis zu einem Drucke von 128^m berechneten Werte entsprechen r Theorie so genau es sich erwarten läfst, wenn man erwägt, dafs die nstanten a und b aus den Beobachtungen Regnaults abgeleitet sind, die r bis zu einem Drucke von etwas über 20^m gehen. Eine Ableitung der nstanten der theoretischen Gleichung aus Regnaults und Amagats Beachtungen würde ohne Zweifel Werte geben, welche eine noch bessere ereinstimmung zwischen der Beobachtung und der Theorie liefern würden. e beiden letzten Beobachtungen geben schon zu kleine Werte von R, dafs wir schliefsen müssen, dafs schon wenn V zwischen zwei und drei b gt, die Bewegungen der Moleküle unsern Voraussetzungen nicht mehr sprechen.

Wir werden auf die Vergleichung von Theorie und Beobachtung in r Wärmelehre bei Gelegenheit der Besprechung der von Andrews entkten kritischen Temperatur nochmals zurückkommen und dann auch den nflufs der Temperatur auf die von der Theorie gelieferten Konstanten nen lernen.

Für die drei andern von Regnault ausführlicher untersuchten Gase geben sich aus den § 98 angeführten Konstanten folgende Werte von nd b:

Luft . . . . . $a = 0{,}005\,01$ $b = 0{,}003\,87$
Wasserstoff $a = 0{,}002\,65$ $b = 0{,}003\,17$
Kohlensäure $a = 0{,}009\,33$ $b = 0{,}000\,78$

Schliefslich wollen wir noch hervorheben, dafs durch die Bestimmung Wertes b sich auch in Zahlen das Verhältnis zwischen der mittlern glänge und dem Radius der Wirkungssphäre der Moleküle angeben läfst. r die mittlere Wegelänge hatten wir

$$l = \frac{V - N\frac{4}{3}\varrho^3\pi}{N\frac{4}{3}\varrho^3\pi} \cdot \varrho = \frac{V-b}{b}\varrho.$$

Bei der Berechnung der Konstanten der Regnaultschen Gleichungen l damit auch der aus denselben abgeleiteten Werte von a und b ist Volumen des Gases unter dem Drucke 1 Meter Quecksilber als 1 gesetzt. Werte b geben also etwa in Litern den Raum an, den die Wirkungsären der Moleküle ausfüllen, welche sich unter dem Drucke von 1 Meter cksilber in einem Liter befinden. Für diese erhalten wir dann den fficienten von ϱ, indem wir $V = 1$ setzen, also

$$l = \left(\frac{1}{b} - 1\right)\varrho.$$

Darnach werden für

Stickstoff $l = 429\,\varrho$ Wasserstoff $l = 314\,\varrho$
Luft . . . $l = 259\,\varrho$ Kohlensäure $l = 1281\,\varrho$.

Es bedarf demnach nur noch der Bestimmung der absoluten ' von l, um auch die Gröſse der Wirkungssphäre der Moleküle zu bere

§ 103.

Bestimmung der Geschwindigkeit u der Moleküle. Die im v Paragraphen erhaltene Gleichung für den Druck, den ein im Volumen V dem Drucke p befindliches Gas auf die Wandungen des Gefäſses a gestattet uns auch die Geschwindigkeit u der Moleküle zu berechnen[1] Konstante R unserer Gleichung hat darnach die Bedeutung

$$R = \frac{1}{3} N m u^2,$$

somit wird

$$u = \sqrt{\frac{3R}{Nm}},$$

wofür wir auch, da besonders bei kleinen Drucken R nur sehr weni pV abweicht, setzen dürfen

$$u = \sqrt{\frac{3pV}{Nm}}.$$

Hierin bedeutet Nm die Masse des den Raum V unter dem I p ausfüllenden Gases. Drücken wir dieselbe durch das Gewicht des aus, so müssen wir auch den Druck durch Gewicht ausdrücken. D wir uns, um den Wert von u in Metern zu bestimmen, ein Kubik Luft unter dem Druck einer Atmosphäre, so ist p der Druck einer . sphäre auf das Quadratmeter 10333 Kilo. Ein Kubikmeter Luft wenn die Temperatur diejenige des schmelzenden Eises ist, 1,293 somit ist

$$Nm = \frac{1{,}293}{g}$$

$$u = \sqrt{\frac{3 \cdot 10333 \cdot 9{,}81}{1{,}293}} = 485 \text{ M.}$$

Die Luftmoleküle bewegen sich somit bei der Temperatur des s zenden Eises mit einer Geschwindigkeit von 485^{m}. Für ein andere tritt in diesen Ausdruck an Stelle des Gewichtes der Luft dasjenig betreffenden Gases. Nennen wir das specifische Gewicht des Gases, b auf Luft, δ, so daſs also das Gewicht von 1 Kubikmeter des Gases dem Druck einer Atmosphäre gleich $1{,}293 \cdot \delta$ ist, so wird der Wert für dieses Gas

$$u = 485 \sqrt{\frac{1}{\delta}}.$$

Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle ist also der Quadratwurz der Dichtigkeit des Gases umgekehrt proportional. In der Wärm werden wir nachweisen, daſs bei steigender Temperatur die Dichtigke Gase, und zwar für alle sehr nahe gleichmäſsig, abnimmt, so daſs w einer nach der Centesimalskala genommenen Temperatur das Gewic 1 Kubikmeter Gas schreiben können

$$\frac{1{,}293 \cdot \delta}{1 + 0{,}003\,67}.$$

[1]) *Clausius*, Poggend. Ann. Bd. C.

Deshalb wird bei der Temperatur t die Geschwindigkeit

$$u = 485 \sqrt{\frac{1 + 0{,}003\,67\,t}{\delta}},$$

rin für Luft $\delta = 1$ zu setzen ist.

Für einige Gase werden hiernach die Werte von u für die Temperatur = 0 des schmelzenden Eises

Sauerstoff	$\delta = 1{,}105\,66$	$u = 461^m$
Stickstoff	$\delta = 0{,}971\,3$	$u = 492^m$
Wasserstoff	$\delta = 0{,}069\,2$	$u = 1844^m$
Kohlensäure	$\delta = 1{,}529\,0$	$u = 392^m$.

Hierbei ist jedoch zu beachten, dafs die so berechneten Werte von u ht die arithmetischen Mittel der Geschwindigkeit der Moleküle sind; es d vielmehr jene Werte der Geschwindigkeit, welche alle Moleküle haben fsten, damit der Druck dem wirklichen gleich ist; u bedeutet also die adratwurzel aus dem mittlern Quadrate der Geschwindigkeit, welch letzes nicht mit dem Quadrate der mittlern Geschwindigkeit zusammenfällt. n die mittlere Geschwindigkeit zu bestimmen, bedarf es erst einer Unterchung, wie die verschiedenen Geschwindigkeiten auf die Moleküle verteilt d, eine Untersuchung, welche Maxwell[1]) durchgeführt hat, auf welche les einzugehen hier zu weit führen würde. Wir begnügen uns mit Anbe des Resultates, dafs hiernach die mittlere Geschwindigkeit etwas iner ist als der Clausiussche Wert, und zwar dafs

$$u_1 = u \sqrt{\frac{8}{3\pi}}.$$

Bei den Molekülen kommen alle Geschwindigkeiten vor von sehr kleinen zu sehr grofsen; etwa 1,5 Procent der Moleküle hat eine Geschwindigt, die weniger als ein Viertel der mittlern, etwa 0,5 Procent eine solche, mehr als das Doppelte der mittlern beträgt.

§ 104.

Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe. Barometrische Höhenessungen. Nachdem wir in den letzten Paragraphen die Bedeutung des riotteschen Gesetzes für unsere Kenntnis der Natur des Gaszustandes nnen gelernt haben, gehen wir zunächst dazu über, das Mariottesche Ge- z zur Ableitung einiger aus demselben sich ergebenden Erscheinungen benutzen. Wir beginnen mit Ableitung des Gesetzes, nach welchem der ftdruck abnehmen mufs, wenn wir uns in der Atmosphäre emporheben. n weil die Dichtigkeit der Gase mit dem Druck sich ändert, mufs das setz der Druckabnahme bei vertikaler Erhebung in der Atmosphäre ein deres sein, als wenn wir uns in einer tropfbaren Flüssigkeit emporben.

Um das Gesetz abzuleiten, nehmen wir an, die Luft habe überall diebe Temperatur und sei im Gleichgewicht. Sei dann der durch den

1) *Maxwell*, Phil. mag. IV. Series vol. XIX und XXXV. *Boltzmann*, Wiener richte LVIII, LXIII, LXVI, LXXII. Man sehe auch *O. E. Meyer*: Kinetische stheorie. Breslau 1877. p. 31 ff. und p. 259 ff.

Barometerstand gemessene Luftdruck in irgend einer Höhe h über d
Meeresniveau gleich b, wir suchen denselben in irgend einer andern Höhe
Steigen wir von der Höhe h um eine so kleine Höhe dh auf, dafs
die Dichtigkeit der Luft in dieser überall als gleich und zwar gleich d
jenigen s setzen dürfen, welche dem Drucke b entspricht, so mufs das Ba
meter um eine solche Höhe db sinken, dafs das Gewicht der Quecksil
säule vom Querschnitt 1 und der Höhe db gleich ist dem Gewichte
Luftsäule von gleichem Querschnitt und der Höhe dh. Ist das specifi
Gewicht des Quecksilbers gleich σ, so mufs demnach

$$s dh = - \sigma db,$$

wenn wir rechts das negative Vorzeichen schreiben, um auszudrücken,
das Barometer um db sinkt. Setzen wir die Dichtigkeit der Luft u
dem Normaldruck $B = 760^{\mathrm{mm}}$ gleich s_0, so ist

$$s_0 : s = B : b$$

$$s = \frac{s_0\, b}{B}$$

und demnach

$$- \frac{db}{b} = \frac{s_0}{\sigma B}\, dh.$$

Dieser Ausdruck enthält schon das zu suchende Gesetz, denn es z
dafs das Barometer jedesmal um denselben Bruchteil des an der u
Grenze der Schicht dh vorhandenen Barometerstandes sinkt, wenn wir
irgend einer Stelle aus um die Höhe dh emporsteigen; denn für einen
denselben Wert dh ist die rechte Seite unserer Gleichung eine konst
Gröfse. An der obern Grenze der Schicht wird der Barometerstand

$$b_1 = b - db = b\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\, dh\right),$$

oder der Quotient aus den Barometerständen b_1 und b an Stellen, die
Höhendifferenz dh besitzen, ist immer derselbe, wo wir auch die Hö
differenz nehmen, das heifst, von welcher Höhe h wir auch ausge
Daraus folgt, dafs wenn wir von irgend einer Höhe h eine Anzahl Mal
die Höhendifferenzen dh aufsteigen, die Barometerstände einer geometris
Reihe angehören. Zunächst sagt obige Gleichung das nur aus, wenn
Differenzen dh verschwindend klein sind, indes was von diesen versch
dend kleinen Höhenunterschieden gilt, das gilt auch von beliebigen
lichen. Steigen wir nämlich um eine so grofse Anzahl Mal die verschwin
kleine Höhe dh auf, dafs mdh einen endlichen Wert hat, so werden
Barometerstände in Orten, die mdh, $2mdh \cdot\cdot$ höher liegen,

$$b_m = b\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\, dh\right)^m, \quad b_{2m} = b\left(1 - \frac{s_0}{\sigma B}\, dh\right)^{2m} \cdots$$

Wir gelangen also allgemein zu dem Satze, dafs **an Orten, deren H
in einer arithmetischen Reihe stehen, die Barometerstände eine geometr
Reihe bilden, deren Quotient abhängig ist von der Differenz der arith
schen Reihe.**

Wir gelangen zu demselben Satze, wenn wir direkt aus der Gleichung r db den Barometerstand in der Höhe H berechnen; sei derselbe b_n, so halten wir ihn, wenn wir die Summen bilden

$$-\int_b^{b_n} \frac{db}{b} = \int_h^H \frac{s_0}{\sigma B}\, dh \cdot$$

Diese Summen sind nach E VIII, E 2 und E 1

$$-\{\log b_n - \log b\} = \log b - \log b_n = \frac{s_0}{\sigma B}(H - h),$$

rin die Logarithmen natürliche sein müssen. Wollen wir briggische garithmen nehmen, so müssen wir die rechte Seite mit der zur Verndlung von natürlichen in briggische Logarithmen nötigen Zahl M, gleich n briggischen Logarithmus der Zahl e, multiplicieren.

Die Gleichung zeigt, dafs jedesmal, wenn wir in der Atmosphäre um selbe Höhe $H - h$ emporsteigen, die Differenz der Logarithmen der rometerstände an der untern und obern Grenze dieser Höhe denselben ert hat, oder dafs der Quotient aus den Barometerständen derselbe ist.

Dieses Gesetz gestattet unmittelbar aus den an einer untern und obern ation beobachteten Barometerständen die Höhendifferenz der beiden Orte bestimmen, wir haben nur die Gleichung nach $H - h$ aufzulösen und halten

$$H - h = \frac{\sigma B}{s_0 M}(\log b - \log b_n),$$

welcher Gleichung dann nur noch der Koefficient der rechten Seite auswerten ist. In demselben ist B, wenn wir die Höhendifferenz in Metern srechnen wollen, in Metern gleich 0,76 zu setzen, σ die Dichtigkeit des ecksilbers ist, wie schon früher erwähnt wurde, gleich 13,595 93; die hl M ist gleich 0,434 29.

Für s_0 ist die Dichtigkeit der Luft bei dem Barometerstande 0,76 zu sen. Ist die Temperatur der Luftschicht $H - h$ gleich der Temperatur s schmelzenden Eises, so bedeutet s_0 die Dichtigkeit der Luft unter dem rmalen Barometerstande bei dieser Temperatur, ist die Temperatur eine dere, etwa t der Centesimalskala, so müssen wir für s_0 die der Temratur t und dem normalen Barometerstande entsprechende Dichtigkeit setzen. Wie wir in der Wärmelehre nachweisen werden, ist diese

$$s_0 = \frac{0{,}001\,292\,673}{1 + 0{,}003\,67\, t} \cdot$$

Setzen wir diese Werte ein, so wird

$$H - h = 18405\,(1 + 0{,}003\,67\, t)\,(\log b - \log b_n).$$

Zur genauern Berechnung der Höhendifferenz nach dieser Gleichung d in derselben noch einige Korrektionen anzubringen.

Zunächst ist der Zahlenkoefficient etwas anders zu setzen, weil mit nehmender Höhe die Schwerkraft kleiner wird. Die Abnahme des Luftckes ist infolge der Abnahme der Schwerkraft eine kleinere, als wir sie ne Rücksicht auf diese fanden, und deshalb ist die Höhendifferenz in der

That eine etwas gröfsere, als sie obige Gleichung aus den Barometer-ständen gibt. Nach den vorliegenden Erfahrungen trägt man diesem Umstande hinreichend Rechnung, wenn man den Zahlenkoefficienten in 18482 verwandelt.

Ferner, da die Schwerkraft mit der geographischen Breite sich ändert, so ändert sich mit derselben auch die Dichtigkeit der Luft unter dem Drucke von $0,76^{m}$ Quecksilber, und zwar ist sie, da der von einer Quecksilbersäule von $0,76^{m}$ Höhe ausgeübte Druck der an dem betreffenden Orte vorhandenen Schwerkraft proportional ist, dieser letztern proportional. Der oben für s_0 angegebene Wert gilt für die Breite von 45°. Setzen wir die Gröfse der Schwerkraft für diese Breite gleich 1, so erhält man für die Dichte der Luft bei dem normalen Barometerstande unter der Breite φ mit dem § 40 mitgeteilten Ausdruck für g leicht

$$s_0 = s_{45}\,(1 - 0{,}000\,259 \cos 2\varphi),$$

wenn wir jetzt den oben angegebenen Wert mit s_{45} bezeichnen. Daraus folgt, dafs wir den Ausdruck für $H - h$ mit diesem Koefficienten dividieren oder, was hinreichend genau ist, mit dem Koefficienten $(1 + 0{,}000\,259 \cdot \cos 2\varphi)$ multiplicieren müssen.

Der für s_0 angegebene Wert setzt weiter voraus, dafs die Luft ganz trocken ist, und in der ganzen Höhe von h bis H dieselbe Temperatur habe. Beides ist nicht der Fall. Feuchte Luft ist leichter als trockene, und da die Feuchtigkeit in der Luft mit steigender Temperatur zunimmt, wird die Dichtigkeit der Luft mit steigender Temperatur etwas kleiner, als sie es nur durch die Ausdehnung würde. Da die Temperatur der Luft bei Höhenmessungen in der Regel höher ist als 0°, so genügt es, zur Berücksichtigung des Einflusses der Luftfeuchtigkeit den Koefficienten 0,003 durch den Wert 0,004 zu ersetzen.

Für die Temperatur t müfste man die mittlere Temperatur der Luftschicht $H - h$ einsetzen. Da man indes nicht angeben kann, wie die Temperatur in der Luftschicht verteilt ist, um so weniger, da man wohl niemals zwei genau vertikal über einander befindliche Orte zur Beobachtung hat, so begnügt man sich in Ermangelung eines Bessern die mittlere der an beiden Orten beobachteten Temperaturen t_0 und t_n, also $\frac{1}{2}(t_0 + t_n)$ einzusetzen.

Schliefslich ist darauf zu achten, dafs die Barometerstände b und b_n nach § 94 auf die Temperatur 0° reduciert werden müssen; ist t' die Temperatur des Quecksilbers im Barometer an der untern, t'_n an der obern Station, so wird die Gleichung für $H - h$ mit allen diesen Korrektionen[1])

$$H - h = 18482\,(1 + 0{,}002\,59 \cos 2\varphi)\left(1 + 0{,}004\,\frac{t_0 + t_n}{2}\right)\left(\log \frac{b}{1 + 0{,}000\,18\,t'} - \log \frac{b_n}{1 + 0{,}000\,18\,t'_n}\right)$$

[1]) Ausführlichere Behandlung der Gleichung für barometrische Höhenmessungen gibt *La Place*, Mécanique céleste Livre X chap. IV. *Poisson*, Traité de Mécanique Tome II, livre IV, chap. 6. Eine gute Zusammenstellung aller bei barometrischen Höhenmessungen zu beachtenden Umstände gibt *Brandes* in Gehlers physik. Wörterbuch, Artikel Höhenmessung, Bd. V, Teil 1. Ferner *R. Rühlmann*, Die barometrischen Höhenmessungen, Leipzig 1870. Man sehe auch *Baeyer*, Poggend. Ann. Bd. XCVIII.

lierbei liegt nun noch die Voraussetzung zu Grunde, dafs die Atmo-
im Gleichgewicht sei, was nach den Bemerkungen des § 96 nicht
ll ist. Um die dort erwähnten Variationen des Luftdruckes zu be-
, mufs man entweder den mittlern Barometerstand an beiden Sta-
anwenden, oder wenn das, wie es meist der Fall ist, an der obern
auf der Spitze eines Berges nicht möglich ist, mufs man eine Zeit
, in welcher die Atmosphäre möglichst ruhig ist, damit sie möglichst
m Zustande des Gleichgewichtes ist, den unsere Rechnung voraussetzt.
ufs dann ferner gleichzeitige Beobachtungen an beiden Stationen an-
lassen. Da die Änderungen des Luftdruckes meist nicht so lokal
lafs derselbe in nahe liegenden Orten sehr verschieden ist, so kann
ann ziemlich sicher sein, korrespondierende Barometerstände zu er-
Unsere Formel ergibt dann die Höhe der zweiten Station mit dem
eterstande b_n über der ersten bis auf einige Meter genau.
ennt man die Höhe eines Ortes über der Meeresfläche und zugleich
rometerstand b an demselben, so kann man mit Hülfe dieser Formel
rometerstand B erhalten, welcher in dem Niveau des Meeres unter
eite und Länge des Ortes stattfinden würde. Auf diese Weise werden
den verschiedenen Orten beobachteten mittlern Barometerstände auf
veau des Meeres reduciert.

§ 105.

nwendung des Mariotteschen Gesetzes auf Manometer. Die
nesser, welche wir bisher kennen gelernt haben, beruhen auf dem
tatischen Grundgesetze, dafs in kommunicierenden
nur dann Gleichgewicht ist, wenn der Druck auf
ennungsfläche der beiden Flüssigkeiten von beiden
gleich grofs ist. Bei diesen wird also der Druck
ses, die Expansivkraft desselben, durch eine Flüssig-
ule gemessen, welche in der einen der beiden kom-
erenden Röhren über dem Niveau der Flüssigkeit in
dern erhoben ist. Bei hohen Drucken müssen diese
nmer eine bedeutende Länge haben, wie z. B. die
ago und Dulong oder Regnault eine Länge von 36^m
n. Man hat deshalb auf das Mariottesche Gesetz
ndere Art von Manometern gegründet, welche den
eines Gases durch die Kompression eines abge-
enen Luftvolumen bestimmen. Da die Luft fast
dem Mariotteschen Gesetze folgt, so erhalten wir
grundelegung des Gesetzes nur wenig von der Wahr-
weichende Resultate.

Fig. 159.



gewöhnlichste Form der Manometer ist die folgende.
ben geschlossene mit trockner Luft gefüllte Glasröhre
59) taucht in ein Gefäfs, welches zum Teil mit
ilber gefüllt ist. Das Gefäfs steht in einem festen
r von Eisen, durch dessen Deckel die geschlossene
luftdicht hindurchgeführt ist. Die Röhre ist in dem Deckel fest ein-
t und der Deckel luftdicht und fest auf den Cylinder aufgeschraubt.

Durch eine mit einem Hahn verschliefsbare Röhre kann das Gefäfs mit Raume in Verbindung gesetzt werden, in welchem das Gas eingeschlo ist, dessen Druck gemessen werden soll.

Bei dem äufsern Druck der Atmosphäre steht das Quecksilber in Röhre und dem Gefäfse gleich hoch; tritt durch den Hahn das zusam gedrückte Gas in das Gefäfs und drückt auf die äufsere Quecksilberfl so dringt das Quecksilber in die verschlossene Röhre ein und das Volu des abgesperrten Gases gibt die Gröfse des Druckes an.

Man graduiert den Apparat auf folgende Weise.

Ist der Radius der Röhre gleich r und ihre Länge gleich h, so ist dem anfänglichen Drucke von 760^{mm} das Volumen des abgesperrten Gas

$$v = r^2\pi \cdot h.$$

Wenn nun der äufsere Druck bis zu $n \cdot 760^{mm}$ wächst, so steigt Quecksilber um x in der Röhre in die Höhe und der dann von der eingenommene Raum ist

$$v' = r^2\pi(h - x).$$

Während das Quecksilber in der Röhre um x steigt, sinkt es in Gefäfse um y. Nennen wir den Radius des ebenfalls als cylindrisch vo gesetzten Gefäfses R, so haben wir

$$\pi r^2 x = \pi R^2 y,$$

da das in der Röhre aufgestiegene Quecksilber vorhin in dem Gefäfse Raum $\pi R^2 y$ einnahm.

Die Spannung oder der Druck der eingeschlossenen Luft auf die C fläche des Quecksilbers ist gleich dem äufsern Drucke $n \cdot 760^{mm}$, je vermindert um die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule, also

$$p' = n \cdot 760 - x - y$$

$$p' = n \cdot 760 - x\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot$$

Und da die Volumina v und v' sich verhalten umgekehrt wie Drucke, so haben wir

$$\pi r^2 h : \pi r^2 (h - x) = n\,760 - x\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) : 760,$$

und setzen wir

$$\frac{1}{760}\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) = k,$$

so ist

$$h : h - x = n - kx : 1$$

$$\frac{h}{h - x} = n - kx.$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst gibt

$$x = \frac{1}{2k}\left\{n + kh \pm \sqrt{(n + kh)^2 - 4kh(n - 1)}\right\},$$

wo wir zur Berechnung von x dem Wurzelausdruck das negative Vorzei geben müssen.

enn für $n = 1$ ist $x = o$, unser Ausdruck gibt

$$x = \frac{1}{2k}\left\{1 + kh \pm \sqrt{(1+kh)^2}\right\},$$

ıchen wir den Wurzelausdruck negativ

$$x = o.$$

ur Graduierung eines solchen Manometers bedarf es also nur einer n Messung der Radien r und R; daraus wird die Gröfse k und mit dann x berechnet für $n = 1, 2, 3 \cdots$ Die so gefundenen Höhen x ., von dem Niveau des Quecksilbers im Gefäfse aus, neben der Röhre ·agen und mit 1, 2, 3 ··· bezeichnet. Die Quecksilberstände geben ınmittelbar die Gröfse des Druckes in Atmosphären an.

.t die Röhre sehr enge, das Gefäfs, in welches sie taucht, aber sehr ıo kann man die Niveauveränderung im Gefäfse vernachlässigen. In : Formel ist dann $R = \infty$, $\frac{r^2}{R^2} = o$, $k = \frac{1}{760}$, und wir erhalten

$$x = \frac{760}{2}\left\{n + \frac{h}{760} - \sqrt{\left(n + \frac{h}{760}\right)^2 - 4\,\frac{h}{760}\,(n-1)}\right\}.$$

ft gibt man diesen Manometern eine U-förmige Gestalt (Fig. 160). 'ene Arm erhält den Druck, der gemessen werden soll, und der ge- ene Arm enthält in dem Raume NA über dem Quecksilber trockne Unter dem Drucke der Atmosphäre steht das ilber in beiden Röhren gleich hoch. Steigt der auf $n \cdot 760^{mm}$, so sinkt das Quecksilber in dem Schenkel bis N' und steigt in dem geschlossene n el um ebensoviel bis N''. Um den Apparat zu ıren, dient unsere obige Formel, indem wir und somit

Fig. 160.

$$k = \frac{2}{760}$$

wodurch wir erhalten

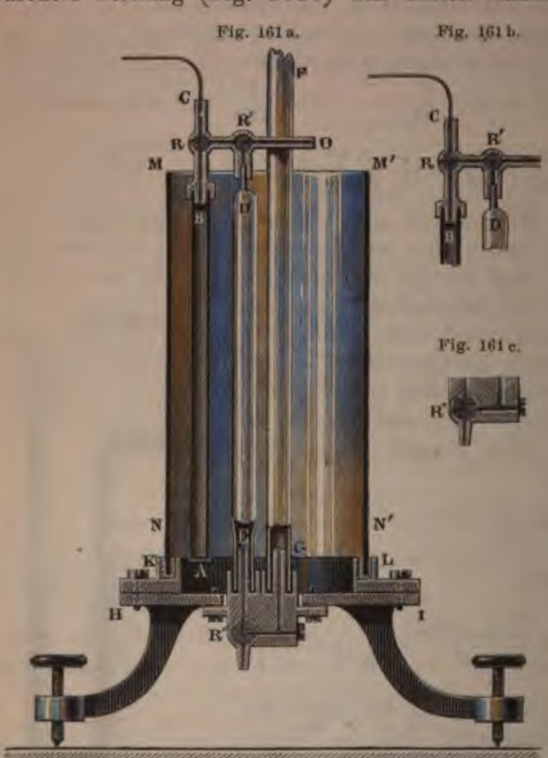
$$\text{ıo}\left\{n + \frac{2h}{760} - \sqrt{\left(n + \frac{2h}{760}\right)^2 - 8\,\frac{h}{760}\,(n-1)}\right\}.$$

s ist übrigens zu bemerken, dafs bei dieser Art ıduierens vorausgesetzt wird, dafs die Röhren cylindrisch sind, also r überall denselben Wert Es wird das nur selten mit aller Strenge sein, und deshalb ist es im allgemeinen besser, die Röhren durch rsuch zu graduieren. Man bringt sie dann mit einem Quecksilber- eter in Verbindung, wie es zum Beweise des Mariotteschen Gesetzes ındt wurde, und vergleicht die Volumina der abgesperrten Luft mit fseren Drucken.

m den Druck zu messen, welchen ein Gas in einem abgeschlossenen etwa einem gröfsern Reservoir, ausübt, hat Regnault[1]) vor kurzem

[1]) *Regnault*, Mémoires de l'Acad. T. XXVI. p. 680. Poggend. Ann. Bd. CXLIII.

ein Manometer angegeben, welches bis zu Drucken von etwa 30 Atmos
die Bequemlichkeit der zuletzt beschriebenen Manometer mit der Ge
keit des einfachen Quecksilbermanometers verbindet. Die Einri
dieses Manometers zeigt Fig. 161a. Es besteht aus einem dickwa
Messingrohr AB, welches durch den ⊤förmig durchbohrten Hahn
die Röhrenleitung C mit dem Reservoir in Verbindung gesetzt werde
welches das komprimierte Gas enthält. Neben der Röhre AB befind
das aus den kommunicierenden Röhren DE und FG bestehende e
Quecksilbermanometer. Diese beiden Röhren kommunicieren durch
einem in der Bodenplatte des Apparates eingesetzten Eisenstücke
lichen ebenfalls ⊤förmig durchbohrten Hahn R'', welcher bei um 9
drehter Stellung (Fig. 161c) den innern Raum des Rohres DE m


Fig. 161a. Fig. 161b. Fig. 161c.

untern Ausflußöffn
Verbindung setzt
beiden Röhren D
GF sind möglich
lindrisch und bei
einer Millimeter
versehen. Das obe
ausgezogene Rohr
in den vertikal ab
den Teil des m
Hahne R kommun
den Rohres RO
kittet. Unmittelb
der Röhre CD fin
der rechtwinklig
bohrte Hahn R',
den das Innere des
ED entweder m
äußern Luft in
dung gesetzt (Fig.
oder durch Dreh
90° (Fig. 161b) m
Hahne R in Ko
kation gebracht
kann. Die drei
sind von einem i
Fassung der Bod
eingekitteten Gl
der MM umgeben, welcher mit Wasser gefüllt wird, um den
während des Gebrauches auf konstanter Temperatur zu halten.

Zum Gebrauche des Apparates wird zunächst das Rohr AB m
mit Gas gefüllten Reservoir in Verbindung gesetzt, durch Stellu
Hahnes R wie in Fig. 161a und dann durch Einfüllen von Que
durch das Rohr FG das Rohr ED soweit mit Quecksilber gefüllt,
aus der Öffnung O hervortritt. Darauf wird der Hahn R in die S
Fig. 161b gedreht und dann der Hahn R' langsam so gestellt, d
innere Raum von AB mit der Röhre DE in Verbindung steht (Fig.

Die in AB komprimierte Luft tritt dann zum Teil in DE über. Man stellt gleichzeitig den untern Hahn R'' so, daſs sowohl aus der Röhre DE als aus GF das Quecksilber ausflieſsen kann, und läſst so lange unten Quecksilber ausflieſsen, bis in den beiden letzteren Röhren die Quecksilberniveaus eine bequem zu messende Höhendifferenz h zeigen.

Der gesuchte Druck x der in dem Reservoir vorhandenen Luft ergibt sich folgendermaſsen. Durch die Verbindung des Rohres AB mit dem betreffenden Reservoir hat sich das Volumen V dieses Rohres mit Gas unter dem Drucke x gefüllt. Nach Herstellung der Verbindung der beiden Röhren AB und DE hat sich dann dieses Gasvolumen ausgedehnt, und zwar, wenn wir mit W das Volumen im Rohre DE bezeichnen, welches nach Herstellung der Niveaudifferenz h von dem Gase mit angefüllt ist, auf das Volumen $V + W$. Ist H der Barometerstand zur Zeit, als das Volumen $V + W$ hergestellt war, so steht dieses Gas jetzt unter dem Drucke $H + h$. Nach dem Mariotteschen Gesetze ist deshalb

$$x \cdot V = (V + W)(H + h),$$

$$x = \frac{V + W}{V}(H + h).$$

Zur Bestimmung von x ist deshalb auſser der Kenntnis von H und h noch jene der Volumina V und W erforderlich. Zur Bestimmung von W füllt man zunächst ED wieder mit Quecksilber vollständig, bis es also bei O auszuflieſsen beginnt, stellt dann den Hahn R' in die Stellung Fig. 161 b und den Hahn R so, daſs der Raum von ED durch die beiden Hähne R' und R und die Röhre C, welche jetzt in die freie Luft mündet, mit der äuſsern Luft kommuniciert. Man stellt dann den Hahn R'' in die Stellung Fig. 161 c und läſst aus dem Rohre RD das Quecksilber ausflieſsen. Das ausgeflossene Quecksilber sammelt man in eine Flasche und wägt dasselbe. Man bestimmt so direkt durch das Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers den Rauminhalt der Röhre bis zu den verschiedenen Teilstrichen, und hat dann zur Bestimmung des Volumens W jedesmal nur nötig den Teilstrich zu beobachten, bis zu welchem das Quecksilber in der Röhre ED herabgedrückt ist.

Um schlieſslich V zu bestimmen wird AB mit Luft unter dem Druck der Atmosphäre gefüllt und das Manometer gerade wie zur Bestimmung des Druckes x hergerichtet. Verfährt man nun gerade so wie zur Untersuchung des Druckes x, so wird auch jetzt Luft in DE übertreten, wenn man aus R'' Quecksilber austreten läſst, es wird aber in GF das Quecksilber jetzt rascher sinken als in DE. Ist in DE ein Volumen W' eingetreten, und in GF das Quecksilber um h' tiefer gesunken, so ist jetzt, wenn wieder H die Höhe des Barometers ist,

$$H \cdot V = (V + W')(H - h')$$

$$V = W' \frac{H - h'}{h'}.$$

Indem man so die Luft aus AB bis zu verschiedenen Volumen $V + W'$ sich ausdehnen läſst, erhält man eine Reihe von Werten V, die sich gegenseitig kontrolieren.

Weitere Werte von V kann man erhalten, indem man zunächst das Rohr AB und das Rohr DE bis zu einem Volumen v' mit Luft füllt, und dann durch Einfüllen von Quecksilber in GF diese Luft komprimiert. Hat man sie so weit komprimiert, dafs in DE noch ein Volumen W_1 mit Luft gefüllt ist, und steht infolge dessen das Quecksilber in FG um h_1 höher, so ist

$$(V + v') H = (V + W_1)(H + h_1)$$
$$V = \frac{v'H - W_1 (H + h_1)}{h_1}.$$

Regnault gab bei seinem Manometer den Röhren AB und DE die Länge von 1 Meter und ersterer einen Durchmesser von 5^{mm}, letzterer von 20^{mm}, so dafs also der Querschnitt des letztern Rohres 16 mal so grofs war als der von AB. Wurde also AB mit Gas unter einem Drucke von 32 Atmosphären gefüllt, so konnte man $V + W$ leicht so herstellen, dafs es gleich 16 V war, es wurde dann die Niveaudifferenz h gleich dem Barometerstande.

Man sieht leicht, wie man durch Verkleinerung von V und Vergröfserung von W auch stärkere Drucke mit nicht gröfseren Niveaudifferenzen messen kann; es ist dann nur auf die Bestimmung von V und W die gröfste Sorgfalt zu verwenden, da je kleiner V ist, ein kleiner bei der Bestimmung dieses Volumens begangener Fehler von sehr grofsem Einflufs ist.

Zur Messung sehr grofser Drucke ist das § 64 beschriebene Manometer von Desgoffe wohl das genaueste.

§ 106.

Volumenometer. Eine andere Anwendung des Mariotteschen Gesetzes ist die Messung der Volumina von Körpern und so die Bestimmung ihrer Dichtigkeit, ohne einer Wägung in Wasser zu bedürfen. Der erste Apparat der Art wurde von Say[1]) unter dem Namen Stereometer und etwas später von Leslie[2]) beschrieben. Regnault[3]) gab demselben folgende Form (Fig. 162 und 163). Eine Glaskugel A von 300 Kubikcentimeter Rauminhalt ist mittels einer Metallfassung auf ihrem Hals durch vier Schrauben und Zwischenlegung von eingefettetem Leder luftdicht mit dem manometrischen Apparat $abcd$ verbunden. Das Manometer besteht aus zwei 14^{mm} weiten Glasröhren b und c, welche in ein eisernes mit einem ⊤förmig durchbohrten Hahn r versehenes Röhrenstück eingekittet sind. Fig. 164 und 165 zeigen einen Durchschnitt des Röhrenstückes mit zwei verschiedenen Stellungen des Hahnes. In Fig. 164 kommunicieren die beiden Manometerröhren mit einander, in Fig. 165 b mit der äufsern Luft, c ist geschlossen. In einer andern Stellung würde c ohne b und in einer vierten beide mit der äufsern Luft in Verbindung stehen. Die Röhre cd ist gerade und oben offen; die Röhre b, welche oben mit der Kugel durch das enge

[1]) *Say*, Annales de chimie par Guyton, Lavoisier etc. T. XXIII. 1797. Auch *Gilbert*, Annalen. Band II.

[2]) *Leslie*, Ann. of Philosoph. No. LXIV.

[3]) *Regnault*, Ann. de chim. et de phys. III. Sér. T. XIV. Auch *Poggend.*, Bd. LXVI.

hr aA in Verbindung steht, hat nahe unter der Krümmung a eine gel B und zwei Marken mn und pq, die eine über, die andere unter B. rch einen Hahn s kann man auch die Röhre ab oben mit der freien Luft Verbindung setzen.

Man mufs das Volumen der einzelnen Teile der Röhre ab, von da sie in die Kugel A tritt bis zur Marke mn, und des zwischen den iden Marken enthaltenen Teiles genau kennen, ebenso das Volumen der gel A. Um den zwischen den Marken enthaltenen Raum zu erhalten, net man den Hahn s, stellt r so, dafs ab und cd kommunicieren (Fig. 164) d füllt in cd Quecksilber ein, bis es an mn steht. Darauf dreht man den hn r in die Stellung (Fig. 165) und läfst soviel Quecksilber in ein ergestelltes Gefäfs abfliefsen, dafs die Quecksilbersäule in ab gerade pq steht.

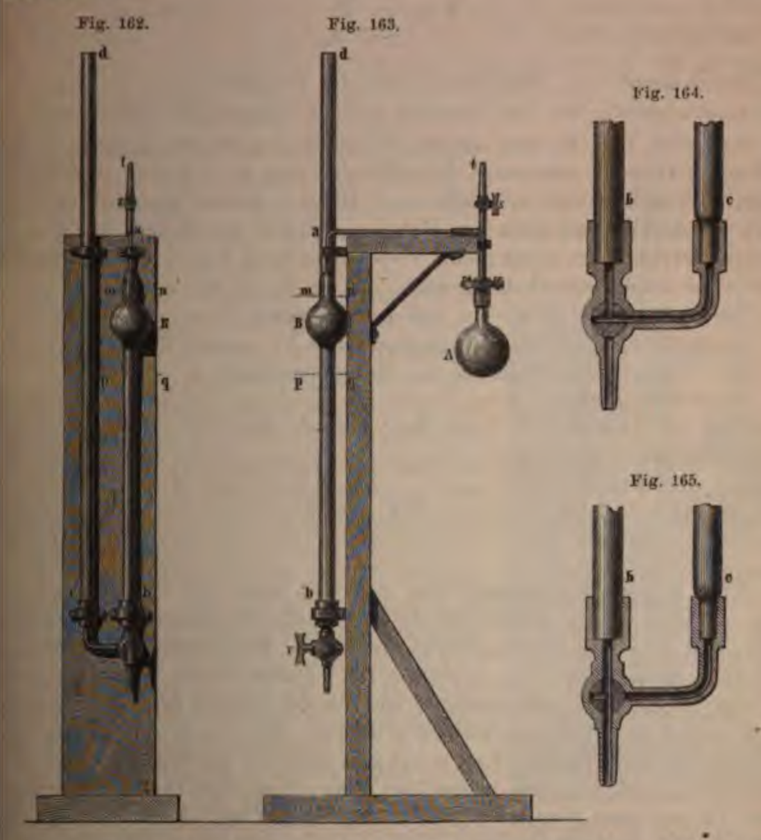


Fig. 162. Fig. 163. Fig. 164. Fig. 165.

Man schliefst den Hahn, so dafs die Röhren nicht mehr mit der äufsern ft in Verbindung stehen und erhält aus dem Gewicht des ausgeflossenen ecksilbers das zwischen pq und mn enthaltene Volumen. Dies Volumen v. Die beiden andern Volumina, das der Kugel und der Verbindungs-re, bestimmt man zusammen, da man nur die Summe der Volumina zu men braucht. Diese sei V. Man füllt dazu bei geöffnetem Hahn s und

bei Stellung des Hahnes r wie in Fig. 164, beide Röhren bis zur Marke pq. Darauf schliefst man s, und füllt in cd soviel Quecksilber nach, bis das Quecksilber in ab bis mn steht. Das Quecksilber steht dann in cd um eine Länge h, die man mit dem Kathetometer mifst, höher als in ab. Die Luft in der Röhre ab über dem Quecksilber und in der Kugel A ist nun komprimiert durch die Quecksilbersäule h. Unter dem atmosphärischen Druck bei geöffnetem Hahn s füllte sie den Raum $V + v$ aus; unter dem verstärkten Drucke nur mehr den Raum V. Nennen wir den Barometerstand H, so haben wir nach dem Mariotteschen Gesetze

$$V + v : V = H + h : H$$
$$V(H + h) = (V + v) H$$
$$V = v \cdot \frac{H}{h}.$$

Somit kennt man den Rauminhalt der einzelnen Teile des Apparates, dessen man bedarf, um das Volumen x eines Körpers zu bestimmen.

Man legt den Körper, dessen Volumen x gefunden werden soll, in die Kugel. Derselbe verdrängt dadurch eine ihm an Volumen gleiche Luftmenge. Wenn man nun bei geöffnetem Hahn s wieder Quecksilber bis zur Marke pq einfüllt und dann den Hahn s schliefst, so ist jetzt das Volumen der abgesperrten Luft nicht mehr $V + v$, sondern $V + v - x$. Füllt man dann in cd wieder Quecksilber nach, bis es in ab bei mn steht, so wird jetzt das Volumen $V + v - x$ auf das Volumen $V - x$ komprimiert und man beobachtet in cd eine Quecksilbersäule h', welche diese Kompression bewirkt. Nennen wir wieder H den Barometerstand, so ist

$$V + v - x : V - x = H + h' : H$$
$$H(V + v - x) = (H + h')(V - x)$$
$$x = \frac{Vh' - vH}{h'}.$$

Eine zweite Bestimmung von x erhält man auf dem umgekehrten Wege. Man füllt bei geöffnetem Hahn s soviel Quecksilber in das Manometer, dafs es in ab bis zur Marke mn steht. Bei geschlossenem Hahn ist dann das Luftvolumen $V - x$ abgesperrt. Darauf stellt man den Hahn r so, dafs beide Röhren mit einander und mit der äufsern Luft in Verbindung stehen und läfst soviel Quecksilber abfliefsen, dafs es in ab bis zur Marke pq steht. Das Luftvolumen $V - x$ hat sich dann auf das Volumen $V + v - x$ ausgedehnt, und zugleich beobachtet man, dafs das Quecksilber in der Röhre cd um eine Strecke h'' tiefer steht als in ab. Nach dem Mariotteschen Gesetze ist dann wieder

$$V + v - x : V - x = H : H - h''$$
$$H(V - x) = (H - h'')(V + v - x)$$
$$x = V - \frac{v(H - h'')}{h''}.$$

mbiniert man beide Methoden, so kann man sogar die Beobachtung
ometer unterlassen. Die erste Gleichung für x gibt

$$H = \frac{(V-x)h'}{v},$$

ite

$$H = \frac{(V-x)h''}{v} + h'' = \frac{(V+v-x)h''}{v},$$

beiden

$$\frac{V+v-x}{V-x} = \frac{h'}{h''}$$

$$x = V - v \cdot \frac{h''}{h'-h''}.$$

pp[1]) hat schon früher ein anderes Volumenometer konstruiert, welches
Regnaultschen den Vorzug der gröfsern Einfachheit hat, so dafs es
ch leicht selbst herstellen kann, Fig. 166 stellt dasselbe dar. In
um Teil mit Quecksilber gefüllten Cylinder K bewegt sich ein queck-
ht schliefsender Kolben mit schwacher Reibung.



Fig. 166.

r Cylinder ist unten mit einer Kork-
eschlossen, und ein gekrümmtes Rohr
ihn mit einem unten und oben ge-
nen Cylinder ii kommunicieren. Der
des letzteren Cylinders ist von zwei
durchbohrt cd und q.

Röhre cd ist gerade, an ihren beiden
ffen, und gegen eine willkürliche Teilung
eren Nullpunkt etwas über dem Cylinder
Die Röhre q, gekrümmt, wie die Figur
itt durch den Boden in ein cylindrisches
ein. Von dem Deckel des Cylinders
n mehrere Platinspitzen von verschie-
änge a, b in den Cylinder hinab. Das
sche Gefäfs r kann ein anderes Gefäfs
en, welches den zu untersuchenden
enthält. Eine Scheibe m von mattge-
em Glase wird durch die Schraube t
n zwischengelegten elastischen Körper
n abgeschliffenen obern Rand des Cy-
gelegt und verschliefst ihn luftdicht.
inder K und ii sind bis zu einer ge-
Höhe mit Quecksilber gefüllt.

n zieht zunächst den Kolben in K
herauf, dafs die Luft frei durch cd in
ngen kann. Sei bei dem Barometerstande H das Volumen der Luft,
in ii, q und r abgesperrt ist, wenn das Quecksilber gerade bei c
re cd verschliefst, gleich V.

ückt man nun den Kolben herab, so steigt das Quecksilber in ii,
kann es leicht dahin bringen, dafs es gerade die Spitze a berührt.

[1]) Kopp, Annalen der Chemie und Pharmacie von Liebig. Bd. XXXV.

Dabei wird das Quecksilber in der Röhre *cd* um eine Höhe h steigen, die Höhe h mifst jetzt den Druck, unter welchem die komprimierte steht. Diese Höhe wird bei verschiedenem Barometerstand verschieden da mit H die Dichtigkeit der anfänglich abgesperrten Luft sich ändert

Sei V' das Volumen der abgesperrten Luft, wenn das Quecksilber steht, so haben wir

$$V : V' = H + h : H$$

$$V : V - V' = H + h : h$$

$$V - V' = \frac{h}{H + h} \cdot V.$$

Um nun das Volumen V zu bestimmen, bedarf es noch einer we Beobachtung; man legt dazu in das Gefäfs r einen Körper von bekan Volum v, und verfährt gerade wie vorhin. Man erhält dann das Volu auf folgende Weise. Das Volum der anfänglich abgesperrten Luft ist $V - v$, beim Hinaufdrücken des Quecksilbers bis a ist es $V' - v$; i Röhre *cd* ist das Quecksilber dann bis zu einer Höhe h' gestiegen. haben demnach

$$V - v : V' - v = H + h' : H,$$

und wenn wir wieder gerade wie vorhin verfahren

$$V - v : V - V' = H + h' : h',$$

und setzen wir für $V - V'$ den soeben erhaltenen Ausdruck ein bringen die passenden Transformationen an:

$$V = \frac{h'}{H} \cdot \frac{H + h}{h' - h} \cdot v.$$

Ist V so ein für allemal bestimmt, so erhält man aus einem vorigen ganz gleichen Versuch das Volumen x eines zu untersuch Körpers. Man legt den Körper in den Cylinder r, und komprimie Luft, bis das Quecksilber die Spitze a berührt. In der Röhre *cd* steig Quecksilber bis zu einer Höhe h'', und es ist

$$V = \frac{h''}{H} \cdot \frac{H + h}{h'' - h} \cdot x,$$

und daraus, wenn wir die Gleichung nach x auflösen,

$$x = \frac{H}{h''} \cdot \frac{h'' - h}{H + h} \cdot V.$$

Der Apparat ist mit mehreren Platinspitzen versehen, um zu mehrere Werte für x erhalten zu können, welche sich gegenseitig k lieren, und aus denen man das Mittel nimmt, wenn die einzelnen Ve kleine Abweichungen zeigen.

Man kann diese Apparate sehr gut anwenden, um das specifisch wicht von Körpern zu bestimmen, bei denen man die gewöhnliche M des Eintauchens in eine Flüssigkeit nicht anwenden kann. Man bes das Gewicht des Körpers in Grammen und das Volumen mittels Apparates in Kubikcentimetern. Der Quotient beider gibt das speci Gewicht.

'm sich von der Genauigkeit der Methode zu überzeugen, bestimmte zunächst das specifische Gewicht von Blei, Zinn und einigen Salzen, nmt, wie folgende Zahlen zeigen, sehr genau mit den von andern :htern gefundenen specifischen Gewichten dieser Substanzen überein.

s ist das specifische Gewicht von

ei	nach Kopp 11,404,	nach gewöhnlicher Methode	11,373
in	" " 7,363,	" " "	7,358
lmiak	" " 1,50,	" Wollaston	1,45.

ür eine Reihe anderer Substanzen hat Kopp dann folgende Zahlen n:

Substanzen	Sp. Gew.	Substanzen	Sp. Gew.
tein (gepulvert). . .	2,15	Korkrinde	0,33
e von Buchenholz .	2,85	Faser von Lindenholz . .	1,13
er (weiss. gepulvert)	1,58	" " Tannenholz . .	1,16
salz (gepulvert) . .	2,15	" " Nufsbaumholz	1,17
enmehl	1,49	" " Apfelbaum. . .	1,20
zmehl	1,56	" " Zwetschenbaum	1,22
ısfaser.	1,45	" " Birnbaum . . .	1,23
(Coconfaden). . . .	1,56	" " Eichenholz. . .	1,27
ıwolle	1,27	" " Buchenholz . .	1,29
fwolle (verarbeitet)	1,29		

§ 107.

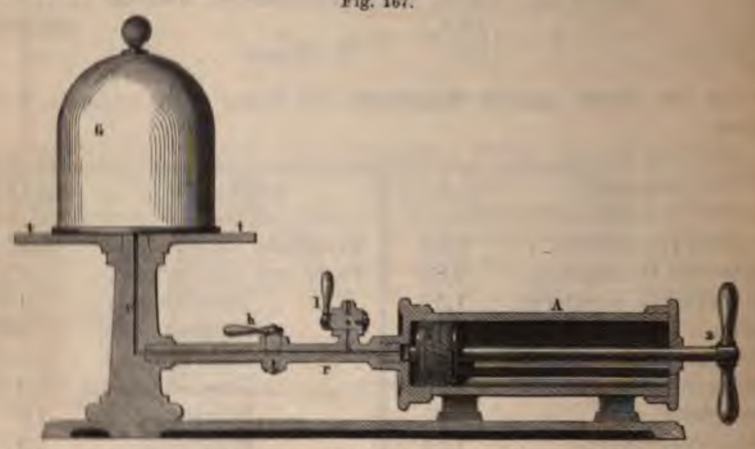
ie Luftpumpe. Auf der zweiten Fundamentaleigenschaft der Gase, estreben, jeden ihnen dargebotenen Raum auszufüllen, beruht einer r den Physiker wichtigsten Apparate, die Luftpumpe, durch welche nstande ist, aus einem Raume die Luft herauszuschaffen.

er einfachste Apparat dieser Art ist die Hahnluftpumpe, wie sie der ɜr derselben, Otto von Guericke, Bürgermeister von Magdeburg, kon- te. (Experimenta nova Magdeburgica de spatio vacuo. Amstellod. fol.). In einem hohlen, gut gearbeiteten Cylinder *A* kann ein luft- schliefsender Kolben *k* hin und hergeführt werden. Der Boden des ers ist durchbohrt und eine Röhre *rr*, welche in der Mitte eines *tt* mündet, setzt den durch die Glocke *G* umgebenen Raum mit dem des Cylinders in Verbindung.

n der Röhre *rr* sind überdies zwei einfach quer durchbohrte Hähne acht *h* und *l*. Wenn man die beiden Hähne so stellt, dafs der Raum des Cylinders weder mit der Glocke *G*, noch mit der äufsern n Verbindung steht, und nun den Kolben gegen *a* hin bewegt, so ıt im Cylinder ein luftverdünnter Raum, da sich die vorher in einem ı Teile des Cylinders befindliche Luft jetzt in dem ganzen Cylinder itet. Dreht man den Hahn *h*, so wie die Zeichnung es zeigt, ie Glocke mit dem Cylinder *A* in Verbindung steht, so strömt die re Luft aus der Glocke durch die Röhre *rr* in den luftverdünnten

Raum des Cylinders, und die Luft unter der Glocke ist dünner wie vorher. Schliefst man dann durch h die Glocke wieder vom Cylinder ab, so kann man durch Zurückschieben des Kolbens bei geöffnetem Hahn l die Luft aus dem Cylinder herausdrücken. Durch mehrfache Wiederholung dieser Operationen kann man dann allmählich die Luft unter der Glocke bis auf einen gewissen Grad verdünnen.

Fig. 167.



Diese Luftpumpe ist nun zwar die einfachste, aber auch die unbequemste, da man bei jeder Verdünnung drei Operationen vornehmen mufs, das Herausziehen und Hineinschieben des Kolbens und die Stellung zweier Hähne. Die nächste Verbesserung, welche an den Maschinen angebracht wurde, war die, dafs man statt zweier Hähne nur einen doppelt durchbohrten Hahn (Fig. 168) anwandte. Die eine Durchbohrung geht wie bei den einfachen Hähnen quer durch denselben, und verbindet in der entsprechenden Stellung die Glocke mit dem Cylinder. Die zweite bildet einen rechtwinkelig gekrümmten Kanal ab, sie setzt das Innere des Cylinders mit der äufsern Luft in Verbindung, sie dient also dazu, die Luft beim Zurückführen des Kolbens aus dem Cylinder zu entlassen.

Fig. 168.

Um der Stellung der Hähne ganz überhoben zu sein, hat man später dieselben durch Ventile ersetzt (Fig. 169). Der in dem Cylinder A bewegliche Kolben K ist durch ein centrales Loch durchbohrt, welches durch eine von unten nach oben sich öffnende Klappe verschlossen werden kann. Eine ähnliche Klappe ist am Boden des Cylinders vorhanden, die ebenfalls von unten nach oben sich öffnet. Wenn man nun den Kolben K in die Höhe zieht, schliefst sich das Kolbenventil l; durch den stärkern Druck der Luft in der Glocke öffnet sich dann aber das Ventil h und die Luft dringt aus der Glocke in den Cylinder. Wird d[illegible] Kolben hinabgedrückt, so schliefst sich das Ventil h, da dann die in K e[illegible] haltene Luft, welche sich vorher mit der Luft der Glocke ins Gleichgewic[illegible] [illegible] hatte, stärker von oben nach unten drückt. Bald öffnet sich da[illegible] das Ventil l des Kolbens und die im Cylinder A enthaltene Lu[illegible] durch die Kolbenöffnung aus, bis der Kolben wieder auf dem Bod[illegible] [illegible]linders aufsteht.

Indes würde bei dieser einfachsten Ventilluftpumpe die Verdünnung ler Luft unter der Glocke bald ihre Grenze erreichen, da die Luft nur dann ms der Glocke in den Cylinder K strömen kann, wenn sie das Ventil h ebt. Die Luft wird also aufhören, in den Cylinder einzuströmen, sobald ler Druck der Luft in der Glocke so klein geworden ist, dafs er nicht mehr mstande ist, das Ventil zu heben. Deshalb hat man an der Maschine weitere eränderungen angebracht, und bewirkt, dafs der aufsteigende Kolben das entil h öffnet, der niedergehende es chliefst.

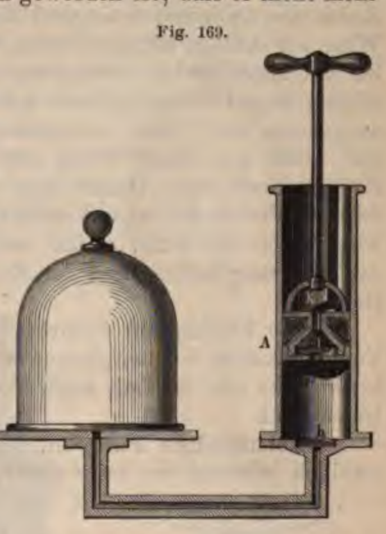


Fig. 169.

Der Kolben, wie er an den veresserten Maschinen angewandt wird, t folgende Einrichtung (Fig. 170).

Der Kolben enthält im Innern einen etallischen Kern, der aus einer dicken ich unten sich erweiternden Röhre RR steht. Um diese Röhre und auf der latte PP sind Lederscheiben gelegt, elche vollständig mit Öl getränkt sind. iese Lederscheiben sind durch die Deckatte QQ, welche mit der Schraube S gegen gedrückt wird, zusammengeefst. Die Umfänge dieser Lederscheiben nd so begrenzt, dafs dieselben einen Cylinder bilden, der ganz genau den Cylinder der Pumpe hineinpafst und nur mit schwacher Reibung rin auf und ab bewegt werden kann.

Es ist nicht schwierig, den Kolben nau einzupassen, denn jedesmal, wenn an die Schraube S anzieht, wird der urchmesser des Kolbens gröfser, da nn die zusammengeprefsten Scheiben ich der Seite sich ausdehnen. Man ann auf diese Weise den Kolben anz genau luftdicht einpassen, ohne ch die Reibung zu stark zu machen, nd so den Gang der Pumpe zu erhweren.

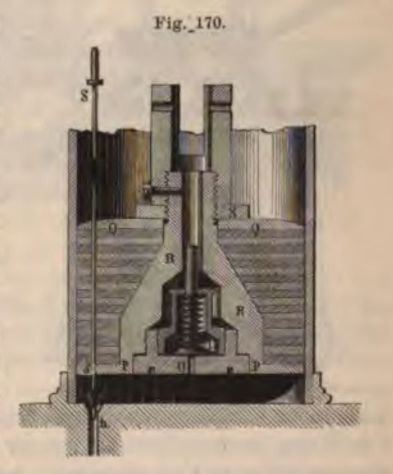


Fig. 170.

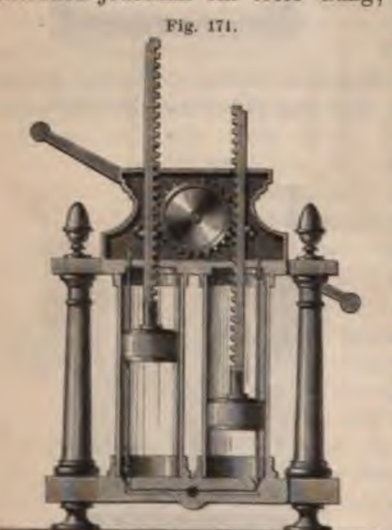
Im Innern der Röhre R befindet sich s Ventil l. Dasselbe ist eine kleine eisförmige Platte, welche abgeschliffen t, und die Öffnung O in der Bodenlatte vollständig bedeckt. Sie wird durch ne Feder, welche an einem kleinen in r weitern Stelle der Röhre befestigten Gestelle befestigt ist, gegen die odenplatte angedrückt. Die Feder ist andererseits an einen von der Platte l ifsteigenden Stiel befestigt. Die Feder ist nur sehr schwach, da sonst r Druck der Luft im Innern des Cylinders bald nicht mehr ausreichen ürde, um das Ventil zu heben.

Anstatt der einfachen Klappe, welche die zur Glocke führende verschliefst, hat man folgende Einrichtung angebracht. Der Kolben einer Durchbohrung versehen, durch welche ein Messingstab *ss* hi geht, der luftdicht eingepafst ist. An dem Stabe ist eine nach unten abgedrehte Verdickung angebracht, welche in die konische Öffnung Boden des Cylinders *h* eingeschliffen ist und dieselbe luftdicht abs Wird der Kolben herabgedrückt, so nimmt er den Messingstab m bis die kegelförmige Verdickung die Bodenöffnung abschliefst. D schlufs dauert so lange, wie der Kolben niedergeht. Wenn der aufgezogen wird, hebt er zunächst den Stab *ss*, öffnet die Bodenöff und stellt auf diese Weise die Kommunikation der Glocke m Pumpenstiefel her. Damit aber der Stab nicht zu hoch gehoben nachher der rechtzeitige Verschlufs beim Hinabdrücken nicht ve wird, stöfst der Stab, gleich nachdem er gehoben ist, gegen den des Pumpencylinders, und der Kolben gleitet an der Messingstang Höhe.

Diese Einrichtung bewirkt also, dafs man beim Pumpen sel Kommunikation des Recipienten mit dem Pumpenstiefel herstellt un bricht, dafs also die Luft aus der Glocke ohne Hindernis in die Pun treten kann.

Zweistiefelige Pumpen. Bei den einstiefeligen Pumpen ist meidlich jedesmal ein toter Gang, indem beim Herabdrücken des nur die Luft aus der Pumpe freie Luft, nicht aber aus de pienten in die Pumpe geschaf Aufserdem haben sie noch eine Unbequemlichkeit. Wenn näm Luft fast vollständig ausgepu so mufs man bei Hebung des nicht nur die Reibung des Kol den Wänden des Stiefels über sondern auch den Druck de welcher auf dem Kolben lastet u kein Gegendruck das Gleichgewi Dieser Druck ist bei einiger des Kolbens sehr bedeutend, e schreitet 100 Kilogramm, we Querschnitt des Kolbens einem Q decimeter gleich wird. Dieser der bei dem Anfang der Op gleich 0 ist, wächst sehr ras macht das Auspumpen von Luft bald sehr schwierig, wenn nicht unm Um diesen beiden Übelständen zu begegnen, hat man zweistiefelig pumpen (Fig. 171) konstruiert, bei denen man zwei solcher Pump mittelbar neben einander stellt und mit demselben Recipienten bindung bringt. Die Kolben sind an Zahnstangen befestigt, deren in die eines gezähnten Rades eingreifen. Das Zahnrad sitzt au metallischen Axe, an der zugleich ein zweiarmiger Hebel befestigt is den Hebel an den an seinen beiden Enden angebrachten Han

Fig. 171.



hebt und senkt die Kolben durch Drehung des Rades. Man sieht, wie immer der eine Kolben steigt, wenn der andere herabhängt, und wie beide vorhin bemerkte Übelstände abgestellt sind. Denn hemmt jetzt uftdruck den aufsteigenden Kolben, so befördert er in ganz gleichem den niedergehenden; der äufsere Luftdruck ist also kein Hemmnis peration, sie geht am Ende bei fast leerer Glocke ebenso leicht als nfang. Überdies ist aber auch der tote Gang vermieden, denn geht ine Kolben nieder, um die Luft aus dem Körper der Pumpe fortzu- en, so steigt der andere Kolben auf und pumpt Luft aus dem Reci- n.

Verbindung der Pumpen mit dem Recipienten. Um mit den en leicht die verschiedensten Apparate in Verbindung setzen zu können, ie auf einem festen Tische befestigt (Fig. 172). Die Kanäle, welche umpenstiefel mit dem Recipienten in Verbindung setzen, vereinigen gleich hinter den en in einen einzigen , der dann hori- über dem Tische führt ist, in einiger rnung vertikal auf- und in der Mitte Tellers von matt- iffenem Glase en- Das hervorstehende des Kanals ist mit Schraubengewinde ien, auf welchem die Apparate auf- iben kann, in wel- nan einen luftleeren herstellen will. sind zu dem Zwecke einer Schrauben- r versehen, welche las Gewinde pafst. lies sind bei einer n Luftpumpe stets Glocken mit abgeschliffenem Rand, welche auf den Teller gesetzt usgepumpt werden können. Um den Verschlufs einer solchen Glocke mmen luftdicht zu machen, bestreicht man den Rand derselben dann mit einer dünnen Schicht Fett.

Fig. 172.



Manometer. Um zu bestimmen, wie weit die Verdünnung der Luft n Apparaten vorgeschritten ist, besitzen alle Luftpumpen ein Baro- (Fig. 173). Dasselbe ist von einer Glasglocke umgeben, welche in Messingfassung eingekittet ist, die durch eine Röhrenleitung mit dem Recipienten zu den Pumpen führenden Kanal in Verbindung steht. So zugleich aus dem Recipienten und dieser Glocke die Luft ausgepumpt. sieht daher, wie bei jedem Kolbenhub das Quecksilber in dem einen kel des Barometer fällt, so lange bis die Verdünnung der Luft ihren

höchsten Grad erreicht hat, und das Niveau des Quecksilbers im Baro
rohr nur wenig mehr über das in dem offenen Schenkel erhoben ist
Druck der noch im Recipienten vorhandenen Luft und somit ihre Di
keit wird in jedem Moment durch den Unterschied der Quecksilbern
angegeben. Gewöhnlich wendet man anstatt eines ganz
abgekürztes Barometer an von 30 bis 40 Centimeter
Das Quecksilber in dem geschlossenen Schenkel beginnt
nicht eher zu fallen, als bis der Druck der Luft auf die
reduciert und somit die Luft zur Hälfte ausgepumpt ist.
man die Verdünnung schon früher, ja überhaupt genau n
so verbindet man mit der Pumpe ein einfaches U-för
Quecksilbermanometer, dessen einer Schenkel durch
Kautschukpfropf geschlossen ist, der von einer zur Luftp
geführten Glasröhre durchbohrt ist. Der andere Schenl
offen; die Röhren sind zur Hälfte mit Quecksilber g
Wird nun die Luft in dem mit dem Recipienten der Luft
in Verbindung gesetzten Schenkel verdünnt, so steigt das
silber in demselben, sinkt in dem andern und die Niveaudi
gibt den Überschufs des äufsern Luftdruckes über den
der Luft im Recipienten. Zieht man demnach den N
unterschied vom Barometerstande ab, so erhält man den
der Luft im Recipienten.

Fig. 173.

Der Niveauunterschied wird mit dem Kathetomet
messen.

Grad der Verdünnung. Wenn man die Verdünnu
Luft im Recipienten durch fortgesetztes Pumpen möglich
treibt, so wird man doch niemals in dem abgekürzten
meter das Quecksilberniveau in beiden Schenkeln gleich
oder im U-förmigen Manometer die Niveaudifferenz dem Baromete
gleich finden. Man erhält daher niemals in dem Recipienten eine
leeren Raum, und es fragt sich, wie weit kann man die Verdünnung
Es hängt das wesentlich ab von der guten Konstruktion der Pump
auch theoretisch betrachtet kann man niemals einen vollkommen
Raum erhalten, wie sich leicht nachweisen läfst.

Sei A die Kapacität des Recipienten, B die des Pumpency
Nehmen wir an, wir hätten eine einstiefelige Pumpe und der Kolbe
auf dem Boden des Pumpencylinders. Sei ferner die dann im Reci
abgesperrte Luftmenge gleich der Einheit.

Wird nun der Kolben ganz in die Höhe gezogen, so verbreit
die Luft aus dem Recipienten in den Cylinder und die vorhin den R
einnehmende Luft nimmt jetzt den Raum $A + B$ ein. Die Dichtigk
Luft ist demnach jetzt in dem Raume des Recipienten sowohl als des Cy

$$\frac{A}{A+B}.$$

Wird jetzt durch Hinabdrücken des Kolbens die Luft aus dem C
getrieben, so ist, wenn der Kolben den Boden wieder berührt, anst
Luftmenge 1 in dem Recipienten, dessen Kapacität gleich A ist, das

Volum Luft wie vorher abgesperrt, dieses hat aber nur die Dichtigkeit $\frac{A}{A+B}$. Nach dem zweiten Kolbenhube breitet sich nun die Luft von dieser Dichtigkeit aus dem Raume A wieder in den Raum $A + B$ aus, die Dichtigkeit nimmt demnach wieder im Verhältnis $\frac{A}{A+B}$ ab, oder sie ist jetzt

$$\frac{A^2}{(A+B^2)}.$$

Beim Niedergang des Kolbens wird wieder das Volumen B dieser Luft ausgestofsen, berührt der Kolben den Boden, so ist im Raum A die Luftmenge $\frac{A^2}{(A+B^2)}$ enthalten.

Nach dem dritten, vierten etc. Auf- und Niedergange des Kolbens erhält man in gleicher Weise als im Recipienten zurückbleibende Luftmengen

$$\frac{A^3}{(A+B)^3}, \frac{A^4}{(A+B)^4} \cdots \frac{A^n}{(A+B)^n}.$$

Nun ist

$$\frac{A^n}{(A+B)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{B}{A}\right)^n}$$

und man sieht, dafs dieser Ausdruck nur dann gleich 0 wird, wenn n unendlich grofs wird, wenn man also unendlich viele Kolbenhübe vornähme.

Man kann daher mit keiner Luftpumpe einen absolut leeren Raum erhalten, sondern unter den obigen Voraussetzungen sich dem vollständig leeren Raum nur durch andauerndes Pumpen annähern. Aber selbst dieses, eine fortgesetzte Annäherung an den luftleeren Raum ist in der Praxis nicht zu erreichen; selbst bei den besten Pumpen ist es nur eine gewisse Grenze der Verdünnung, der man sich bei fortgesetztem Pumpen immer mehr nähert. Selbst die besten Maschinen reichen nicht weiter als bis zu einer Verdünnung von etwa 1^{mm} Quecksilberdruck. Der Gründe dafür sind mancherlei.

Wie gut auch die Maschine gearbeitet ist, so können doch niemals die Verbindungen zwischen den einzelnen Teilen vollkommen luftdicht sein. So schliefst der Kolben nicht absolut luftdicht an den Cylinder, die Stange der Ventile nicht im Kolben, ebenso nicht das Boden- und Kolbenventil. Ferner ist durch die mancherlei Verbindungen am Apparat das Innere desselben nicht ganz vollkommen von der äufsern Luft abgeschlossen. Wenn deshalb die Verdünnung einen hohen Grad erreicht hat, sickert die Luft durch diese verschiedenen sehr feinen Räume in die Pumpe hinein und alles weitere Pumpen ist vergeblich; die Luftmenge, welche wir durch das Pumpen fortnehmen, wird durch die nachsickernde Luft wieder ersetzt.

Noch ein anderer wesentlicherer Umstand ist vorhanden, der es unmöglich macht, die theoretisch mögliche Verdünnung in der Praxis zu erreichen, es ist der schädliche Raum zwischen dem Kolben und dem Boden des Pumpencylinders. Der Kolben steht nämlich auch in seiner tiefsten Stellung niemals ganz dicht auf dem Boden der Pumpe, sondern immer ist wenn auch, bei sehr gut gearbeiteten Pumpen, noch so kleiner Raum zwischen beiden. Daraus folgt, dafs nicht, wie wir bei unserer Berechnung

annahmen, bei jedem Niedergange das Luftvolumen B fortgeschafft sondern da von dem Raume B unter dem Kolben noch ein Raum b bleibt, nur das Volumen $B - b$. Bei weit vorgeschrittener Verdü wird deshalb ein Punkt eintreten, wo die Luft in dem Pumpenstief nicht mehr durch den Kolben austritt; wo sie nicht mehr imstand das Ventil zu heben, sondern nur in dem Raume b komprimiert wird weiteren Auf- und Niedergängen des Kolbens tritt daher keine Luft aus dem Recipienten in den Pumpencylinder und aus diesem durc Kolben in die äufsere Luft, sondern es wird nur die in dem Raume haltene Luft abwechselnd ausgedehnt und komprimiert.

Babinets Hahn. Um diesen störenden Umstand auf ein Mi zurückzuführen, hat Babinet zur Luftpumpe einen besondern nac benannten Hahn hinzugefügt. Derselbe befindet sich in der Axe der welche die von beiden Pumpenstiefeln kommenden Kanäle verbinde mittelbar unter denselben. Dieser Hahn hat zunächst eine ⊤-fö Durchbohrung, so dafs die Quer bohrung der beiden Pumpenstief der in der Axe des Hahnes gef Längsdurchbohrung, und da die Fortsetzung des zur Glocke füh Kanals ist, mit diesem in Verbindun In der Stellung Fig. 174a, sie ist a Hahn gewöhnlich mit 2 bezeichn also die Verbindung der innern Te Maschine die bisher von uns angenon Anders aber, wenn man den Hahn u dreht, ihn in die Stellung Fig. 174b Die Durchbohrung des Hahnes ist so, dafs der eine Pumpenstiefel no der Glocke in Verbindung steht, d dere jedoch nicht mehr. Dafür durch eine andere Durchbohrung de nes, die in der Figur durch die punk Linien angedeutet ist, dieser Stief dem ersten Stiefel in Verbindung. Geht nun der Kolben in dem Stiefel in die Höhe, so tritt die Luft aus dem Recipienten in ihn geht er herab und der Kolben des zweiten Stiefels in die Höhe, so der letztere nicht Luft aus dem Recipienten, sondern die Luft au ersten Stiefel in diesen. Dadurch wird also die Luft aus dem schä Raume des mit dem Recipienten in Verbindung stehenden Stiefel gepumpt, und man kann die Verdünnung viel weiter treiben als vor weit, dafs die zurückbleibende Luft nur weniger als 1^{mm} Druck aus imstande ist.

Fig. 174a.

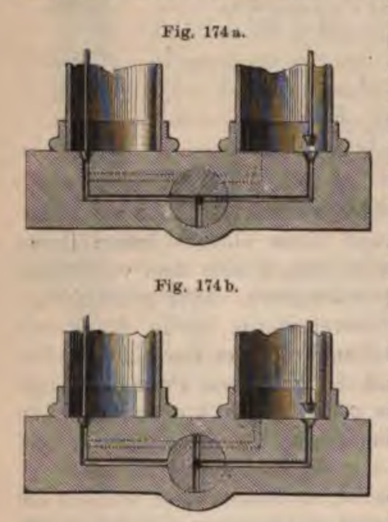


Fig. 174b.

Hahn zum Wiedereinlassen der Luft. Ist unter der Gloc Luftpumpe der verdünnte Raum hergestelllt, so wird dieselbe dur Druck der äufsern Luft so festgehalten, dafs es nicht möglich ist, s zuheben. Es ist deshalb nötig, eine Vorrichtung anzubringen, um d selbe wieder einlassen zu können. Dazu dient der unter dem 72) angebrachte Hahn. Derselbe hat ebenfalls mehrfache

bohrungen, um den Teller der Luftpumpe vollständig absperren zu können, zugleich aber in die Pumpe Luft einlassen zu können.

Zunächst ist er quer durchbohrt und setzt in der Stellung (Fig. 175) die Glocke mit der Pumpe in Verbindung. Aufser dieser Durchbohrung hat er noch eine zweite (Fig. 176), welche im Innern des Kanales rechtwinklig umbiegt, und die in einem zu dem in Fig. 175 gezeichneten senkrechten Durchschnitt liegt. Dieser Kanal mündet in der äufsern Luft und kann durch einen Stift luftdicht geschlossen werden, damit in der Stellung Fig. 175 keine Luft durch diesen Kanal eintreten kann. In der Stellung Fig. 176 setzt der Hahn die Glocke der Luftpumpe mit der äufsern Luft in Verbindung; er dient also zum Einlassen der Luft in die Glocke. In der Stellung Fig. 177, in welcher der Hahn gegen Fig. 176 um 180° gedreht ist, ist die Glocke, der Recipient, sowohl von der äufsern Luft als von der Pumpe abgesperrt, dagegen kommuniciert jetzt die Pumpe mit der äufsern Luft.

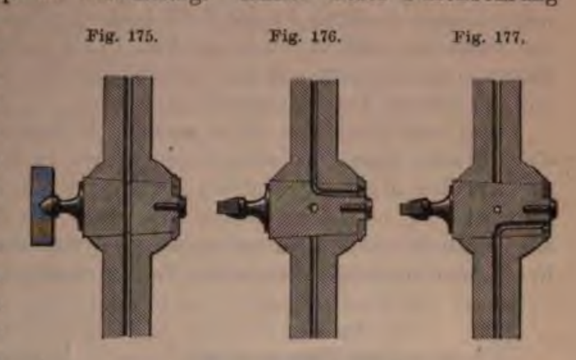


Fig. 175. Fig. 176. Fig. 177.

Auf dem Griffe des Hahnes sind die Stellungen gezeichnet, auf der einen Seite steht R und auf der andern F. In Fig. 176 ist der Buchstabe R (rentrée) oben, die Luft kann in die Glocke zurücktreten; in Fig. 177 ist F (fermée) oben, die Glocke ist abgesperrt.

Anstatt der zweistiefeligen Ventilluftpumpen werden auch vielfach zweistiefelige Hahnluftpumpen angewandt, besonders ausgezeichnet sind die der Berliner Mechaniker Schulze und Kleiner Die Verbindung des Tellers mit den Pumpenstiefeln ist dieselbe wie bei den Ventilluftpumpen, die wir bisher beschrieben haben; die Kolben in diesen Pumpen sind ganz massiv, und der wesentlichste Unterschied zwischen diesen und den Ventilpumpen besteht in der Einrichtung des Hahnes, der an der Stelle des Babinetschen Hahnes angebracht ist, um beim Aufsteigen des Kolbens den Pumpenstiefel mit dem Recipienten, beim Niedergange aber mit der äufsern Luft in Verbindung zu setzen, des nach seinem Erfinder benannten Grassmannschen Hahnes.

Die Einrichtung dieses Hahnes und seine Verbindung mit der Pumpe zeigen Fig. 178 und 179. Von dem Boden der beiden Stiefel L und R führt, gerade wie bei der Ventilpumpe, eine Durchbohrung zu dem mittlern Kanal, der den Hahn in sich aufnimmt.

An der Stelle, wo das von dem Teller der Pumpe herkommende Rohr in den Kanal mündet, ist der Hahn quer ganz durchbohrt, bei h; von der Mitte dieser Querdurchbohrung geht durch den Hahn schräg hindurch ein Kanal hi, der in der Lage Fig. 178 dort aus dem Hahn hervortritt, wo die von dem Stiefel L herkommende Durchbohrung mündet. Eine zweite förmige Durchbohrung des Hahnes kl, welche in dem Griffe des Hahnes

in die äufsere Luft mündet, verbindet dann den von dem Stiefel *R* herkommenden Kanal mit der äufsern Luft.

Zieht man den Kolben *L* in die Höhe, wobei gleichzeitig der Kolben *R* hinabgedrückt wird, so tritt in *L* die Luft aus dem Recipienten, während aus *R* durch *kl* die Luft herausgedrückt wird. Dreht man jetzt den Hahn um 180° in die Lage (Fig. 179), so ist durch den Kanal *hi* die Verbindung des Stiefels *R* mit dem Recipienten, durch *kl* die des Stiefels *L* mit der äufsern Luft hergestellt.

Um schliefslich den Hahn auch als Babinetschen zum Auspumpen des einen Stiefels durch den andern gebrauchen zu können, hat man den Hahn nur aus den oben angedeuteten Stellungen um 90° zu drehen, die dritte Durchbohrung *m*, welche einfach quer durch den Hahn geht, verbindet dann die beiden Stiefel mit einander, während weder eine Verbindung mit dem Recipienten noch mit der äufsern Luft vorhanden ist.

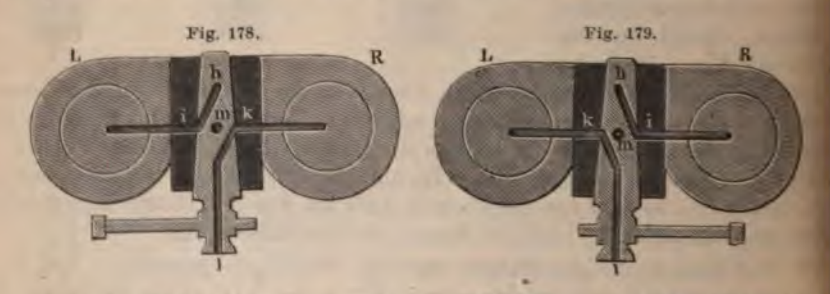


Fig. 178. Fig. 179.

Bei den Hahnluftpumpen mufs man allerdings nach jedem Kolbenhube den Hahn umlegen, also eine Operation mehr vornehmen als bei der Ventilpumpe, da man indes jetzt Stiefel von bedeutender Gröfse nimmt, ist dieser Übelstand nicht sehr grofs. Die Hahnluftpumpen haben dagegen den Vorzug der einfachern Konstruktion und gestatten deswegen im allgemeinen die Verdünnung weiter zu treiben als die Ventilpumpen.

Schliefslich sei noch erwähnt, dafs man statt der zweistiefeligen auch doppelwirkende einstiefelige sowohl Hahn- als Ventilpumpen konstruiert hat, bei welchen der Stiefel beim Aufsteigen des Kolbens unten, beim Niedergange oben mit dem Recipienten in Verbindung steht. Bei diesen Pumpen wird gleichzeitig das Auf- und Niedergehen des Kolbens durch die kontinuierliche Rotation eines Rades erzeugt, durch einen Mechanismus, der demjenigen ganz ähnlich ist, den wir später bei dem Nattererschen Apparat beschreiben werden. Vortreffliche Pumpen dieser Art konstruieren Staudinger in Giefsen, Schulze in Berlin und Bianchi in Paris.

Eine eigentümliche doppelwirkende einstiefelige Ventilluftpumpe hat vor kurzem Deleuil konstruiert[1]), welche sich von den eben erwähnten dadurch unterscheidet, dafs der Kolben nicht dicht an dem Stiefel anliegt, sondern dafs zwischen ihm und der Stiefelwandung ein Zwischenraum von etwa $^1/_{20}$ mm ist, es sind die sogenannten Pumpen à piston libre. In dem kapillaren Zwischenraum zwischen Kolben und Stiefel cirkuliert die Luft

[1]) *Deleuil*, Comptes Rendus. T. LX. p. 571. Repertorium für physikalische Technik von Carl. Bd. I.

langsam; indem man nun den Kolben recht lang nimmt, gleich dem
n Durchmesser des Stiefels, und da auf dem gröfsten Teile des
den der Kolben zurücklegt, die Luft an beiden Seiten desselben
wenig verschiedene Dichtigkeit hat, kann man trotz des nicht
Anliegens des Kolbens verdünnte Räume herstellen, in denen die
etwa mehr 10^{mm} Quecksilberdruck hat. Die Maschine geht, da
en nicht reibt, leichter wie die andern Pumpen, sie hat zugleich
ug, dafs der Kolben nicht gefettet wird.

§ 108.

l der Körper im luftleeren Raum. In § 89 erwähnten wir
dafs wegen des Daseins der Luft nicht alle Körper gleich schnell
fs wir aber die im ersten Kapitel des ersten Abschnittes
te Proportionalität von Gewicht und Anziehungskraft
it den Satz, dafs alle Körper gleich schnell fallen,
die specifisch leichtesten Körper mit der Luftpumpe
en könnten. Zu dem Ende wendet man eine Röhre an,
der einen Seite in eine Metallfassung eingekittet ist,
e mit einem Hahn versehene Röhre übergeht, welche
auf das Schraubengewinde der Luftpumpe passende
nmutter endigt. Das andere Ende der Röhre ist durch
llfassung luftdicht geschlossen.

Fig. 180.



iese Röhre bringt man ein Schrotkorn und eine Flaum-
er ein Stückchen Platin und ein Stückchen Papier,
sie auf die Luftpumpe und macht sie so luftleer als
Darauf schliefst man den Hahn, schraubt die Röhre
und kehrt sie um. Die in der Röhre enthaltenen
llen dann herab, und man sieht, dafs die Flaumfeder
lben Augenblicke unten ankommt wie das Schrot-
, das Stück Papier ebenso rasch fällt als das Stück

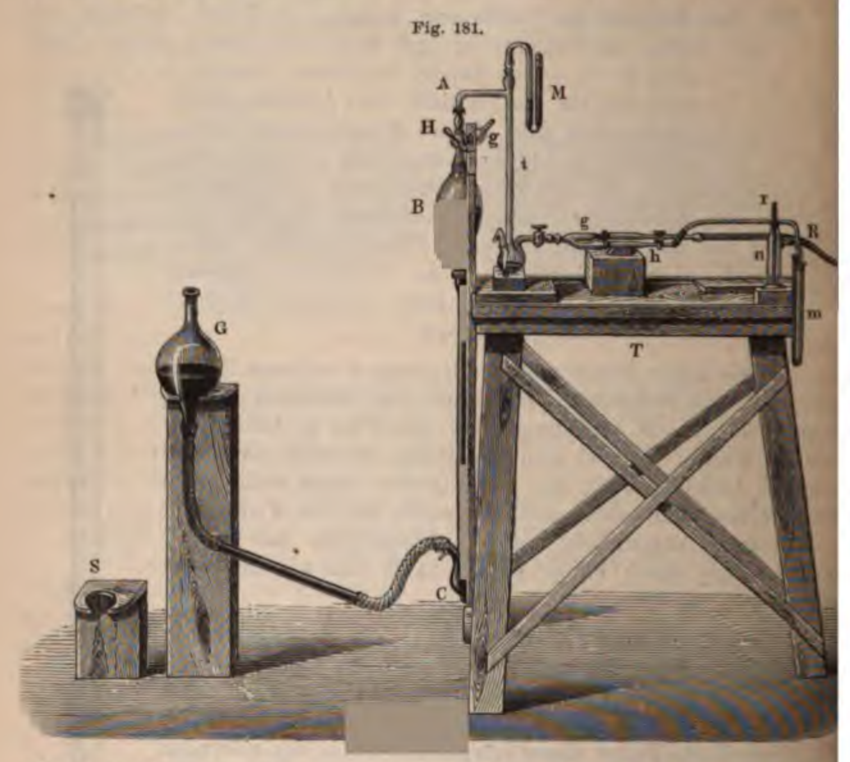
t man dann durch teilweises Öffnen des Hahnes all-
wieder Luft in die Röhre eintreten, so sieht man, wie
len die leichtern Körper immer mehr zurückbleiben,
r die Luft wird; ein Beweis, dafs die ungleiche Ge-
keit des Falles dieser Körper nur Folge des störenden
der Luft ist.

Reihe von Versuchen, welche gewöhnlich mit der
e angestellt werden, um die Existenz des Luftdruckes
isen, als das Zersprengen einer über einen Cylinder
n Blase, das feste Aneinanderhaften der sogenannten
ger Halbkugeln u. s. f., genüge es, hier erwähnt zu
Sie haben viel von ihrem Interesse verloren, welches
r darboten, als sie dazu dienten, den grofsen Druck
isen, und beitrugen, das Phantom des Horror vacui zu
n.

§ 109.

Quecksilberluftpumpen. Eine von den bisher besprochenen durch aus verschiedene Form der Luftpumpen ist die zuerst von Dr. Geissler i Bonn konstruierte Quecksilberluftpumpe[1]). Bei dieser wird die Pumpe er setzt durch eine barometerartige Vorrichtung, in welcher durch Heben un Senken von Quecksilber die Toricellische Leere hergestellt wird, mit d dann diejenigen Apparate verbunden werden, aus welchen die Luft entfern werden soll. Die Einrichtung dieser Pumpe, mit einem sehr bequeme Gestell, zeigt Fig. 181. An einem festen an den Tisch T angeschraubte Brette ist die bei B mit einer etwa 1,5 Liter enthaltenden birnförmig Erweiterung versehene oben und unten offene Glasröhre AC befestig

Fig. 181.



Unten bei C ist die Röhre umgebogen und auf die Umbiegung ein dick Kautschukschlauch gezogen, der die Röhre AC mit dem Gefäſse G in Ve bindung setzt. In die Röhre AC ist bei H ein Glashahn eingesetzt, der ganz ähnlicher Weise wie der § 107 Fig. 176 beschriebene Hahn zu Einlassen der Luft in die Pumpe durchbohrt ist. Die eine nach auſs

[1]) *Poggendorf* weist zwar nach (Poggend. Ann. Bd. CXXV), daſs die Id der Quecksilberpumpe sehr alt, ja fast ebenso alt als die der gewöhnlich Luftpumpe ist; man wird aber trotzdem *Geissler* als den Erfinder dieser Luftpumpen bezeichnen müssen, da er der Erste war, der (1857) eine prakti ...nutzte Pumpe konstruierte.

nde Durchbohrung mündet in das kleine an den Hahn angeschmolzene
gefäfs g, die andere Durchbohrung geht quer durch den Hahn. Die
e AC ist oben konisch ausgeschliffen, und in dieses Ende ist das Ende
⊤-förmigen Rohres t luftdicht eingeschliffen. Dieses ⊤-förmige Rohr
einerseits das Manometer M, welches luftdicht in das obere Ende des
es t eingeschliffen ist, andererseits mündet das Rohr t in ein kleines
wasserfreier Phosphorsäure halb gefülltes Gefäfs, von dem aus das
lförmige Glasrohr g einerseits zu den Apparaten führt, welche luftleer
mpt werden sollen, andererseits durch das U-förmig gebogene Rohr m
die doppelhalsige Flasche n in die freie Luft führt. Letztere Ver-
ung dient dazu, nach dem Auspumpen wieder Luft einzulassen, und zu
Ende ist in dieselbe ein einfach durchbohrter Glashahn h eingesetzt,
so lange die Pumpe luftleer sein soll, geschlossen bleibt. Die Röhre m
die Flasche n sollen die in die Pumpe eintretende Luft vollkommen
ocknen. Die Flasche n ist zu dem Ende einige Centimeter hoch mit
entrierter Schwefelsäure gefüllt, so dafs das in den Hals der Flasche
icht eingesetzte an beiden Enden offene Rohr r, durch welches die Luft
n Apparat eindringen kann, unter der Schwefelsäure mündet. Alle in
Apparat eintretende Luft mufs deshalb zunächst durch diese Schwefel-
, dann durch das mit Chlorcalcium oder mit in Schwefelsäure ge-
ten Bimsteinstücken gefüllte Rohr m, und wird so aller Feuchtigkeit
ıbt.

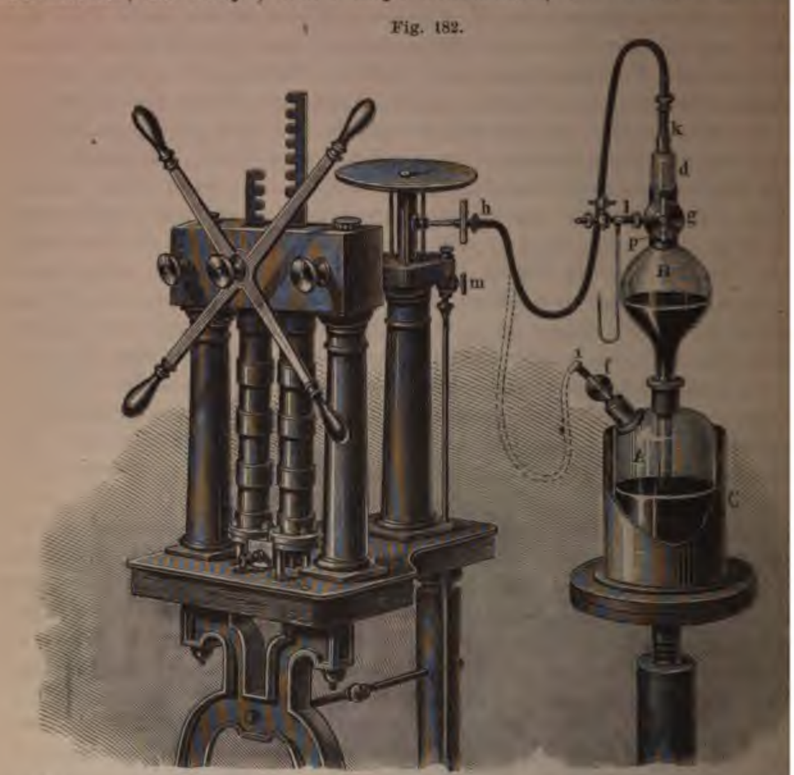
Um die Pumpe zu gebrauchen, wird das Gefäfs G, dessen Inhalt etwas
er ist als derjenige des Rohres AC, mit Quecksilber gefüllt. Wird der
H dann so gestellt, dafs das Rohr BC durch denselben mit der
rn Luft kommuniciert, so steigt das Quecksilber im Rohr BC zunächst
ur Höhe des Niveaus im Gefäfse G. Man hebt dann das Gefäfs G so
, dafs das Niveau des in ihm vorhandenen Quecksilbers etwas höher
als der Hahn H, das Quecksilber steigt dann in BC bis zur selben
, vertreibt alle Luft aus demselben und dringt schliefslich in kleinen
fen durch den Hahn in die Kugel g. Man dreht dann den Hahn H
einen kleinen Winkel und senkt G bis zu dem Schemel S, auf
en man dasselbe aufsetzt. Da der Schemel S um mehr als 760^{mm}
steht als die birnförmige Erweiterung B, so sinkt das Quecksilber
dieselbe hinab, und stellt in demselben ebenso einen vollkommen
n Raum her, wie ein solcher im Barometer über dem Quecksilber sich
let. Dreht man dann den Hahn H so, dafs der Raum des Rohres t
durch dasselbe die auszupumpenden Gefäfse mit diesem leeren Raum
rbindung gesetzt werden, so tritt aus jenen die Luft in diesen hinein,
e wie sie aus dem Recipienten in den ausgepumpten Stiefel hineintritt.
dreht dann den Hahn wieder zurück, so dafs BC mit der äufsern Luft
nuniciert, und wiederholt die Operationen in der angegebenen Weise.

Wegen des grofsen Gewichtes des zu hebenden Quecksilbers kann eine
Luftpumpe immer nur in kleinen Dimensionen ausgeführt werden,
in gröfsern, als sie vorhin angegeben wurden; deshalb ist die Pumpe
eeignet, um kleinere Apparate auszupumpen. Bei diesen gestattet sie
da in der Pumpe kein schädlicher Raum ist, und da die Glasver-
ngen weit dichter hergestellt werden können, ein weit vollkommneres
um herzustellen als die gewöhnlichen Luftpumpen. Wir werden die

Wirksamkeit der Pumpe näher kennen lernen, wenn wir in der Elektrici lehre die Herstellung der Geisslerschen Röhren besprechen[1].

Um das immerhin lästige Heben und Senken des Gefäſses G beque zu machen, hat Jolly[2]) eine Pumpe konstruiert, bei welcher das Gefäl

Fig. 182.



auf einem Tische steht, welcher durch eine Kurbel und ein Zahnrad hoben und gesenkt werden kann. Auſserdem hat Jolly die Glashähne Hähne von Guſsstahl ersetzt, welche ebenso dicht halten als Glashähne

Poggendorff[3]) hat die Geisslersche Pumpe mit der gewöhnlichen Pu

---

[1]) Eine von der Geisslerschen abweichende Pumpe, indem sie alle H entbehrlich macht, hat *Töpler* konstruiert; dieselbe ist beschrieben von *E. W mann* in Wiedemanns Annalen Bd. X. *Töpler* erreicht das dadurch, da oberhalb des Gefäſses B statt des Hahnes eine später vertikal abwärts geb Röhre, deren abwärts gebogener Schenkel 800^{mm} lang ist, ansetzt, welche Quecksilber mündet. Die Röhren, welche zu dem auszupumpenden führen, werden unterhalb B angesetzt, und dann erst etwa 900^{mm} vertikal wärts geführt. Man hebt dann das Gefäſs G, bis das Quecksilber durch d Stelle des Hahnes angebrachte Röhre abflieſst, und abflieſsend alle Luft d das Quecksilber, in dem sie mündet, austreibt. Senkt man dann G, so das Quecksilber in dieser Röhre bis zu einer durch die erreichte Verdü bedingten Höhe stehen. Das Quecksilber dieser Röhre bildet somit ein V das die Luft aus der Pumpe heraus, aber nicht zurück treten läſst.

[2]) *Jolly*, Repertorium für physikalische Technik von Dr. Ph. Carl. München 1866.

[3]) *Poggendorff*, Poggend. Ann. Bd. CXXV.

rbunden, um des Hebens des Quecksilbers ganz überhoben zu sein. Die Poggendorffsche Einrichtung zeigt Fig. 182. In den obern Hals der doppelt tubulierten grofsen mit Quecksilber gefüllten Flasche A, welche in dem Holzgefäfse C steht, ist der lange untere Hals des eiförmigen Gefäfses B, welcher bis fast auf den Boden von A reicht, luftdicht eingeschliffen. Der weite Tubulus der Flasche A kann durch einen einfach durchbohrten ahn f entweder luftdicht geschlossen, oder mittels eines auf die Dille i fgesetzten festen Schlauches mit der Luftpumpe verbunden werden.

Der obere kurze Hals des Gefäfses B ist mit einer Fassung versehen, ren durch den Hahn g verschliefsbare Durchbohrung zu dem luftdicht in Fassung gekitteten Gläschen d führt, welches auf seinem Halse die aufkittete eiserne Dille k trägt. Der Hahn g ist doppelt durchbohrt; steht r Griff, wie in der Zeichnung, vertikal, so setzt er einfach das Gläschen d t dem Gefäfs B in Verbindung; wird er um 45° gedreht, so sperrt er B n g ab, wird er um 90° gedreht, so dafs der Griff horizontal ist, so verndet er das Gefäfs B mit dem Seitenkanal l, an dem die Gegenstände festigt werden, welche mit der Pumpe evakuiert werden sollen.

Um mit dieser Pumpe zu arbeiten, wird zunächst das Ende k mit der ftpumpe verbunden, der Hahn f geöffnet und g so gestellt, dafs d mit B mmuniciert; durch einige Kolbenhübe der Luftpumpe steigt dann das ecksilber bis in das Fläschchen d. Dann wird der Hahn g geschlossen, d anstatt der Dille k die mit i bezeichnete mit der Luftpumpe verbunden d durch einige Kolbenzüge die Luft in A so weit verdünnt, dafs das ecksilber bis in den Hals des Gefäfses B hinabsinkt. Auf diese Weise tsteht in B ebenso die Barometerleere, wie in der Pumpe von Geissler rch das Sinken des Quecksilbergefäfses. Verbindet man dann durch ehung des Hahnes g die zu evakuierenden Gegenstände mit B, so strömt s denselben die Luft in den leeren Raum. Das weitere Auspumpen gechieht dann durch Wiederholung derselben Operationen.

Die Poggendorffsche Vorrichtung unterscheidet sich, wie man sieht, n der Geisslerschen Pumpe durchaus nicht, und auch die Quecksilbernge, welche zu derselben gebraucht wird, ist bei gleicher Kapacität des fäfses B ganz dieselbe, sie vermeidet nur das Heben und Senken des ecksilbers durch Anwendung der Luftpumpe.

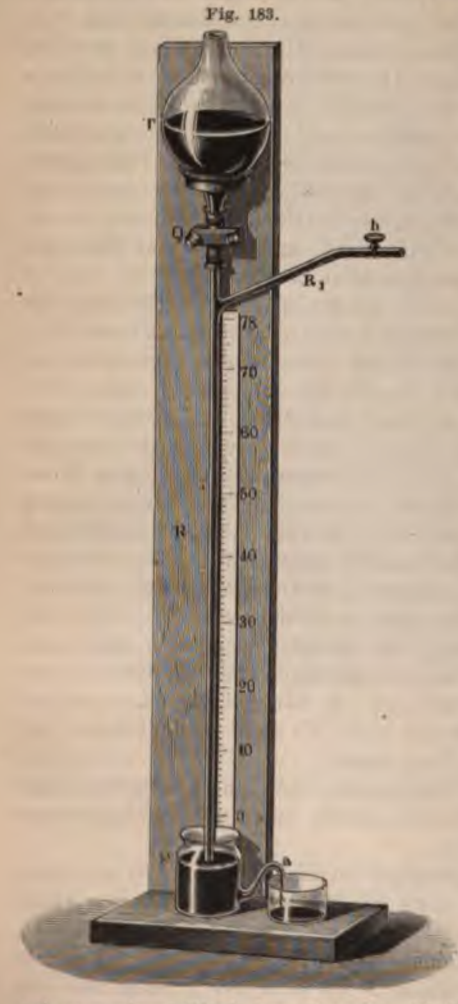
Eine auf einem ganz andern Princip beruhende Quecksilberluftpumpe die von Sprengel angegebene[1]); dieselbe beruht auf den § 84 abgeleiteten tzen über den hydraulischen Druck.

An ein trichter- oder flaschenförmiges Gefäfs T (Fig. 183) ist unten t einem Kautschukschlauch eine etwa 800^{mm} lange dickwandige Glashre von überall gleichem etwa 2^{mm} grofsem Durchmesser angehängt, ren unteres offenes Ende in ein kleines mit seitlichem Ausflufsrohr a vernenes Gefäfs F mündet. An das Rohr R ist etwa 30^{mm} unterhalb des utschukschlauches eine seitliche Röhre R_1 angeschmolzen, in welche man h passend einen Glashahn einsetzt. Diese Röhre führt zu den Appaen, welche mittels der Pumpe luftleer gemacht werden sollen. Über n Kautschukschlauch ist ein Quetschhahn gelegt, durch welchen man den

[1]) *Sprengel*, Journal of Chemical Society II. Ser. vol. III. Poggend. Ann. CXXIX. p. 564.

Schlauch schliefsen kann. Um die Pumpe wirken zu lassen, füllt ma
Trichter mit Quecksilber, öffnet durch einen Druck auf den Quetsc
den Kautschukschlauch und läfst das Quecksilber in einem stetigen
ausfliefsen. Die durch die Röhre R_1 mit dem Apparat verbundenen
werden dann allmählich leer gepumpt, indem die Luft durch das
vorbeifallende Quecksilber mitgerissen und unten aus dem Rohre

Fig. 183.



getrieben wird. Hat der A
die angeführten Dimension
kann man ziemlich vollst
Barometerleere durch fortge
Ausfliefsen erhalten. Es
sich das unmittelbar aus de
ten Gleichung des § 84.
wir h die Tiefe des Ansatzro
unter dem Niveau des Queck
in T, H den Abstand der
Ausflufsöffnung von dem
Niveau, p_0 den Druck der
sphäre, der auf dem obern
des Quecksilbers lastet und
in der Ausflufsöffnung wirkt
der bei R_1 vorhandene hydra
Druck

$$p = p_0 - s(H - h)$$

Ist nun $H - h$, die Län
Quecksilbersäule unterhal
gleich der Höhe des Baro
so ist $p = 0$, es wird al
den mit R_1 verbundenen R
in die Röhre R die Luft
so hereingezogen wie in den
Raum des Barometers, un
halb jeder mit R_1 verb
Raum durch fortgesetztes P
ebenso weit entleert wie m
andern Quecksilberluftpump

Man kann natürlich di
bindung des Fallrohrs mi
Gefäfse T anstatt durch
Kautschukschlauch auch d
herstellen, dafs man mit Zwi
setzung eines Glashahns dasselbe direkt an das Gefäfs anschmilzt.
ist diese Befestigung nicht ratsam, da bei häufigem Gebrauche der
durch die Erschütterung infolge der Stöfse des fallenden Quecksilbe
Fallrohr Sprünge bekommt und erneuert werden mufs.

Auf ganz demselben Princip wie die Sprengelsche Pumpe beru
sche Wasserluftpumpe, in welcher nur das Quecksilber durch
t; bei dieser mufs natürlich das Fallrohr der geringern D

keit des Wassers entsprechend länger sein; gibt man dem Fallrohr eine Länge von etwa 8 Meter, so kann man mit der Bunsenschen Pumpe in den auszupumpenden Räumen den Druck bis auf etwa 0,25 Atmosphären vermindern.

§ 110.

Die Kompressionsmaschine. Die Kompressionsmaschinen haben eine derjenigen der Luftpumpe entgegengesetzte Aufgabe, sie dienen dazu, um in irgend einem Raume die Luft zu verdichten. Die Fig. 167 dargestellte Hahnluftpumpe kann ohne jede konstruktive Veränderung unmittelbar auch als Kompressionspumpe benutzt werden. Bei der Benutzung mufs nur das Spiel der Hähne umgekehrt werden. Öffnen wir den Hahn l, wenn der Kolben zurückgezogen wird, so tritt von aufsen her gerade so Luft in den Cylinder, wie bei der frühern Benutzung aus dem Recipienten, schliefsen wir beim Rückgange des Kolbens den Hahn l und öffnen h, so wird die Luft in den Recipienten geprefst. Es ist klar, dafs in diesem Falle der Recipient auf dem Teller der Pumpe befestigt werden mufs, da die im Innern desselben verdichtete Luft sonst denselben aufhebt. Ebenso wie die einstiefelige kann auch die zweistiefelige Hahnluftpumpe mit dem Grassmannschen Hahne unmittelbar als Kompressionspumpe gebraucht werden, indem man einfach den Hahn bei dem Pumpen umgekehrt legt.

Die Ventilluftpumpen können nicht so unmittelbar als Kompressionsmaschinen verwandt werden, bei ihnen müssen die Ventile sich in entgegengesetzter Richtung, also anstatt von unten nach oben, von oben nach unten öffnen. Wird dann (Fig. 169) der Kolben aufgezogen, so öffnet sich durch den Druck der äufsern Luft das Ventil l des Kolbens, dagegen verschliefst sich durch den Druck der Luft im Recipienten das Ventil h, während vorher umgekehrt l durch den Druck der äufsern Luft sich schlofs und h durch den der im Recipienten enthaltenen Luft sich öffnete. Wird dann der Kolben herabgedrückt, so schliefst sich das Ventil l, weil jetzt der Druck im Cylinder A gröfser wird als der der äufsern Luft. Ist die Luft im Cylinder dann bei weiterm Niedergang des Kolbens stärker komprimiert als die Luft des Recipienten, so öffnet sich das Ventil h und die Luft wird aus dem Cylinder in den Recipienten geprefst. Durch Wiederholung der Operation kann man die Luft im Recipienten sehr weit verdichten; man gelangt aber auch hier zu einer Grenze, welche man mit einer gegebenen Pumpe nicht überschreiten kann.

Wegen der nicht vollkommenen Dichtigkeit des Apparates wird von einem gewissen Augenblicke an aus demselben ebensoviel Luft entweichen, als beim Aufziehen des Kolbens geschöpft wird. Wegen des Vorhandenseins des schädlichen Raumes wird man ferner bei sehr grofser Verdichtung der Luft im Recipienten dahin gelangen, dafs selbst in der tiefsten Stellung des Kolbens die Luft im Cylinder nicht dichter ist als die im Recipienten gesammelte Luft, dann wird sich das Ventil h nicht mehr öffnen können, dann der von innen aus auf dasselbe ausgeübte Druck gleich ist dem im Cylinder her wirkenden. Ferner mit der Dichtigkeit der abgesperrten Luft nimmt der von unten her auf den Kolben wirkende Druck sehr rasch zu, und bald wird man dahin gelangen, dafs, wenn nicht der Querschnitt des Kolbens sehr klein ist, man denselben nicht mehr ganz herabdrücken kann.

Man hat auch Kompressionspumpen mit zwei Stiefeln konstr welche äufserlich gerade so eingerichtet sind, als die bisher beschrie zweistiefeligen Luftpumpen, jedoch mit dem Unterschiede, dafs die V sich alle in entgegengesetzter Richtung öffnen und schliefsen. Indes sich dieselben nicht bewährt und man findet sie daher äufserst selten geführt.

Die am häufigsten zur Anwendung kommenden Kompressionspu sind einfache Röhren von starkem Eisen oder Messing, in denen ein m Kolben auf- und abgeht. Dieselben werden an das mit dem entsprech Verschlusse versehene Gefäfs, welches die verdichtete Luft aufnehme

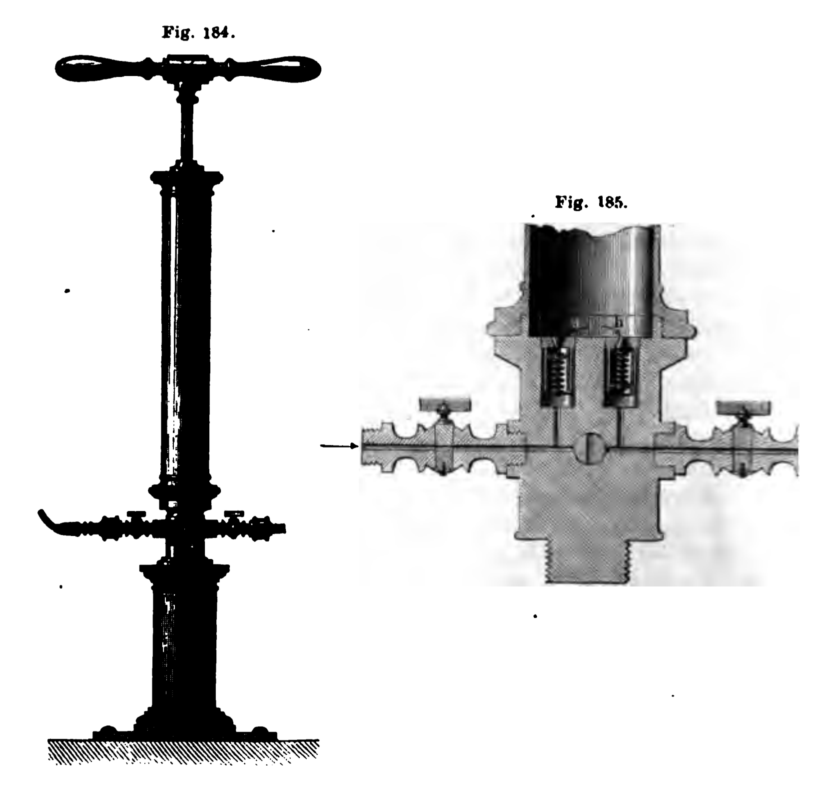


Fig. 184. Fig. 185.

angeschraubt. Zum Schöpfen der Luft dient dann ein Loch in der welches nahe an dem andern Ende der Röhre sich befindet, so d Kolben in seiner äufsersten Stellung sich über demselben befindet, d also frei in den innern Raum des Cylinders unter dem Kolben ei kann. Derart sind z. B. die kleinen Kompressionspumpen, deren m bedient, um die Luft in dem Kolben der Windbüchse zu komprimie

Eine etwas andere Einrichtung der Kompressionspumpe zeigt Fi und Fig. 185. Sie dient zugleich, um andere Gase als atmosphärisch in einem Raume zu verdichten.

Pumpe ist einstiefelig, sie wird auf den Boden fest aufgesch ge des ganz massiven Kolbens befindet sich oben ein Ha

man mit beiden Händen faſst, und an dem man den Kolben ab-
selnd auf und nieder bewegt. In dem Boden der Pumpe sind zwei
le *a* und *b*, deren eines sich von unten nach oben öffnet und den
enstiefel mit der freien Luft oder mit dem Gefäſse in Verbindung
in welchem das zu verdichtende Gas angesammelt ist; es öffnet sich,

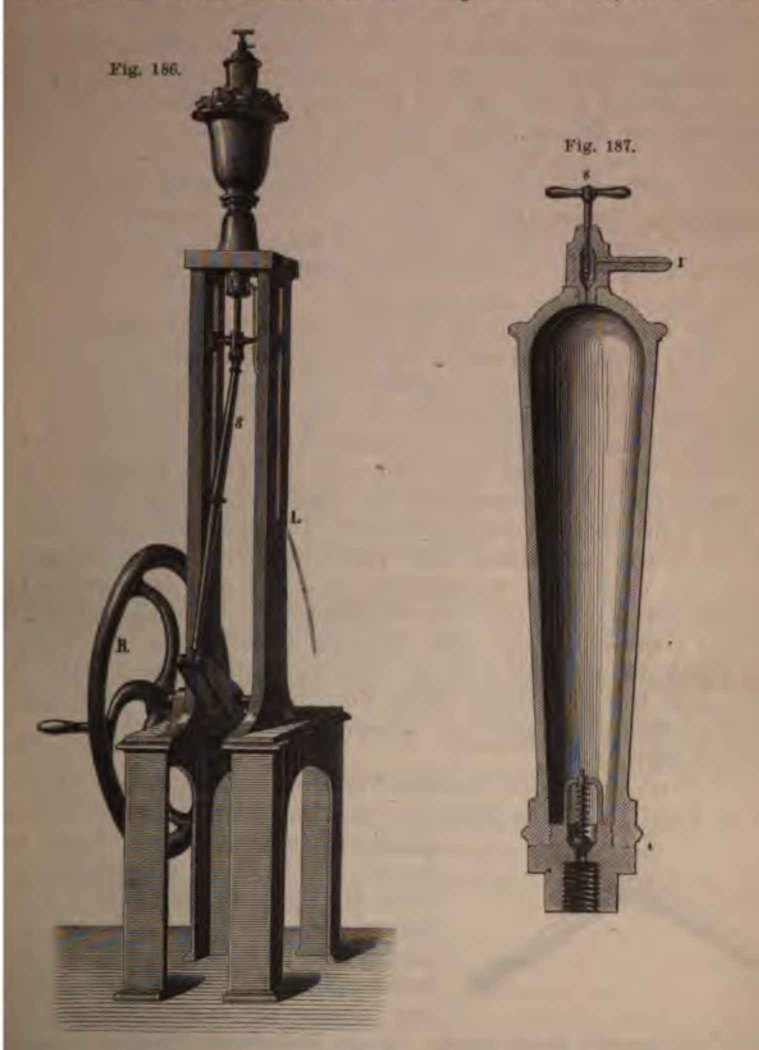


Fig. 186.

Fig. 187.

man den Kolben in die Höhe zieht. Das andere Ventil *b* öffnet sich
gegengesetzter Richtung, wenn der Kolben niedergeht. Dieses setzt
ylinder der Pumpe durch die Röhrenleitung *bd* mit dem Raume in
ndung, in welchem das Gas komprimiert werden soll.

Man sieht, daſs dieser Apparat zugleich als Luftpumpe und auch als
ressionspumpe dienen kann. Bringt man die mit dem Ventil *a* in Ver-
ng stehende Röhre mit einem Recipienten in Verbindung und läſst

die Röhrenleitung *bd* mit der äufsern Luft kommunicieren, so dient der Apparat als Luftpumpe, macht man die Verbindungen umgekehrt, als Kompressionsmaschine.

Eine Kompressionspumpe, welche sehr starke Verdichtungen hervorzubringen imstande ist, bietet der Apparat von Natterer. Er dient vorzugsweise dazu, um Gase in den flüssigen Zustand zu versetzen.

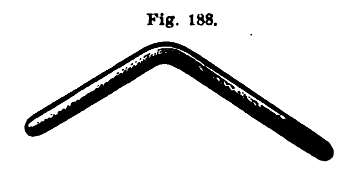
Der Nattererscbe Apparat (Fig. 186) besteht im wesentlichen aus einem dickwandigen Rohr *l* von sehr kleinem innern Durchmesser, in welchem sich ein massiver Kolben auf und ab bewegt. Zur Sicherung der vertikalen Bewegung des Kolbens ist derselbe durch einen Ring geführt. Unterhalb desselben ist mit dem Kolben durch ein Scharnier die Schubstange *s* in Verbindung, die ihre auf und nieder gehende Bewegung durch das Schwungrad R bekommt, an dessen Axe sie mittels einer Kurbel excentrisch befestigt ist.

Der Pumpencylinder ist durch eine Röhrenleitung *L* mit einem Gasometer in Verbindung, aus welchem beim Niedergange des Kolbens das Gas in den Pumpencylinder eingesaugt wird.

Auf den Pumpencylinder ist eine starke Flasche von Schmiedeeisen (Fig. 187) befestigt, in welche das Gas hineingeprefst wird. Dieselbe ist vorher auf ihre Festigkeit geprüft, indem man mittels Wasser auf die Innenfläche derselben einen Druck von 150 Atmosphären ausübt. Das sich nach dem Innern der Flasche zu öffnende Ventil *l* (Fig. 187) läfst das Gas eintreten. Um das verdichtete Gas oder das flüssig gewordene austreten zu lassen, ist an dem obern Ende der Flasche eine kleine Öffnung, welche in dem Röhrchen *r* mündet, angebracht. Dieselbe wird verschlossen durch den mit einem Schraubengewinde versehenen Stift *s*, der konisch in den engen Hals der Flasche eingeschliffen ist. Will man das flüssige Gas ausströmen lassen, so schraubt man die Flasche ab, kehrt sie um, so dafs die Öffnung *r* unten ist, und öffnet dieselbe durch Drehen der Schraube s. Der Druck des über dem flüssigen stark verdichteten Gases treibt dann die Flüssigkeit heraus. Aufser diesen Kompressionspumpen kann man auch den Örstedschen Apparat zur Kompression der Gase benutzen, wie es Despretz that (§ 98).

Vielfach dient auch folgendes Verfahren dazu, um ganz ohne mechanische Mittel ein Gas zu komprimieren. Man schliefst in eine heberförmig gebogene Röhre von starkem Glase die Substanzen, durch deren Einwirkung auf einander das Gas entwickelt wird. Durch die Entwickelung des Gases in diesem geschlossenen Raume und die Ansammlung desselben wird der Druck des Gases in der Röhre ein ganz enormer und es bedarf grofser Vorsicht, damit der Apparat nicht springt. Einen nach diesem Principe konstruierten Apparat wandte Thilorier an, um flüssige Kohlensäure in grofsen Mengen herzustellen[1]).

Fig. 188.



§ 111.

Flüssigmachen der Gase. Im § 99 haben wir das Verhalten der sogenannten permanenten Gase, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlen-

[1]) *Thilorier*, Annales de chim. et de phys. T. LX. 1835.

yd unter hohen mit der Kompressionsmaschine herstellbaren Drucken be-
rochen, und gesehen, dafs dieselben von gewissen schon ziemlich starken
ucken an sehr viel weniger zusammengedrückt werden, als es das Ma-
ttesche Gesetz verlangt, wenn man die Kompression bei gewöhnlicher
mperatur oder auch bei derjenigen des schmelzenden Eises vornimmt.

Unter denselben Umständen verhalten sich die übrigen Gase ganz an-
s; bei diesen zeigt sich vielmehr, dafs mit steigendem Drucke die Kom-
ssibilität stetig wächst bis zu einem gewissen für die verschiedenen Gase
schiedenen Drucke. Ist dieser Druck erreicht, so kann man das Volumen
Gases beliebig, bis zu einer bestimmten Grenze, weiter vermindern,
ne dafs die Spannung des Gases zunimmt, ohne dafs man also den äufsern
uck vermehren mufs. Bei diesem Drucke ändert nämlich das Gas seinen
gregatzustand, es hört auf Gas zu sein, es wird tropfbar flüssig, jede
lumverminderung, welche nach Erreichung jenes Grenzdruckes dem Gase
teil wird, führt die dem verminderten Volumen entsprechende Gasmenge
die flüssige Form über.

Diese Zustandsänderung geht plötzlich vor sich, sie bereitet sich aber
rch stetiges Wachsen der Kompressibilität vor. Daraus ergibt sich schon,
s man die vier genannten permanenten Gase durch Vermehrung des
uckes nicht flüssig machen kann. Es würde, nach der schon § 98 ge-
chten Bemerkung über den Einflufs der Temperatur auf die Kompressi-
tät der Gase, indes voreilig sein, daraus zu schliefsen, dafs dies ein in
Natur der Gase begründeter wesentlicher Unterschied zwischen den
manenten und nicht permanenten Gasen wäre. Es hängt die Fähigkeit
sig zu werden wesentlich von der Temperatur ab, bei der man das Gas
nprimiert.

Eben wegen des Einflusses, den der Wärmezustand des Gases auf die-
Verhalten hat, wollen wir die Frage nach der Kondensation der Gase
lie Wärmelehre verweisen. Wir beschränken uns hier darauf, anzugeben,
che Gase man bei gewöhnlicher Temperatur flüssig machen kann, welche
cke dazu erfordert werden[1]), und welche specifischen Gewichte einige
flüssigen Gase bei der Temperatur des schmelzenden Eises haben[2]).

Bei nicht viel von der des schmelzenden Eises verschiedenen Tempe-
uren werden flüssig:

Name der Gase	Druck, unter welchem sie flüssig werden	Specifische Gewichte bei 0°
Schwefelige Säure	1,5 Atmosphären	1,4333
Cyan	2,4 "	0,866[3])
Ammoniak	4,4 "	0,6362
Arsenwasserstoff	8,6 "	
Schwefelwasserstoff . . .	9,9 "	
Chlorwasserstoff	25,3 "	
Stickstoffoxydul	31,1 "	0,9369
Kohlensäure	37,2 "	0,94695
Ölbildendes Gas	42,5 "	

[1]) *Faraday*, Philos. Transactions of London. R. S. for the year 1845; auch
gend. Ann. Ergänzungsband II.
[2]) *Andreeff*, Liebigs Annalen Bd. CX.
[3]) *Faraday*, a. a. O.

Alle diese Flüssigkeiten besitzen sehr merkwürdige Eigensch welche wir in der Wärmelehre weiter betrachten werden. Es sind im gemeinen sehr flüssige, ungefärbte Flüssigkeiten, welche sich in W nicht, in Alkohol und Äther aber sehr gut lösen.

§ 112.

Molekularwirkungen zwischen festen und gasförmigen Kör Wenn man in einen mit Gas erfüllten Raum einen festen Körper brin zieht derselbe die ihn zunächst umgebenden Gasmoleküle an, und die davon ist eine Verdichtung des Gases an der Oberfläche des festen Kö Je gröfser die Oberfläche des festen Körpers ist, an um so mehr Pu ist er mit dem Gase in Berührung, um so mehr Punkte desselben daher Gasteile an sich, um so mehr Gas wird an der Oberfläch Körpers verdichtet werden. Man kann diese Thatsache leicht durc Versuch beweisen. Füllt man eine oben geschlossene und mit ihrem nen Ende in Quecksilber tauchende Glasröhre mit Kohlensäure, und dann über das Quecksilber in die Glasröhre eine frisch in Quecksilb gelöschte Kohle von Buchsbaumholz, so sieht man, wie sich sofort da lumen des Gases vermindert, indem das Quecksilber in die Glasröhr steigt. So wie die Kohle Kohlensäure, so absorbiert sie sowohl als andere Körper andere Gase.

Die ausgedehntesten Versuche über die Absorption der Gase feste Körper rühren von Theodor von Saussure her[1]).

Zunächst wies derselbe nach, dafs nur geglühte und frisch abgel Körper zu den Absorptionsversuchen brauchbar sind. Der Grund liegt darin, dafs Körper, die längere Zeit an der Luft gelegen habe reits atmosphärische Luft und Wasserdampf an ihrer Oberfläche verd haben. Die ausgeglühten Körper brachte Saussure unter eine Gloc welcher über Quecksilber ein gemessenes Gasvolum aufgefangen wa mafs die eintretende Volumänderung. Er fand dann, dafs ein und selbe Körper verschiedene Gase und verschiedene Körper dasselbe verschiedener Menge absorbierten. So erhielt er z. B. für Buchsbaum und Meerschaum von Valecas folgende Zahlen, welche angeben, wievi ihr eigenes Volum Gas unter dem darunter angeführten Drucke die K absorbieren.

	Kohle	Meerschaum
Ammoniak	90	15
Chlorwasserstoff	85	—
Schwefelige Säure	65	—
Schwefelwasserstoff	55	11,7
Stickstoffoxydul	40	3,75
Kohlensäure	35	5,26
Elayl	35	3,7
Kohlenoxyd	9,42	1,17
Sauerstoff	9,25	1,49
Stickstoff	7,5	1,60
Wasserstoff	1,75	0,44
Druck p =	724^{mm}	730^{mm}.

[1]) ...ure, Gilberts Annalen Bd. XLVII.

Dauer des Versuches war 24—36 Stunden, nach denen keine
des Volumens mehr eintrat; nur bei dem Sauerstoff dauert die
n mehrere Jahre.
sieht, dafs im allgemeinen die absorbierten Gasmengen bei den
nen Körpern in derselben Reihe folgen, und dafs die Gase, welche
h Druck flüssig machen kann, in weit höherem Mafse absorbiert
s die permanenten Gase. Das spricht auf das entschiedenste für
me, dafs wir es hier nur mit einer Molekularanziehung der Mo-
s festen Körpers auf die ihn zunächst berührende Gasschicht zu
n. Dabei ist es jedoch möglich, wie aus der nicht vollständigen
immung der beiden Reihen zu schliefsen ist, dafs auch chemische
mit wirksam sind.
hte Kohle absorbiert weniger Gas als trockne; so fand Saussure
baumkohle

	trocken	feucht
Kohlensäure	33	17
Stickstoff	7,5	6,5
Sauerstoff	9,25	3,25.

über die Gasmenge, welche von den festen Körpern unter ver-
n Drucken absorbiert wird, hat Saussure Versuche angestellt, indes
selben nichts Gesetzmäfsiges ergeben. Bei gemindertem Drucke
t sich das Volum des absorbierten Gases.
so wie Kohle zeigen alle Körper, wenn sie nur eine hinreichende
e besitzen, die Fähigkeit, grofse Mengen Gas zu verdichten, so
e Körper, Platinschwamm etc.
der grofsen Verdichtung des Sauerstoffes der Luft in Platin-
beruht die Wirkung der Döbereinerschen Zündmaschine und
die Fähigkeit des Platins, Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser
den. Bei der Verdichtung der Gase tritt nämlich, wie bei jeder
ion, Wärmeentwicklung ein. Wird nun Platin in ein Gemische
rstoff und Wasserstoff gebracht, oder auf Platinschwamm, der mit
em Sauerstoff erfüllt ist, Wasserstoffgas geleitet, so ist die ent-
Wärmemenge grofs genug, um das Knallgas zu entzünden.
werden später bei Betrachtung des Siedens nochmals Gelegenheit
f die Verdichtung des Gases an der Oberfläche fester Körper zu-
mmen.
cke[1]) leitet aus einer Reihe von Erscheinungen, welche verschie-
solchen Atmosphären verdichteten Gases erfüllte Körper in man-
eziehung zeigen, die uns gröfstenteils im weitern Verlaufe unserer
begegnen werden, den Satz her, dafs die Menge des absorbierten
ht nur mit der Gröfse der Oberfläche, sondern auch mit der Dich-
s kondensierenden Körpers zunimmt; ein Satz, der allerdings aus
hen Gründen viel Wahrscheinlichkeit für sich hat.

§ 113.

ersche Bilder. Moser[2]) hat zuerst beobachtet, dafs, wenn man
n Holzstäbchen über eine glatte Fläche, sei es Metall oder Glas

[1]) *uincke*, Poggend. Ann. Bd. CVIII.
[2]) *Moser*, *Poggend. Ann. Bd. LVI* und LVII.

oder irgend eine andere Substanz, hinführt und dann die Stelle behaucht, dafs dann durch eine Verschiedenheit in dem Beschlagen der Fläche die Züge auf der Fläche deutlich hervortreten. Noch deutlicher zeigen sie sich, wenn man die Fläche Quecksilberdämpfen aussetzt, indem sich die Queck-silberdämpfe entweder vorzugsweise an den berührten Stellen niederschlagen oder an den nicht berührten.

Ebenso zeigte Moser, dafs, wenn man auf eine beliebige Platte ein-geschnittenen Stein, einen gravierten Metallstempel oder irgend einen and Körper legt, nach einiger Zeit, wenn man die Platte behaucht oder sie d Einflusse von Quecksilberdämpfen aussetzt, ein Bild des Steines oder Stem-pels auf der Platte sichtbar wird, indem die Dämpfe sich an den berührt Stellen mehr oder weniger niederschlagen, oder doch ein anderes Aussch bieten, als an den nicht berührten Stellen. Selbst wenn der Stempel d Metallplatte nicht berührte, sondern durch zwei an der Seite untergelegt Glimmerblättchen in einem geringen Abstande davon gehalten wurde, tr nach dem Behauchen das Bild desselben auf der Platte hervor.

Waidele[1] hat diese Bilder auf das vollständigste aus der Gasat sphäre erklärt, welche, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, an d Oberfläche der Körper verdichtet ist, und seine Erklärung durch eine gr Reihe von Versuchen bestätigt.

Durch das Hinüberführen eines Holzstäbchens oder das Aufsetzen ei Stempels, selbst wenn er die Platte nicht unmittelbar berührt, wird e Änderung in der Gasatmosphäre bewirkt, und diese Änderung bewi an den verschiedenen Stellen eine verschiedene Kondensation der Dämp

Um dieses nachzuweisen, versah Waidele Platte oder Stempel m Gasatmosphären, oder nahm sie ihnen und zeigte, dafs er dadurch imst war, die Bilder willkürlich zu ändern.

Dafs eine Änderung der Gasatmosphäre eine verschiedene Kond sation der Dämpfe bewirkt, wies Waidele zunächst durch folgenden V such nach.

Wenn man auf eine mit einer Gasatmosphäre versehene Platte ei Körper von sehr grofser Oberfläche bringt, dem durch Glühen seine G atmosphäre genommen ist, so mufs nach dem Vorigen der Platte ihre G atmosphäre genommen werden. Wenn man daher eine Daguerresche Pl eine mit Silber plattierte Kupferplatte, mit frisch geglühtem und dann u Abschlufs der Luft erkaltetem Trippel oder Kohlenpulver belegt, und d das Kohlenpulver mit reiner Baumwolle abkehrt, so ist der Platte i Gasatmosphäre genommen. Beim Behauchen zeigt diese Platte eine b liche Färbung, während eine an freier Luft gelegene Platte beim Behauc eine bräunliche Färbung zeigt.

Bringt man die Platte aber mit einem Körper in Berührung, der grofser Oberfläche eine dichte Gasatmosphäre besitzt, so wird die Pl an ihrer Oberfläche von dem Körper Gas aufnehmen und verdichten.

Waidele nahm nun eine Daguerresche Platte und belegte die Hälfte derselben mit frisch geglühtem und unter Abschlufs der Luft einem Platintiegel erkaltetem, die andere Hälfte mit frisch geglühtem, in einem Strome von Kohlensäure erkaltetem Kohlenpulver und wi

[1] *Waidele*, Poggend. Ann. Bd. LIX.

Platte mit reiner Baumwolle ab. Beim Behauchen zeigte die eine
ie bläuliche, die andere eine bräunliche Färbung.
rde die Platte in Quecksilberdampf gebracht, so kondensierte sich der-
auf der nicht mit Gas bedeckten Hälfte, die andere Hälfte blieb frei.
sieht man eine Platte mit einer Atmosphäre von Kohlensäure, in-
sie mit Kohlenpulver bedeckt, welches in der angegebenen Weise
t war, und legt dann eine kleine flache Scheibe frisch geglühter
mkohle auf dieselbe, so wird an der Stelle in sehr kurzer Zeit die
phäre fortgenommen; behaucht man die Platte nach Entfernung
lbe, so zeigt sie an der Stelle, wo diese lag, eine bläuliche, im
ine bräunliche Färbung.
tzt man einen Stempel, putzt ihn mit einer durch Alkohol befeuch-
rste, so kann man ihn von seiner Gasatmosphäre befreien. Setzt
so frisch gereinigt auf eine mit Kohlensäure überzogene Platte,
er das Gas von derselben fort. Wird die Platte nach Abheben
Quecksilberdämpfen ausgesetzt, verdichten sich letztere vorzugs-
den vom Stempel berührten Stellen.
t man den Stempel in kohlensäurehaltiges Kohlenpulver und setzt
ine von ihrer Gasatmosphäre befreite Platte, so nimmt die Platte
Stempel Kohlensäure auf. Wird die Platte nach Fortnahme des
behaucht oder Quecksilberdämpfen ausgesetzt, so zeigt sich das
Stempels, indem vorzugsweise an den Stellen sich der Dampf
rt, welche mit dem Stempel nicht in Berührung waren.
t man dagegen einen frisch gereinigten Stempel auf eine frisch
Platte, so zeigt sich so gut wie kein Bild, die Dämpfe werden
sig kondensiert. Dasselbe ist der Fall, wenn man einen mit Kohlen-
sehenen Stempel auf eine mit Kohlensäure bedeckte Platte legt.
dele stellte ferner einen mit Kohlensäure bedeckten Stempel nach
auf sechs verschiedene frisch gereinigte Silberplatten. Auf der
d zweiten liefs er ihn 30 Minuten, es zeigte sich beim Behandeln
ksilberdampf ein deutliches Bild, auf die dritte und vierte Platte
ihn eine Stunde, die dritte zeigte ein Bild, wenn auch schwach,
beim Behauchen nur die Spur eines Bildes. Auf der fünften und
Platte liefs er den Stempel zwei Stunden stehen; sie zeigten gar
nterschied beim Behauchen, es zeigte sich gar kein Bild.
er Versuch beweist auf das allerentschiedenste die Richtigkeit der
hen Erklärung, dafs es eine Änderung der Gasatmosphäre auf
ten sei, welche die Moserschen Bilder erzeugt. Denn bei den
rsuchen war der Stempel mit der dichten Atmosphäre versehen,
r kurzen Zeit von 30 Minuten kondensierte die Platte rings umher
Luft an ihrer Oberfläche, die Bilder wurden deutlich und scharf;
ber die Gasatmosphäre am Stempel abnahm und die Verdichtung
auf der übrigen Platte gröfser wurde, um so undeutlicher wurde

sind also berechtigt, die Moserschen Bilder als eine Folge der
nen Stellen geänderten Gasatmosphäre anzusehen; denn im all-
werden die Gasatmosphären an den verschiedenen Körpern immer
n dicht sein, eine Berührung zweier Körper also auch an der Be-
telle eine Änderung der Dichtigkeit hervorbringen.

Das wird selbst dann der Fall sein, wenn sich die Körper nicht unmittelbar berühren, da die Gasatmosphären eine gewisse Dicke haben müssen, und selbst wenn sie nicht so dick sind, dafs sie in einander übergehen, doch ein Austausch zwischen denselben stattfinden mufs[1]).

§ 114.

Molekularwirkungen zwischen Gasen und Flüssigkeiten. In gleicher Weise, wie die festen Körper die Gase anziehen und absorbieren, thuen es auch die Flüssigkeiten.

Füllt man z. B. eine oben geschlossene Glasröhre, welche in Quecksilber taucht, mit Ammoniakgas, und bringt dann über das Quecksilber in die Röhre ein wenig Wasser, so steigt das Quecksilber sofort in der Röhre in die Höhe; ein Beweis, dafs das Gas vom Wasser verschluckt ist.

Ein und dieselbe Flüssigkeit verschluckt von verschiedenen Gasen bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur verschiedene Mengen; verschiedene Flüssigkeiten von demselben Gase, unter sonst gleichen Umständen ebenfalls verschiedene Mengen, so dafs die Menge des absorbierten Gases bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur von der Natur des Gases sowohl, als auch der der absorbierenden Flüssigkeit abhängt.

Seit Priestley, der zuerst die Absorption der Gase untersuchte, indem er nachwies, dafs unter gewöhnlichem Barometerdrucke ein gegebenes Volumen Wasser ein gleiches Volumen Kohlensäure absorbiere, haben sich viele Physiker und Chemiker mit den Absorptionserscheinungen beschäftigt, und zu bestimmen gesucht, welche Gasmengen verschiedene Flüssigkeiten aufzunehmen imstande sind, und wie die aufgenommene Menge desselben Gases bei gleicher Flüssigkeit sich mit dem äufsern Drucke, unter welchem das Gas steht, ändert.

Was die letztere Frage betrifft, so haben die Versuche von Henry[2]) ergeben, dafs das Volumen des von einer Flüssigkeit aufgenommenen Gases stets dasselbe ist, welches auch der äufsere Druck ist, unter welchem sich das Gas über dem Wasser befindet. So absorbiert ein gegebenes Wasservolumen bei gewöhnlicher Temperatur (15°C.) ein nahezu gleiches Volumen Kohlensäure, ob nun die Kohlensäure in dem Raume, in welchem die Absorption vor sich geht, unter dem Drucke von einer oder mehreren Atmosphären steht. Da nach dem Mariotteschen Gesetze die Dichtigkeit eines Gases sich direkt verhält, wie der äufsere Druck, so folgt daraus, dafs die Gewichtsmengen des absorbierten Gases sich direkt verhalten, wie die äufseren Drucke, unter denen das Gas steht.

Kennt man darnach die Gasmenge, welche unter einem bestimmten Drucke absorbiert wird, so kann man daraus leicht für alle anderen Drucke die absorbierten Gasmengen berechnen.

Bunsen[3]) nennt deshalb das auf 0° und den Druck von 760^{mm} re[illegible]cierte Gasvolumen, welches die Volumeinheit der Flüssigkeit unter [illegible]

---

[1]) [illegible]ncke, Poggend. Ann. Bd. CVIII.

[2]) [illegible]ry, Philos. Transact. for 1803. Part. I. p. 29. Gilbert, Ann. X[illegible]

[3]) [illegible]sen, Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857. Liebigs Ann[illegible]

ucke von 760^{mm} absorbiert, den Absorptionskoefficienten des Gases für
Flüssigkeit.

Diese Zahl gibt dann sogleich das Volumen an, welches unter irgend
em Drucke P absorbiert wird, und wir erhalten für die Gasmenge, welche
sem Volumen entspricht,

$$g = \frac{\alpha \cdot P}{760},$$

nn wir mit α den Absorptionskoefficienten bezeichnen und als Gasmenge
Volumen, welches eine gegebene Gasmenge unter dem Barometerdruck
760^{mm} einnimmt. Für die von dem Wasservolum h absorbierte Gas-
nge erhalten wir dann

$$g = \frac{\alpha \cdot h \cdot P}{760}.$$

Kennt man in einem dem Eingangs erwähnten ähnlichen Versuche
Volumen des in der Röhre enthaltenen Gases V und den Druck P, unter
n es steht, die Differenz zwischen der Barometerhöhe und dem Niveau-
erschied des Quecksilbers in und aufser der Röhre, läfst man dann ein
ssigkeitsvolumen h in die Röhre eintreten und bestimmt das Volum V'
l den Druck P' des nach der Absorption übrigbleibenden Gasvolumens,
kann man den Absorptionskoefficienten leicht erhalten.

Die vor dem Versuche in dem Rohre enthaltene Gasmenge ist

$$\frac{V \cdot P}{760},$$

nach dem Versuche noch vorhandene $\frac{V' \cdot P'}{760}$, die absorbierte also

$$\frac{VP}{760} - \frac{V'P'}{760}.$$

Da der endliche Druck P' ist, so ist die Flüssigkeit unter diesem
ucke gesättigt. Nach dem Henryschen Gesetze verhalten sich die ab-
bierten Gasmengen wie die Drucke; unter dem Drucke 760^{mm} würde
mach die absorbierte Gasmenge

$$\left(\frac{VP}{760} - \frac{V'P'}{760}\right)\frac{760}{P'} = \left(V\frac{P}{P'} - V'\right)$$

esen sein.

Diese Gasmenge würde beim Drucke 760 von der Flüssigkeitsmenge h
orbiert sein, das Flüssigkeitsvolumen 1 hätte demnach die Menge

$$\alpha = \frac{1}{h}\left(V\frac{P}{P'} - V'\right)$$

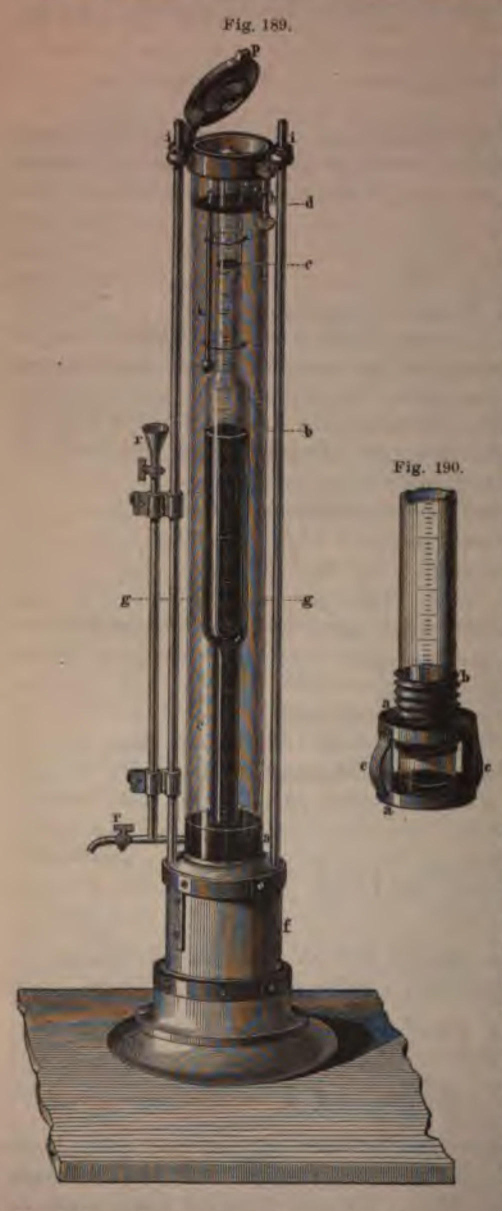
rbiert. Diese Gröfse α ist es, welche wir den Absorptionskoefficienten
ten.

Zur Bestimmung des Absorptionskoefficienten der verschiedensten Gase
mehrere Flüssigkeiten wandte Bunsen das Absorptiometer an, welchem
lgende Einrichtung gab (Fig. 189). Ein seiner ganzen Länge nach in
eter geteiltes kalibriertes Rohr c, welches oben geschlossen ist, ist
inem untern offenen Ende in eine Schraubenhülse b (Fig. 190) ein-
st, welche der Schraubenmutter des kleinen Stuhles aa entspricht.

Die Bodenplatte des Stuhles *a* ist mit Kautschuk überzogen, so daß Hinabschrauben des Rohres *e* dessen unterer abgeschliffener Rand den Kautschuk drückt, und damit das Rohr geschlossen wird. Di

Fig. 189.

Fig. 190.



Federn *cc* am Stuh (Fig. 190) passen in zw nen des Fufses *f* (Fig. 1 dafs wenn man das Ro den Fufs *f* einsetzt, de *aa* nur auf und ab nicht aber gedreht werde Eine Drehung des Rohre wirkt deshalb ein Löse Festerziehen der Schra und damit eine Erhebu der Bodenplatte und des Rohres *e*, oder ein Drücken gegen dieselb dichten Verschlufs von Rohr *e* dient als Abso rohr. Das Rohr ist ganzen Länge nach vo Glascylinder *gg* umhüll Cylinder ist mit seinen schliffenen Rändern, au Kautschukringe liegen, Fufs *f* und gegen den Rand des eisernen Ringe tels der Schrauben *ii* gepreſst. Die Röhre *r*, mit dem innern Raume linders *gg* kommuniciert zum Eingiefsen und A von Quecksilber, um den im Innern des Absorpti res *e* regulieren zu könne weitere Cylinder ist üb Quecksilber mit Wasser füllt, um das Absorpti auf konstanter Tempera erhalten, welche mit de mometer *k* bestimmt wi äufsere Cylinder kann des Deckels *p* fest versc werden, in dessen Mit mit einer Kautschukplat zogene eiserne Platte ge Kopf des Absorptionsrohres *e* drückt, um dasselbe unveränderlich stellen.

Die Versuche werden folgendermafsen angestellt. In einer

silberwanne läfst man in das zunächst ganz mit Quecksilber gefüllte Absorptionsrohr das zu untersuchende Gas einsteigen, und mifst das Volum V des Gases und den Druck P, unter dem es steht, um die Gasmenge (das auf 0^0 und 760^{mm} Druck reducierte Volum) zu erhalten. Darauf läfst man über das Quecksilber ein gemessenes Volum h völlig luftfreien Wassers eintreten, schliefst das Rohr mittels des Stuhles a und setzt es in den Boden f des mit Quecksilber und darüber vollständig mit Wasser gefüllten Cylinders g ein.

Durch eine kleine Drehung öffnet man dann das Absorptionsrohr, setzt dadurch den Druck im Innern desselben mit dem äufsern Druck ins Gleichgewicht, verschliefst es wieder und schüttelt dann den ganzen Apparat eine Minute lang auf das heftigste, öffnet dann wieder das Absorptionsrohr, um die Drucke neuerdings auszugleichen, schliefst und schüttelt wieder und so fort, so lange bis beim Öffnen des Absorptionsrohres keine Volumänderung des Gases mehr eintritt.

Darauf wird das Volum V_1 des rückständigen Gases und sein Druck P_1 bestimmt, und wir haben alle Daten zur Bestimmung des Absorptionskoefficienten α.

Um V_1 und P_1 zu bestimmen, bedarf es aufser der Beobachtung des Barometer und Thermometer k folgender Ablesungen, die mit dem Kathetometer gemacht werden.

1. Bestimmung des Quecksilberniveau b im Absorptionsrohr.
2. Bestimmung des obern Wasserniveau im Absorptionsrohr c.
3. Bestimmung des Quecksilberniveau a (Fig. 189) und
4. Bestimmung des Wasserniveau d im äufsern Cylinder gg.

Um den Gang des Versuches und der Berechnung deutlich zu machen, wird es am besten sein, einen Versuch Bunsens vollständig vorzuführen, es ist ein Versuch über Absorption des Stickstoffes.

Um V und P zu bestimmen, dienen folgende Daten. Ehe Wasser in das Absorptionsrohr eingelassen war, fand sich:

Der Unterschied der Quecksilberniveaus im Absorptionsrohre und der Quecksilberwanne	$315^{mm},1$
Barometerstand	744 ,4
Druck des trockenen Stickstoffs	$P = 429^{mm},3$
Volumen des Gases unter diesem Drucke	$V =$ 32 ,608.

Darauf wurde Wasser eingelassen und in der vorhin beschriebenen Weise operiert; es fand sich am Schlusse des Versuchs

Barometerstand	$\delta = 743{,}8$
Quecksilberniveau bei b	$b = 350{,}7$
Quecksilberniveau bei a	$a = 352{,}2$
Differenz der Niveaus	$\delta_1 = 1{,}5$
Höhe der Wassersäule in c, $cb =$	$w = 285{,}2$
Höhe der Wassersäule im Cylinder $ad =$	$w_1 = 344{,}2$
Differenz beider, also auf das Gas in c drückende Wassersäule $w_1 - w =$	59,0
Diese Differenz auf Quecksilberdruck reduciert	$q =$ 4,4.

Somit ist der innere Druck des Gases im Absorptiometer stärker als der Druck der äufsern Atmosphäre, da der Unterschied der Quecksilberniveaus $1^{mm},5$ beträgt, dagegen durch die höhere Wassersäule in gg nach dem

Innern von c hin ein Druck ausgeübt wird, der gleich $4^{mm},4$ Quecksilber Druck ist. Um P_1 zu erhalten, müssen wir demnach zu dem Barometerstande δ die Differenz dieser Drucke oder $2^{mm},9$ addieren. Darnach würde

$$P_1 = 746^{mm},8.$$

An diesem Drucke müssen wir aber noch eine Korrektion anbringen. Wir werden später in der Wärmelehre sehen, dafs ebenso wie die Gase, so auch die Dämpfe auf die Wände der Gefäfse, in denen sie eingeschlossen sind, einen Druck ausüben, der sich mit der Temperatur ändert. Das Wasser im Absorptionsrohre verdampft und füllt den Raum über dem Wasser mit Dampf an. Dieser Dampf drückt das Quecksilber herab, und zwar bei der zu $19^0,2$ beobachteten Temperatur des Absorptiometers um $16^{mm},3$. Wäre demnach kein Wasserdampf im Absorptiometer, so würde das Niveau des Quecksilbers im Absorptiometer um $16^{mm},3$ höher stehen. Der Druck P_1 des trockenen Stickstoffgases ist demnach um diese Gröfse kleiner, oder

$$P_1 = 730^{mm},5.$$

Das Volumen V_1 des nicht absorbierten Gases war auf 0^0 reduciert

$$V_1 = 16,52.$$

Und schliefslich das absorbierende Wasservolumen

$$h = 182,37.$$

Darnach wird der Absorptionskoefficient

$$\alpha = \frac{1}{h}\left(V\frac{P}{P_1} - V_1\right) = \frac{1}{182,37}\left(32,608\,\frac{429,33}{730,5} - 16,52\right)$$

$$\alpha = 0,014\,48,$$

das heifst, das Wasservolumen 1 absorbiert bei der Temperatur von $19^0,2$ 0,014 48 seines Volumens an Stickstoff.

Bunsen fand, dafs der Absorptionskoefficient sich mit der Temperatur der absorbierenden Flüssigkeit ändert. Ein Gesetz dieser Änderung liefs sich nicht erkennen, man mufste sich begnügen, eine empirische Formel aufzustellen, um die Werte von α zu bestimmen.

Die Formeln von Bunsen haben alle die Gestalt

$$\alpha = a + bt + ct^2,$$

worin t die Temperatur in Graden nach der hundertteiligen Skala a, b, c drei für jedes Gas und jede Flüssigkeit verschiedene Konstanten sind, welche durch eine Anzahl, wenigstens drei Versuche bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen sind.

Für Stickstoff in Wasser ist z. B.

$$\alpha = 0,020\,346 - 0,000\,538\,87\,t + 0,000\,011\,156 \cdot t^2.$$

Für Stickstoff in Alkohol aber

$$\alpha = 0,126\,338 - 0,000\,418\,t + 0,000\,006\,0\,t^2.$$

Diese Formeln gelten jedoch nur bis zu ungefähr 20^0, bis wohin die Versuche reichen.

Wir lassen hier eine Reihe der Absorptionskoefficienten der wichtigsten

e, welche Bunsen untersuchte, folgen, für Wasser und Alkohol bei der
ıperatur 15°.

Namen der Gase	α in Wasser	α in Alkohol
Stickstoff	0,014 78	0,121 42
Wasserstoff	0,019 30	0,067 25
Sauerstoff	0,029 89	0,283 97
Kohlensäure	1,002 0	3,199 3
Kohlenoxydgas	0,024 32	0,204 43
Stickoxydul	0,777 8	3,267 8
Grubengas	0,039 09	0,482 80
Elayl	0,161 5	2,882 5
Äthyl	0,021 47	—
Methyl	0,050 8	—
Schwefelwasserstoff .	3,232 6	9,539
Schwefelige Säure ..	43,564	144,55
Ammoniak	727,2	—
Atmosphär. Luft ...	0,017 95	—

Mit Hülfe des Henryschen Gesetzes und der von Bunsen bestimmten
ırptionskoefficienten ist man auch imstande, die Absorption eines Gas-
sches oder die Mengen zu bestimmen, welche von den einzelnen Gasen eines
isches absorbiert werden, umgekehrt aber auch, wenn man die Zusammen-
ng des absorbierten Gases bestimmen kann, daraus die Zusammensetzung
Gasgemisches zu berechnen, welches der Absorption ausgesetzt wurde.

Ein Volumen atmosphärischer Luft besteht z. B. aus 0,79 Stickstoff
0,21 Sauerstoff. Übt dasselbe den Druck p aus, so ist der Druck des
stoffes 0,79 p und der des Sauerstoffes 0,21 p. Ist der Absorptions-
cient des Stickstoffes α_1, der des Sauerstoffes α_2, so ist die von einem
ervolumen h aus der Luft absorbierte Menge Stickstoff

$$g_1 = \frac{\alpha_1 \cdot h \cdot 0{,}79\, p}{760},$$

les Sauerstoffes
$$g_2 = \frac{\alpha_2 \cdot h \cdot 0{,}21\, p}{760}.$$

Setzen wir $h = 1$, $p = 760$, so mufs $g_1 + g_2$ gleich dem Ab-
onskoefficienten für atmosphärische Luft sein. Die Rechnung gibt mit
Versuche übereinstimmend

$$g_1 + g_2 = 0{,}79 \cdot 0{,}014\,78 + 0{,}21 \cdot 0{,}029\,89 = 0{,}017\,95$$

bsorptionskoefficient für atmosphärische Luft bei 15°.

Hat man allgemein ein Gasgemisch unter dem Drucke p, welches r_1 Teile
Gases, r_2 eines zweiten, $r_3, r_4 \cdots r_n$ Teile eines 3, 4 ⋯ n Gases
lt, so sind die von jedem Gase absorbierten, in der Volumeinheit ent-
ıen Gasmengen

$$g_1 = \alpha_1 \cdot r_1 \frac{p}{760}$$

$$g_2 = \alpha_2 \cdot r_2 \frac{p}{760}$$

$$\vdots$$

$$g_n = \alpha_n \cdot r_n \cdot \frac{p}{760}.$$

Kennt man die Zusammensetzung des zur Absorption verwandten Gases nicht, aber kann man die Zusammensetzung des absorbierten Gases und somit $g_1, g_2, g_3 \cdots$ bestimmen, so kann man daraus $r_1, r_2 \cdots$ oder die Zusammensetzung des zur Absorption verwandten Gases berechnen. Auf diese Weise hat Bunsen der Absorptiometrie in der Analyse der Gase eine wichtige Anwendung gegeben.

§ 115.

Ausströmen der Gase. Wenn in die Wand eines mit Gas unter dem Drucke p gefüllten Gefäfses eine Öffnung gemacht wird und vor der Öffnung weniger dichtes Gas oder ein leerer Raum ist, so strömt das Gas aus der Öffnung hervor, um so rascher, je höher der Druck ist, unter welchem das Gas im Gefäfse steht und je geringer die Spannung des äufsern Gases ist. Wegen der freien Beweglichkeit der Teile, welche die Gase mit den tropfbaren Flüssigkeiten gemein haben, müssen auch die Ausströmungsgesetze der Gase mit denen der Flüssigkeiten übereinstimmen.

Wir gelangen daher zur Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher ein Gas aus einer Öffnung in der Wand eines Gefäfses, in welchem es unter stärkerm Druck steht, als der Druck aufserhalb des Gefäfses ist, ausfliefst, durch Anwendung ganz derselben Principien, welche wir auch § 84 anwandten. Wir denken uns zunächst das Gas im Innern des Gefäfses unter einem konstantem Drucke p_0 und ebenso werde der Druck aufserhalb auf konstanter Höhe erhalten, so dafs ein stationärer Strömungszustand eintritt. Das Kennzeichen dieses stationären Zustandes ist dann, dafs durch jeden Querschnitt, durch welchen das Gas hindurchtritt, in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Gases hindurchgehen müssen. Haben wir deshalb zwei Querschnitte Q und Q_1 und sind die mittleren gegen diese Querschnitte senkrechten Geschwindigkeiten u und u_1, so sind die durch die Querschnitte in der Zeiteinheit hindurchtretenden Gasvolumina $Q \cdot u$ und $Q_1 \cdot u_1$. Diese Volumen entsprechen aber nur dann gleiche Mengen, wenn in diesen Querschnitten die Drucke, welchen die Gase dort ausgesetzt sind, gleich sind, da nur dann die Dichtigkeit des Gases dieselbe ist. Sind die Drucke nicht gleich, sondern ist der Druck im Querschnitt Q gleich P, im Querschnitt Q_1 gleich P_1, so ist die Dichtigkeit im Querschnitt Q gleich s, im Querschnitt Q_1 gleich s_1, und die durch diese Querschnitte hindurchfliefsenden Gasmengen, die einander gleich sein müssen, sind

$$s Q u = s_1 Q_1 u_1.$$

Da nun, bei der von uns als überall gleich vorausgesetzten Temperatur nach dem Mariotteschen Gesetze

$$s : s_1 = P : P_1,$$

so können wir die Gleichung schreiben

$$P \cdot Q \cdot u = P_1 \cdot Q_1 \cdot u_1.$$

Eine weitere Beziehung erhalten wir auch hier wieder durch die Bemerkung, dafs bei dem stationären Zustande die Gase sich in konstanten Bahnen bewegen; denken wir uns deshalb wieder, wie in § 84 einen Kanal OA von überall gleichem Querschnitt q durch das Gas gelegt, so können wir

e Geschwindigkeitsänderung bestimmen. Sei Fig. 191 $MMNN$, aus dem das Gas aus einer engen Öffnung ausfliefst, in welchem ante Druck etwa dadurch erhalten wird, dafs das Gefäfs mit ıer gelegenen Wasserreservoir R, welches auf konstantem Niveau wird, in Verbindung steht. Sei OA der betrachtete Kanal, und nd n zwei unendlich nahe Querschnitte. Tritt das Gas durch den tt m mit der Geschwindigkeit v, so ist die in der Zeit dt durch hindurchfliefsende Gasmenge gleich $s \cdot q \cdot v \cdot dt$. In derselben Zeit las Gas den Querschnitt n, ; der Geschwindigkeit $v + dv$ o dafs die in der Zeit dt durch chnitt m fliefsende Gasmenge en Zeit den Geschwindigkeits- dv erfährt; die Bewegungs- amt also zu um

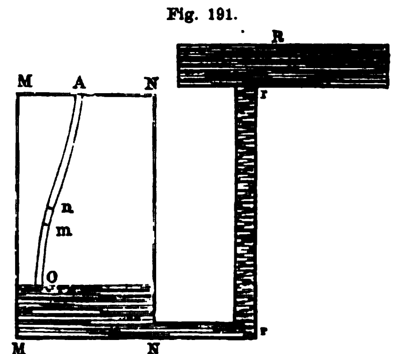


Fig. 191.

$$\frac{s}{g}\, q\, v\, dt\, dv.$$

e Zunahme der Bewegungs- rd durch die in der Zeit dt Kraft erteilt; als solche haben nur die Änderung dp des zu betrachten, da dieser gegenüber die Wirkung der Schwere s geringen Gewichtes der Gase vernachlässigt werden darf. Ändert n bis n der Druck um dp, so ist $q\,dp$ die Gröfse der wirksamen dafs wir die Gleichung erhalten

$$\frac{s}{g}\, q\, v\, dt\, dv = -\, q\, dp\, dt,$$

ıf der rechten Seite das negative Vorzeichen setzen müssen, weil ım Druck abnehmende Geschwindigkeit, abnehmendem Druck e Geschwindigkeit entspricht. Bezeichnen wir die Dichtigkeit bei dem Drucke π der Atmosphäre mit σ, so ist, wenn p den Querschnitt m bedeutet,

$$s = \frac{\sigma}{\pi}\, p,$$

d unsere Gleichung

$$\frac{\sigma}{\pi g}\, p\, q\, v\, dt\, dv = -\, q\, dp\, dt$$

$$v\, dv = -\, \frac{\pi g}{\sigma}\, \frac{dp}{p}.$$

lie Geschwindigkeit an der Grenze des Gases bei O gleich v_0, : dort p_0, so erhalten wir die Geschwindigkeit, welche das Gas o der Druck p ist, besitzt, indem wir auf beiden Seiten der summieren, wie im § 84, auf der linken von v_0 bis v, auf der ın p_0 bis p.

Diese Summen sind, wie wir schon öfter sahen, nach E VIII, 1 und E 2

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p}.$$

Da wir über die Lage des gedachten Gaskanals gar keine besond Voraussetzung gemacht haben, so gilt, wie wir schon § 84 für die fließende Flüssigkeit bemerkten, diese Gleichung für die ganze ausströme Gasmasse, es ist überall dort die Geschwindigkeit der strömenden Gasm gleich v, wo der Druck gleich p ist.

Bezeichnen wir den Druck in der Ausströmungsöffnung mit p_1, die schwindigkeit des Gases dort mit v_1, so erhalten wir

$$v_1^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) = 2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}.$$

Um schliesslich das Verhältnis $\frac{v_0}{v_1}$ zu bestimmen, setzen wir wi voraus, dass in der Fläche bei O, wo die Bewegung des Gases beginnt in der Öffnung bei A, die wir als sehr klein nehmen, die Geschwi keiten v_0 und v_1 die mittlern gegen die betreffenden Querschnitte s rechten Geschwindigkeiten seien. Ist dann Q der Querschnitt des Gefä q_1 der der Öffnung, so ist

$$p_1 q_1 v_1 = p_0 Q \cdot v_0$$

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p_1 q_1}{p_0 Q}$$

und damit

$$v_1^2 = \frac{2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}}{1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2}.$$

Ist der Querschnitt der Öffnung gegen jenen des Gefäßes hinreic klein, so können wir, da auch $p_1 < p_0$ sein muss, wenn überhaupt ein strömen stattfindet, das zweite Glied des Nenners vernachlässigen, dann wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}}.$$

Der Ausdruck für v_1 wird einfacher, wenn der Druck p_0 nur w von dem Drucke p_1 in der Ausflussöffnung verschieden ist. Wir erh zunächst

$$\log \frac{p_0}{p_1} = - \log \frac{p_1}{p_0} = - \log \left(1 - \frac{p_0 - p_1}{p_0}\right).$$

Nun ist, wie in der Analysis bewiesen wird,

$$- \log \left(1 - \frac{p_0 - p_1}{p_0}\right) = \frac{p_0 - p_1}{p_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right)^3 + \cdot$$

Wenn p_0 nur wenig größer als p_1 ist, so können in dieser Reihe Glieder nach dem ersten vernachlässigt werden, und es wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

ergibt sich somit, daſs bei kleinen Überdrucken die Geschwindigkeit
strömens bei einem und demselben Gase der Quadratwurzel aus
otienten des Überdruckes $p_0 - p_1$ und des Druckes im Gasbehälter
onal ist; bei gleicher Druckdifferenz $p_0 - p_1$ nimmt also die Aus-
hwindigkeit proportional der Quadratwurzel aus dem Drucke p_0 ab.
r Luft von der Temperatur 0° wird der Wert des Koefficienten

, da die Dichtigkeit der Luft bei dem Drucke der Atmosphäre
Quecksilber, gleich 0,001 293 ist, und die Dichtigkeit des Queck-
gleich 13,59 ist,

$$\sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}76 \cdot 13{,}59 \cdot 9{,}808}{0{,}001\,293}} = 396^{\mathrm{m}}{,}002,$$

$$v_1 = 396^{\mathrm{m}}{,}002 \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

zeichnen wir das specifische Gewicht irgend eines andern Gases,
r Luft gleich 1 gesetzt, mit d, so erhalten wir für die Ausfluſs-
ndigkeit desselben

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma \cdot d} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_0}} = \frac{396^{\mathrm{m}}{,}002}{\sqrt{d}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}$$

gleichen Drucken p_0 und p_1 ist die Ausfluſsgeschwindigkeit ver-
er Gase der Quadratwurzel aus ihrer Dichtigkeit umgekehrt pro-
l.

ie Prüfung dieser Sätze durch Messung der Geschwindigkeit v_1 ist
glich, da die Geschwindigkeit des Gases in der Ausfluſsöffnung sich
essen läſst. Dieselbe ist dagegen möglich, indem man die Menge
geflossenen Gases miſst.

n kann das am besten, indem man bei einer der in Fig. 191 an-
en ähnlichen Vorrichtung die Volumverminderung des Gases in dem
miſst, welche sich unmittelbar aus dem Volumen oder Gewichte der
menden Flüssigkeit ergibt. Ist der Querschnitt der Öffnung q_1, so
in der Sekunde ausflieſsende Gasvolumen

$$w_1 = q_1 \cdot v_1.$$

dieses Volumen aus der Öffnung bei dem Drucke p_1 hervortritt, so
it in dem Gefäſse, in welchem der Druck, wenn wir dasselbe als ein
ches Reservoir voraussetzen, überall gleich p_0 ist, ein Volumen w,
nach dem Mariotteschen Gesetze sich ergibt

$$w : w_1 = p_1 : p_0$$

$$w = \frac{w_1 p_1}{p_0} = q_1 \frac{p_1}{p_0} \cdot \sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma \cdot d} \frac{p_0 - p_1}{p^0}}.$$

ſst man die Gase in die freie Luft ausströmen und wendet nur
einen Überdruck an, so kann man für den Druck in der Ausfluſs-
den Druck der äuſsern Atmosphäre einsetzen, und erhält dann,
in Quadratmetern gegeben ist, das Volumen der ausgeflossenen
ge in Kubikmetern.

Die Versuche ergeben auch hier, wie bei den tropfbaren F
keiten, dafs die wirkliche Ausflufsmenge kleiner ist als die theore
während indes bei den tropfbaren Flüssigkeiten der sogenannte Erfal
koefficient konstant war, scheint er bei den Gasen mit wachsendem :
p_0 etwas abzunehmen, schon innerhalb der Grenze, bei welcher c
genäherte Formel noch ausreicht, was bis etwa 1^m Wasserdruck als
druck der Fall ist. Bei sehr geringen Differenzen der Drucke p_0
zwischen $0^m,028$ und $0^m,14$ Wasserdruck fand D'Aubuisson[1] d
fahrungskoefficienten bei Öffnungen in dünner Wand

$$\mu = 0,65,$$

Weisbach[2] erhielt bei ähnlichen Verhältnissen

$$\mu = 0,671,$$

also sehr nahe mit dem übereinstimmend, mit welchem man die theo
berechnete Ausflufsmenge der Flüssigkeiten multiplicieren mufs, u
beobachtete Ausflufsmenge zu erhalten.

G. Schmidt[3] erhielt für eine Druckhöhe von $0^m,913$ als Koeffi

$$\mu = 0,52$$

und einen nicht viel davon verschiedenen Wert bestimmte Koch[4] f
Ausströmen der Luft aus Öffnungen in dünner Wand.

Diese Verschiedenheit der Resultate aus den Beobachtungen u
Theorie weist darauf hin, dafs bei der theoretischen Entwicklung de
flufsgesetze nicht alle Umstände in Betracht gezogen sind, welche :
Bewegung des Gases von Einflufs sind. Wir erkennen dieselben le
ähnlichen Verhältnissen wie bei den Flüssigkeiten, das Gas bewe
von allen Seiten gegen die Öffnung hin und dadurch wird die ge
Öffnung senkrechte Geschwindigkeit des ausfliefsenden Gases gestört

Den experimentellen Beweis dafür liefert uns der Einflufs von .
röhren an die Gefäfsöffnung auf die Menge des ausfliefsenden Gases.
den Versuchen von D'Aubuisson, Schmidt, Koch und Weisbach w
Menge des ausfliefsenden Gases durch solche Röhren ähnlich wie l
tropfbaren Flüssigkeiten gröfser, so lange die Röhren nicht zu en
zu lang sind. Nach den Versuchen von D'Aubuisson ist für kurz
drische Röhren, deren Länge gleich ist dem fünffachen Durchmesser μ
und für kurze konische Ansatzröhren, den engern Durchmesser nach
gekehrt, $\mu = 0,93$, Weisbach findet für cylindrische Ansatzrohre $\mu =$
für konische 0,883.

Schmidt findet für konische Ansatzröhren, wenn der gröfsere
messer nach aufsen gekehrt ist, μ noch um vieles gröfser, nämlich 1,
dafs also die beobachtete Ausflufsmenge selbst gröfser ist als die the
berechnete.

Wendet man anstatt kurzer verhältnismäfsig weiter Ansatzröhre
und enge Röhren an, so zeigt sich auch hier ähnliches wie bei den tro

[1] *D'Aubuisson*, Annales de chim. et de phys. XXXII.
[2] *Weisbach*, Experimental-Hydraulik p. 184 ff.
[3] *G. G. Schmidt*, Gilbert Annalen LXVI.
[4] *Fr. L. Koch*, Versuche und Beobachtungen über die Geschwindigl
Quantität verdichteter Luft, welche aus Öffnungen etc. ausströmt. Göttin

Flüssigkeiten; der Ausflufs der Gase folgt ganz andern Gesetzen als bei Anwendung von Öffnungen in dünnen Wänden. Nach den ausgedehnten Versuchen von Girard[1]) verhalten sich die Ausflufsmengen bei nicht zu engen Röhren direkt wie die Drucke, unter welchen das ausfliefsende Gas steht, und umgekehrt wie die Quadrate der Röhrenlängen, durch welche das Gas abfliefst.

Dafs die Ausflufsgeschwindigkeit der Gase der Quadratwurzel aus ihrer Dichtigkeit umgekehrt proportional ist, kann man am bequemsten dadurch nachweisen, dafs man gleiche Volume verschiedener Gase unter denselben Druckverhältnissen aus einer engen Öffnung ausströmen läfst, und die dazu erforderliche Zeit beobachtet. Die Quadrate dieser Zeiten müssen sich dann verhalten wie die Dichtigkeiten der Gase. Bunsen hat diese Methode angewandt und darauf ein Verfahren gegründet, die specifischen Gewichte der Gase mit einander zu vergleichen[2]), ein Verfahren, welches besonders für technische Zwecke, wie zu Dichtigkeitsbestimmungen von Leuchtgas, sehr bequem ist.

Läfst man verschiedene Gase durch lange Röhrenleitungen gehen, so hängt nach den Versuchen von Girard die Ausflufsgeschwindigkeit nicht mehr von der Dichtigkeit des Gases ab; unter Voraussetzung gleicher Druckverhältnisse ist die Ausflufsgeschwindigkeit für die verschiedenen Gase dieselbe.

Noch in einer andern Weise können wir die abgeleiteten Gleichungen prüfen, indem wir aus ihnen die Verteilung des Druckes in der strömenden Gasmasse berechnen. Bezeichnen wir in irgend einem Querschnitt q der strömenden Gasmasse den Druck mit p, die Geschwindigkeit mit v, so erhalten wir für die Ausflufsgeschwindigkeit v_1, wenn in der Ausflufsöffnung der Druck gleich p_1 ist, aus der vorhin aufgestellten Gleichung

$$v\,dv = -\frac{\varkappa g}{\sigma}\,\frac{dp}{p},$$

indem wir jetzt von v bis v_1 und von p bis p_1 summieren

$$v_1^2\left(1-\frac{v^2}{v_1^2}\right) = 2\,\frac{\varkappa g}{\sigma}\log\frac{p}{p_1},$$

eine Gleichung, welche uns mit Hülfe der Beziehung

$$p q v = p_1 q_1 v_1,$$

welche gilt, wenn wir eine derartige Form des Gefäfses und der Ausflufsöffnung voraussetzen, dafs wir die Geschwindigkeiten als senkrecht zu den betreffenden Querschnitten annehmen dürfen, den in den verschiedenen Querschnitten des Gefäfses vorhandenen Druck p zu berechnen gestattet. Zunächst erhalten wir

$$v_1^2\left(1-\left(\frac{p_1}{p}\right)^2\left(\frac{q_1}{q}\right)^2\right) = 2\,\frac{\varkappa g}{\sigma}\log\frac{p}{p_1}.$$

---

[1]) *Girard*, Mémoires de l'Académie de l'Institut de France. T. V.
Neuere Versuche:
Saint-Venant und *Wantzel*, Comptes rendus de l'Acad. de Paris. T. XVII.

[2]) *Bunsen*, Gasometrische Methoden. p. 128 ff.

Setzen wir nun voraus, dafs das Ausfliefsen überhaupt nur
kleinen Drucken erfolge, so können wir zunächst setzen

$$\log \frac{p}{p_1} = \log\left(1 + \frac{p-p_1}{p_1}\right) = \frac{p-p_1}{p_1}$$

und weiter

$$\left(\frac{p_1}{p}\right)^2 = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{p-p_1}{p_1}\right)^{-2} = 1 - 2\frac{p-p_1}{p_1} + 3\left(\frac{p-p_1}{p_1}\right)^2 +$$

und können in dieser Reihe schon das dritte Glied vernachlässigen.
erhalten wir

$$v_1^2\left\{1 - \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 + 2\frac{p-p_1}{p_1}\left(\frac{q_1}{q}\right)^2\right\} = 2\frac{\varkappa g}{\sigma}\,\frac{p-p_1}{p_1}$$

und daraus

$$\frac{p-p_1}{p_1} = \frac{q^2 - q_1^2}{\frac{2\varkappa g}{\sigma v_1^2}\,q^2 - 2q_1^2}$$

oder, indem wir im Nenner rechts v_1^2 durch seinen Wert

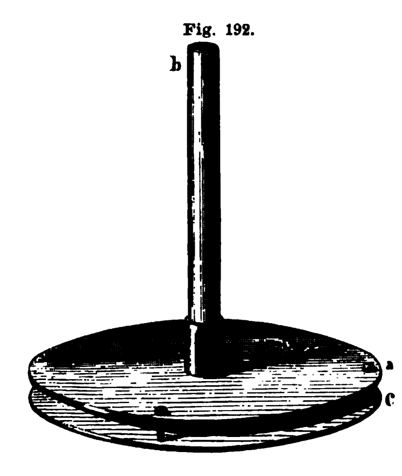
$$v_1^2 = \frac{\frac{2\varkappa g}{\sigma}\,\frac{p_0-p_1}{p_1}}{1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2}$$

ersetzen,

$$\frac{p-p_1}{p_1} = \frac{(q^2-q_1^2)\left(1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2\right)}{\frac{p_1}{p_0-p_1}\,q^2 - 2\left(1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2\right)q_1^2}.$$

Das Vorzeichen auf der rechten Seite hängt davon ab, ob $q > q$
$q < q_1$, denn da unsere ganze Entwicklung nur gilt, so lange $p_0 - p_1$
p_1 sehr klein ist, so ist der Nenner der rechten Seite bei allen
Praxis herzustellenden Vorrichtung
positiv zu nehmen. Dann ergib
dafs in allen Querschnitten, welche
sind als die Ausflufsöffnung, $p >$
allen, welche kleiner sind als di
flufsöffnung, dagegen $p < p_1$. Läß
deshalb Gas oder Luft in die
Atmosphäre ausströmen, so dafs
Ausflufsöffnung der Druck p_1 gleic
der äufsern Atmosphäre ist, so w
allen Stellen, an welchen das
strömende Gas einen Querschnitt pa
der kleiner ist als die Ausströn
öffnung, der Druck kleiner als der
der Atmosphäre.

Fig. 192.

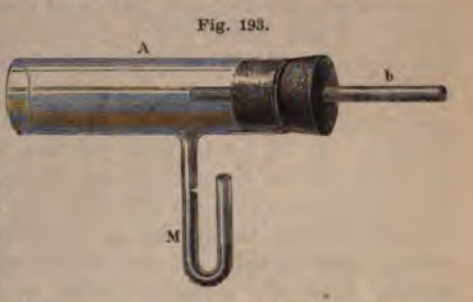


Mit Hülfe des kleinen App
Fig. 192 kann man diesen geri
Druck leicht nachweisen. Eine Glasröhre mündet in der Mitte einer Schei
in einiger Entfernung von letzterer ist eine zweite nicht durchlöcherte S

ttels dreier Drähte festgehalten, welche sich der Mündung der Röhre hern kann. Bläst man kräftig in die Röhre bei b hinein, so sieht man, e sich die Scheibe c der Schwere entgegen zur Scheibe a hinbewegt, en Moment die Öffnung der Röhre verschlieſst, dann wieder abgestoſsen rd, wieder sich gegen a hinbewegt und so auf und nieder sich bewegt, lange man in die Röhre hineinbläst. Die Ausfluſsöffnung ist hier die gförmige Spalte zwischen den Rändern der beiden Scheiben, nach welcher n der Mitte aus die Luft sich auf den Radien hinbewegt. Die einzelnen den Mittelpunkt der Scheibe a gelegten zur Scheibe a und c senkhten kreisförmigen Schnitte bilden also die verschiedenen Querschnitte, lche somit alle kleiner sind als die Ausfluſsöffnung, so daſs auf die ganze eibe von unten nach oben ein stärkerer Druck wirkt als von oben nach en. In dem Augenblicke aber, in welchem infolge dieses Druckes die tte c sich vor die Öffnung der Röhre legt, die Luft also am Ausflieſsen indert wird, tritt der statische Druck der in der Röhre b verdichteten ft in Wirksamkeit, und treibt die Platte fort, welche dann wieder gegen ewegt wird, und so fort.

Mit der Anordnung Fig. 193 kann man diesen kleinern Druck ebenso kt sichtbar machen. Man steckt in ein weiteres Glasrohr A, an welches kleines Manometerrohr M anchmolzen ist, mit einem Stopfen engeres Rohr b und schiebt selbe soweit hinein, daſs das le sich in dem Querschnitt belet, in welchem das Manometerr angeschmolzen ist. Füllt man n das Manometer mit Wasser, bläst durch das Röhrchen so steigt das Wasser in dem enkel des Manometerrohres

Fig. 193.



por, welcher mit der Röhre A in Verbindung steht. Die Niveaudifferenz den beiden Röhren gibt die Differenz der Drucke in der Mündung des en Rohres und an der Ausfluſsöffnung.

§ 116.

Reibung der Gase. Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Beungen gelten nur für das Ausflieſsen der Gase durch eine Öffnung in ner Wand oder durch Röhren, welche einen im Verhältnis zu ihrer ge nicht zu kleinen Querschnitt haben; läſst man die Gase durch illare Röhren ausflieſsen, so werden, wie das sich zuerst aus ausgedehn- Versuchen von Graham[1]) ergab, die Gesetze des Ausflusses wie bei ssigkeiten ganz andere, welche beweisen, daſs auch bei den Gasen eine ere Reibung vorhanden ist, und ebenso eine Reibung an den Wänden Röhre, durch welche die Gase flieſsen.

Daſs in der That bei den Gasen eine innere Reibung vorhanden sein s, und welchen Gesetzen dieselbe folgen muſs, ergibt sich unmittelbar

[1]) *Graham*, Philosophical Transactions of London R. S. for the year 1846 1849.

aus der dynamischen Gastheorie, wie zuerst Maxwell[1]) aus seiner ältern, wie wir erwähnten, im wesentlichen mit derjenigen von Clausius überein-stimmenden Anschauung über die Natur der Gase abgeleitet hat. Später ist dann die Theorie der Reibung in einfacherer Weise von O. E. Meyer[2]) behandelt worden, und noch einfacher von v. Lang[3]).

Wir denken uns zu dem Ende eine Gasmasse, welche nach einer Richtung strömt, nehmen an, dafs die einander parallelen Schichten mit verschiedener Geschwindigkeit strömen, und untersuchen, welche Verzögerung eine Schicht dadurch erhalten mufs, dafs die an einer Seite neben ihr befindliche eine kleinere Strömungsgeschwindigkeit hat. Denken wir uns jetzt durch die strömende Gasmasse der Strömungsrichtung parallel, und zwar so eine Ebene gelegt, dafs die sämtlichen in einer der Ebene parallelen Gasschicht liegenden Teilchen dieselbe Strömungsgeschwindigkeit haben, dafs aber mit der Entfernung von der Ebene nach der einen Seite die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung zunimmt, nach der andern Seite mit wachsender Entfernung abnimmt. In einer ruhenden Gasmasse haben nach der von uns vorgetragenen Theorie alle Moleküle dieselbe Geschwindigkeit, welche nach allen Richtungen des Raumes gerichtet ist, so dafs keine Richtung vor der andern bevorzugt ist. In einer parallel einer bestimmten Richtung bewegten Gasmasse haben die Moleküle zunächst diese, von uns bisher mit u bezeichnete Geschwindigkeit und aufserdem eine der Bewegungsrichtung parallele Geschwindigkeit, welche der Strömungsgeschwindigkeit des Gases gleich ist. Nennen wir diese Strömungsgeschwindigkeit in der gedachten durch die strömende Gasmasse gelegten Ebene v_0, so ist sie in dem von uns angenommenen Falle für alle Gasschichten an der einen Seite der Ebene $v_0 + \varphi$, an der andern $v_0 -$ [illegible] worin φ mit wachsendem Abstande von der gedachten Ebene gröfser wird. Infolge der den Gasmolekülen eigentümlichen nach allen Richtungen des Raumes gleichmäfsig mit der Geschwindigkeit u stattfindenden Bewegung werden durch die gedachte Ebene in jedem Momente Moleküle von der einen zur andern Seite gehen, und zwar mufs, da die Dichtigkeit an allen Stellen der Gasmasse dieselbe bleibt, die Zahl der Moleküle, welche von Seiten der rascher bewegten zu den langsamer strömenden Schichten hinüber gehen, genau so grofs sein als die Zahl der umgekehrt von den langsamer zu den rascher strömenden Schichten übertretenden Moleküle. Da die letztern nun aber eine geringere Geschwindigkeit in der Richtung der Strömung besitzen, so mufs ihnen von der strömenden Gasmasse eine gewisse Geschwindigkeit mitgeteilt werden; ebenso übertragen die zu der langsamer strömenden Gasmasse hinübertretenden Moleküle dorthin eine gewisse Bewegungsgröfse. Das geht aber nur auf Kosten der Bewegung der rascher strömenden Gasmasse, so dafs diese eine der den eintretenden Molekülen erteilten und der an die langsamer strömenden übertragenen

---

[1]) *Maxwell*, Philosophical Magazin IV. series vol. XIX. Eine etwas andere Theorie der Reibung aus seiner spätern Gastheorie gibt *Maxwell*, Phil. Mag. IV. series vol. XXXV.

[2]) *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. Bd. CXXV. Kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877. p. 126 ff.

[3]) *v. Lang*, Poggend. Ann. Bd. CXLV. Man sehe auch *Stefan*, Wiener Berichte Bd. LXV. p. 343 ff. *Boltzmann*, Wiener Berichte Bd. LXVI. p. 325 [illegible]

au gleiche Bewegungsgröfse verliert. Diese verlorene Bewegungsgröfse rascher strömenden Gasmasse ist der Effekt der Reibung. Eine genau che Bewegungsgröfse erhalten die langsamer fliefsenden Schichten, so diese eine Beschleunigung erhalten müssen, deren Wert ebenso grofs als derjenige der Verzögerung der rascher strömenden Schichten.

Man sieht, dafs hieraus zunächst die Thatsache der Reibung, wie sie bei Beobachtungen sich ergibt, als in der Konstitution der Gase begründet heint.

Um die Gröfse der Reibung zu bestimmen, haben wir nur die Beungsgröfse zu berechnen, welche den in der Zeiteinheit durch die heneinheit der vorhin gedachten Ebene von der Seite der langsamer menden Schichten auf die Seite der rascher strömenden Schichten über tretenden Molekülen mitzuteilen ist.

Um die überhaupt durch eine Ebene hindurchtretenden Moleküle zu lten, können wir die Annahme machen, dafs nur solche Moleküle h sie hindurchgehen, welche in der Richtung ihrer Bewegung nicht er von ihr entfernt sind, als die mittlere Wegelänge l beträgt, und aus allen Schichten bis zu dieser Entfernung die gleiche Anzahl von eküle übertritt. Denken wir uns also etwa ein Flächenelement ds auf diesem unter dem Winkel ϑ einen prismatischen Raum von der ge l, so wird aus jeder Schicht dieses Raumes von der Dicke dl die he Anzahl von Molekülen durch das Flächenelement ds hindurchtreten. ergibt sich das unmittelbar aus der Bedeutung der mittleren Wegee. Die gesamten zwischen zwei Zusammenstöfsen der Moleküle zurückgten Wege dividiert durch die Zahl der Moleküle sind diese mittleren ge; anstatt die einzelnen Moleküle mit ihren Wegen in Betracht zu en, ist es somit im Effekt dasselbe, wenn wir annehmen, alle Moleküle n von einem Stofs zum andern diesen Weg zurück. Dann wird aber Molekül, welches weiter in der Richtung seiner Bewegung von der ze, als die Strecke l beträgt, entfernt ist, in Betracht zu ziehen sein, s vor Erreichung der gedachten Grenzebene an ein Molekül stöfst und ckkehrt; alle in der Richtung ϑ sich bewegenden aber, deren Entng zwischen Null und l beträgt, treten über, und zwar so weit, dafs zurückgelegte Weg gleich l geworden ist. Da nun die Moleküle ganz hmäfsig im Raume verteilt sind, so müssen dann auch aus jeder Schicht her Dicke gleich viel Moleküle sich herausbewegen.

Wie wir im § 102 sahen, ist die Zahl der Moleküle, welche gegen eine he von der Gröfse s in der Richtung ϑ anprallen,

$$\frac{sNu \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{2U}.$$

Nennen wir die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle

$$\frac{N}{U} = n$$

setzen wir für s die Flächeneinheit, so gibt uns der Ausdruck

$$\frac{nu \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{2}$$

auch die Anzahl der in der Richtung ϑ durch die betrachtete Fläch
Gases pro Flächeneinheit hindurchgehenden Zahl von Molekülen; denn i
der betreffenden Stelle keine Wand, so gehen die Moleküle eben durc
Fläche hindurch, die, wenn eine Wand vorhanden ist, an dieselbe anpr

Da alle diese Moleküle aus der zwischen Null und l liegenden
fernung herkommen, so kommen aus jeder Schicht zwischen 0 und
der Richtung ϑ von der Dicke $d\xi$ eine Anzahl von Molekülen, welch
zur Gesamtzahl verhält wie $\frac{d\xi}{l}$. Aus einer in der Richtung der Bew
genommenen Entfernung $\xi < l$ und einer Schicht, welche in dieser
tung die Dicke dl hat, passieren also unsere gedachte Grenzeben
Flächeneinheit

$$\frac{n u \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{2} \quad \frac{d\xi}{l}$$

Moleküle. Wir berechnen jetzt die Bewegungsgröfse, welche diese
der Entfernung ξ kommenden und durch die gedachte Grenzebene vo
langsamer zu den rascher strömenden Schichten in der Richtung ϑ h
gehenden Molekülen erteilt werden mufs. Indem wir dann für ξ nac
nach alle Werte von 0 bis l einsetzen und die so für alle innerhalb
Entfernung befindlichen Moleküle erforderliche Bewegungsgröfse bild
halten wir in der Summe aller dieser Werte zunächst die Bewegungs
welche den in der Richtung ϑ übertretenden Molekülen erteilt werden

Wir bezeichneten schon vorhin die Strömungsgeschwindigkeit
gedachten Grenzebene mit v_0 und in einiger Entfernung davon an
der langsamer strömenden Schichten mit $v_0 - \varphi$; die Gröfse φ wäch
der Entfernung der Schichten von der Grenzebene. Da es sich hi
um äufserst kleine Entfernungen handelt, dürfen wir φ dem senkr
Abstande z der betrachteten Schicht von der Grenze proportional, also

$$\varphi = \frac{dv}{dz} z,$$

worin dv die Abnahme der Geschwindigkeit gibt, wenn z um dz v
somit der Quotient die Abnahme der Geschwindigkeit bedeutet, we
senkrechte Abstand von der Grenze um die Einheit der Entfernu
nimmt, vorausgesetzt, dafs die Geschwindigkeitsabnahme überall
mäfsig erfolgen würde, wie an der gerade betrachteten Stelle.

Ein aus dem Abstande ξ in einer Richtung, welche mit der No
den Winkel ϑ bildet, kommendes Molekül kommt aus einer Schicht,
senkrechter Abstand von der Grenze

$$z = \xi \cos\vartheta$$

ist, es hat somit die Strömungsgeschwindigkeit

$$v_0 - \frac{dv}{dz} \cdot \xi \cos\vartheta.$$

Dieses Molekül geht an der andern Seite der Grenzebene bis zu
nde

$$z = (l - \xi) \cos\vartheta,$$

mufs somit dort eine Strömungsgeschwindigkeit erhalten

$$v_0 + \frac{dv}{dz}(l - \xi)\cos\vartheta,$$

ine Strömungsgeschwindigkeit mufs somit um

$$\left(v_0 + \frac{dv}{dz}(l - \xi)\cos\vartheta\right) - \left(v_0 - \frac{dv}{dz}\xi\cos\vartheta\right) = \frac{dv}{dz}l\cos\vartheta$$

nehmen. Ist m die Masse des einzelnen Moleküls, so entspricht dieser schwindigkeitszunahme die Bewegungsgröfse

$$m\frac{dv}{dz}l\cos\vartheta.$$

Für die aus der Entfernung ξ von Seiten des langsamer strömenden ses kommenden unter einem Winkel ϑ die Grenzebene durchsetzenden lekūle ist somit der Zuwachs an Bewegungsgröfse, welche sie auf Kosten r strömenden Gasschicht erhalten,

$$\frac{nu\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{2}\,\frac{d\xi}{l}\cdot m\frac{dv}{dz}l\cos\vartheta.$$

Für die überhaupt in der Richtung ϑ übertretenden Moleküle ergibt h dann die erforderliche Bewegungsgröfse aus der Überlegung, dafs auf r Strecke l, von welcher überhaupt Moleküle in dieser Richtung überten, $\frac{l}{d\xi}$ Schichten von der in der Bewegungsrichtung genommenen ke $d\xi$ sind. Da aus jeder dieser Schichten die gleiche Zahl von Molelen kommt, und da nach der eben gemachten Entwicklung für jedes der lekūle die gleiche Zunahme der Bewegungsgröfse eintreten mufs, erhalten r die für alle in der Richtung ϑ übertretenden Moleküle erforderliche wegungsgröfse, indem wir den eben gefundenen Ausdruck mit $\frac{l}{d\xi}$ multicieren. Dieselbe wird somit

$$\frac{mnul}{2}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\frac{dv}{dz}.$$

Diesen Verlust an Bewegungsgröfse erfährt die rascher strömende Gassse durch die von Seite der langsamer strömenden Schichten in sie in Richtung ϑ eintretenden Moleküle. Einen genau ebenso grofsen Verlust Bewegungsgröfse erfährt sie dadurch, dafs von Seiten der rascher ströden Gasmasse genau so viel Moleküle in die langsamer strömende überten und dort genau denselben Zuwachs an Bewegungsgröfse übertragen. an die Zahl der übertretenden Moleküle ist genau dieselbe, und jedes t den Weg l in der Richtung von der rascher zu der langsamer ströden Gasmasse zurück, gibt also an diese genau die gleiche Bewegungsfse ab, welche das aus der entsprechenden Lage von der andern Seite amende zu erhalten hat.

Der Gesamtverlust, den die durch die Grenzebene in der Richtung ϑ ı austauschenden Moleküle in der rascher strömenden Gasmasse beken, ist somit das Doppelte des eben berechneten, oder

$$mnul\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\frac{dv}{dz}.$$

Wir erhalten dann den Verlust an Bewegungsgröſse, den die rascher strömende Gasmasse überhaupt durch die sich austauschenden Moleküle erfährt, wenn wir obigen Wert für jeden zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Winkel ϑ bilden und alle diese Werte summieren, also in der Summe

$$mnul \frac{dv}{dz} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta,$$

da $mnul \frac{dv}{dz}$ für jede Richtung ϑ denselben Wert hat. Diese Summe ist, wie wir schon mehrfach sahen,

$$\tfrac{1}{3} mnul \frac{dv}{dz}.$$

Dieser Verlust der Bewegungsgröſse der rascher strömenden Gasmasse, dem ein genau gleicher Gewinn auf Seiten der langsamer strömenden gegenüber steht, ist der Effekt der Reibung.

Gerade wie bei den Flüssigkeiten können wir die Reibung auch hier als einen in der Grenzebene der Bewegungsrichtung entgegenwirkenden Druck definieren, der Druck muſs auf die Flächeneinheit während einer Sekunde wirkend der strömenden Gasmasse denselben Verlust an Bewegungsgröſse, oder dieselbe Bewegungsgröſse in der der Strömung entgegengesetzten Richtung erteilen. Bezeichnen wir diesen Druck mit K, so ist

$$K = \tfrac{1}{3} mnul \frac{dv}{dz}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem § 86 für die Reibung in Flüssigkeiten erhaltenen Ausdruck

$$K = \eta f \frac{dv}{dz},$$

indem wir hier z für x setzen, weil wir die zur Strömungsrichtung normale Richtung mit z bezeichnet haben, so erkennt man, daſs für die Gase ganz dasselbe Reibungsgesetz für die innere Reibung gilt, und daſs der Reibungskoefficient

$$\eta = \tfrac{1}{3} mnul$$

ist. In diesem Ausdrucke bedeutet n die in der Volumeinheit vorhandene Molekülzahl. Nach § 101 können wir, wenn wir die von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllten Räume auſser Acht lassen, für l setzen

$$l = \frac{1}{n\frac{4}{3}\varrho^3\pi}\varrho$$

und erhalten dann für η

$$\eta = \tfrac{1}{3} \frac{mu}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi} \cdot \varrho,$$

ein Ausdruck, welcher zeigt, daſs der Reibungskoefficient von der Anzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle, also auch, soweit die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, von dem Drucke unabhängig ist, unter welchem das Gas steht.

Die Notwendigkeit dieses auf den ersten Blick sehr auffallenden Satzes
gibt sich indes aus der Natur der Gasreibung als Abgabe der Bewegung
r schneller strömenden Moleküle an die in sie eindringenden langsamer
rtschreitenden. Wird die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit kleiner,
nimmt in demselben Verhältnisse die Wegelänge l, also die Dicke der
ngsamer strömenden Schicht, aus welcher die Moleküle in die rascher
römende übertreten, zu, die übertragene Bewegungsgröfse mufs also den-
lben Wert behalten, vorausgesetzt, dafs die strömende Gasmasse in der
r Bewegung senkrechten Richtung eine solche Ausdehnung hat, dafs die
it abnehmender Dichte, wegen des Wachsens von l wachsende Dicke der
hicht ganz mit Gas ausgefüllt ist.

Bei einer sehr weit gehenden Verdünnung des Gases ist indes die vor-
führte Theorie nicht mehr gültig[1]), da wir dann die Annahme nicht mehr
achen dürfen, dafs nur Moleküle aus Schichten von der Dicke l sich aus-
uschen.

§ 117.

Bestimmung der Reibungskoefficienten der Gase. Da nach den
twicklungen des vorigen Paragraphen die Theorie für die Reibung der
ase zu dem auch für die Flüssigkeiten gültigen Reibungsgesetze führt, so
üssen auch die zur Beobachtung der Flüssigkeitsreibung dienenden Metho-
n zur Beobachtung der Gasreibung geeignet sein. Zunächst mufs sich
r das Ausströmen von Gasen aus kapillaren Röhren ganz der entsprechende
sdruck ergeben wie für das Ausströmen von Flüssigkeiten. Die von
E. Meyer[2]) durchgeführte Theorie des Ausströmens von Gasen durch
pillare Röhren führt denn auch zu ganz entsprechenden Ausdrücken für
s Volumen der durchströmenden Gase. Mifst man das Volumen des
ter konstanten Druckverhältnissen, das heifst während des ganzen Ver-
ches konstantem Drucke p_a beim Anfange und p_e am Ende der kapillaren
hre, durch die Röhre geströmten Gases unter dem arithmetischen Mittel
r Drucke p_a und p_e, also unter dem Drucke $\frac{p_a + p_e}{2}$, so liefert die
eorie für das in der Zeiteinheit ausströmende Volumen V

$$V = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8\eta L} \left(R^4 + 4\,\frac{\eta}{\varepsilon}\,R^3\right),$$

so genau denselben Ausdruck, welchen wir für das Volumen der aus-
flossenen Flüssigkeit fanden, wenn wie dort η die Konstante der innern,
ene der äufsern Reibung, L die Länge und R den Radius der kapillaren
hren bedeutet.

Mifst man das Volumen des ausfliefsenden Gases unter einem andern
ucke, etwa p_a oder p_e, so ändert sich dieser Ausdruck etwas, da dann das
lumen V ein anderes wird; messen wir das Volumen etwa einfach durch
Volumverminderung des Gases in dem Gefäfse, aus welchem das Gas
sströmt, also unter dem Drucke p_a, so wird dasselbe V_a nach dem
riotteschen Gesetze

$$V_a \cdot p_a = V\,\frac{p_a + p_e}{2}$$

---

[1]) *Kundt* und *Warburg*, Poggend. Ann. Bd. CLV.
[2]) *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. Bd. CXXVII.

und deshalb

$$V_a = \frac{\pi (p_a^2 - p_e^2)}{16 \eta L p_a} \left(R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3\right).$$

An den im Anfange des vorigen Paragraphen erwähnten, in den J 1846 und 1849 von Graham angestellten Versuchen hat Meyer die einstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachgewiesen. Unte vielen Versuchsreihen Grahams ist eine, bei welcher die Drucke p_a t konstant erhalten wurden; es wurde unter konstantem Drucke p_a e stimmtes unter dem Drucke p_a gemessenes Volumen Luft in die (einer Luftpumpe strömen gelassen, in der durch fortgesetztes Pump konstant luftverdünnter Raum erhalten wurde, und die Zeit bes welche bei verschiedenen Drucken p_a dazu erforderlich war. Beze wir die dazu erforderliche Zeit mit t, so wird, da wir $p_e = 0$ setzen k

$$V_a = p_a t \frac{\pi}{16 \eta L} \left(R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^4\right),$$

somit

$$p_a t = \frac{V_a \, 16 \, \eta \, L}{\pi} \cdot \frac{1}{R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist, da immer dasselbe Volumen dieselbe Röhre benutzt wurde, konstant, es mufs also bei diesen Ver das Produkt aus dem Drucke p_a und der Zeit t konstant sein. Das e auch die Versuche Grahams; bei drei Versuchsreihen ergaben sich fc Werte

p_a	t	$p_a t$
1 Atmosph.	799″,5	799,5
0,75 „	1050	787,5
0,5 „	1543	771,5

Werte, welche so wenig von einander abweichen, dafs man sie in Anb der Schwierigkeit der Versuche als eine Bestätigung des Satzes a mufs, dafs die Gröfse der Reibung von dem Drucke unabhängig ist.

Bei den übrigen Versuchen liefs Graham entweder nur p_a oder p stant; indem Meyer aber aus obiger für den stationären Zustand gel Gleichung jene ableitete, welche für ein nur konstantes p_a oder p_e sind, konnte er zeigen, dafs alle Versuche Grahams mit der The Übereinstimmung sind.

Später haben dann O. E. Meyer gemeinschaftlich mit Springmühl A. von Obermaier[2]) in ausführlichen Versuchen das Ausströmungsges Gase durch kapillare Röhren geprüft, und gleichzeitig gezeigt, daf für Gase sich dabei der Koefficient ε der äufsern Reibung als une grofs ergibt. Man wird also auch bei den Gasen unter diesen Ums annehmen müssen, dafs die letzte Schicht fest an den Wänden der

[1]) *Meyer* und *Springmühl*, Poggend. Ann. Bd. CXLVIII p. 1 und p.
[2]) *A. von Obermaier*, Wien. Ber. Bd. LXXIII. *Carl*, Repertorium B Bd. XIII. Man sehe auch von *Lang*, Wien. Ber. Bd. LIII und *Meyers* Bere dieser Versuche, Poggend. Ann. CXLVIII p. 550.

äriert, und dafs an dieser sich die strömenden Gasschichten vorbei-ieben.

Infolge dieser Erfahrung ist die Beobachtung der durch eine kapillare re strömenden Gasmenge auch vortrefflich geeignet, um die Reibungs-fficienten der Gase in absolutem Mafse zu bestimmen; sie ist zu dem cke von Meyer und Springmühl und von A. von Obermaier benutzt den. Die von diesen Experimentatoren erhaltenen Resultate werden wir her für einige Gase zusammenstellen.

Bei Besprechung der Reibung der Flüssigkeiten haben wir noch eine re Methode zur Bestimmung der Reibungskoefficienten kennen gelernt, he darin bestand, dafs man eine kreisförmige Scheibe um eine durch Mittelpunkt gehende und zu ihrer Ebene senkrechte Axe in Schwingungen etzt, und das logarithmische Dekrement dieser Schwingungen bestimmt. elcher Weise dieses Dekrement von der Reibung, welche die Platte in Bewegung erleidet, abhängig ist, haben wir § 86 abgeleitet.

Wie wir dort sahen, erhält man den Reibungskoefficienten der Flüssig-n aus der Differenz der logarithmischen Dekremente, wenn man die ingungen der Scheibe in der Luft und in der Flüssigkeit beobachtet. ieser Form ist die Methode zur Bestimmung des Reibungskoefficienten Luft nicht anzuwenden, da man einen luftleeren Raum nicht herstellen . O. E. Meyer, der diese Methode zuerst zur Messung der Luftreibung tzte, verfuhr deshalb folgendermafsen[1]). An dem Draht, dessen Torsion Schwingungen bewirken soll, deren Dekrement beobachtet wird, wurde ertikel herabhängender cylindrischer Stab befestigt. Auf diesen wur-drei kreisförmige Scheiben von gleichem Durchmesser, entweder Glas-ben von 150^{mm} oder Messingscheiben von 200^{mm} Durchmesser, ver-bbar aufgesetzt, so dafs man entweder die Scheiben in einem gewissen ande von einander einklemmen konnte, oder alle drei fest an einander oben zu einer Scheibe vereinigen konnte. In dem letztern Falle wirkt Luftreibung nur auf eine Scheibe, in dem erstern dagegen auf drei iben, und das von der Luftreibung herrührende Dekrement der ingungen ist dann das dreifache von demjenigen, welches man mit Scheibe erhält. Bezeichnen wir daher jetzt mit λ_1 das mit einer ibe beobachtete Dekrement, mit λ_0 das nicht von der Luftreibung her-ende, so wird mit Vernachlässigung der höheren Potenzen des Dekre-es und wenn wir die Dicke der Scheiben gegen den Radius derselben achlässigen, nach § 86

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{R^4 \pi}{K} \sqrt{\frac{\pi}{8} \sigma \eta T_0},$$

jetzt η den Koefficienten der Luftreibung und σ die Dichtigkeit der bedeutet. Ist das Dekrement bei drei getrennten Scheiben λ_3, so wird

$$\lambda_3 - \lambda_0 = 3 \frac{R^4 \pi}{K} \sqrt{\frac{\pi}{8} \sigma \eta T_0}.$$

beiden Beobachtungen gestatten die Gröfse von η zu bestimmen.

Die Scheiben hingen bei diesen Versuchen in einer mit einer Luft-pe in Verbindung stehenden, im übrigen luftdicht verschlossenen Glocke,

[1]) *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. Bd. CXXV.

so dafs man die Reibung unter sehr verschiedenem Drucke beobad konnte.

Eine sehr wesentliche Verbesserung wurde dieser Methode durch l well[1]) gegeben, die sehr einfach darin bestand, dafs er die bewegli Scheiben zwischen denselben sehr nahe stehenden festen, den bewegli parallelen Scheiben schwingen liefs. Es wurden über und unter schwingenden Scheiben und zwischen dieselben dünne aus zwei Halbkr bestehende Platten geschoben, so dafs zwischen den schwingenden festen Scheiben sich nur wenige Millimeter dicke Luftplatten befa Durch diese Modifikation des Meyerschen Verfahrens wird die dämpl Wirkung der Luftreibung eine ganz erheblich stärkere; läfst man nä die Scheiben ohne zwischen oder nahe gestellte Platten schwingen, so t trägt sich von der schwingenden Platte aus die Bewegung erheblich w während bei den zwischen gestellten Platten die an der festen Platt liegende Luftschicht durch die Adhäsion in Ruhe bleibt; infolge desse die Geschwindigkeitsabnahme der Bewegung mit Entfernung von schwingenden Platte, der § 86 als $\frac{d\psi}{dx}$ bezeichnete Differentialquotiei heblich gröfser. Die theoretische Behandlung der zwischen den Pl stattfindenden Bewegung der Luft zeigt dann ferner, dafs das vo Reibung an der Luft abhängige logarithmische Dekrement in diesem direkt dem Reibungskoefficienten proportional ist. Ist nämlich jetzt beobachtete, λ_0 das von der Luftreibung nicht abhängige Dekrement, so nach Maxwell

$$\lambda - \lambda_0 = N \frac{\pi (R + \alpha)^4}{4DK} T \cdot \eta \cdot (1 + \vartheta),$$

wenn N die Anzahl der Oberflächen der Scheiben ist, welche der reibung ausgesetzt sind, D den Abstand der Oberfläche der beweg von der zugewandten Seite der festen Scheibe bedeutet. Die Gröfse eine Korrektion wegen des Scheibenrandes und ϑ ein aus der Theori ergebendes Korrektionsglied, welches bei kleinen Werten von D und g Schwingungsdauern der Scheiben vernachlässigt werden kann. Bei Werte D von $4{,}6^{mm}$ und einer Schwingungsdauer von $36''$ wird nach well, wenn die Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre steht, $\vartheta = -0{,}0$ bei kleineren Drucken wird der Wert noch kleiner.

Indem man auch in diesem Falle die Scheiben teils vereinzelt, aufeinandergelegt schwingen läfst, bei Anwendung von drei Scheiben einmal $N = 6$, das andere mal $N = 2$ wählt, läfst sich aus den be teten Dekrementen η ableiten.

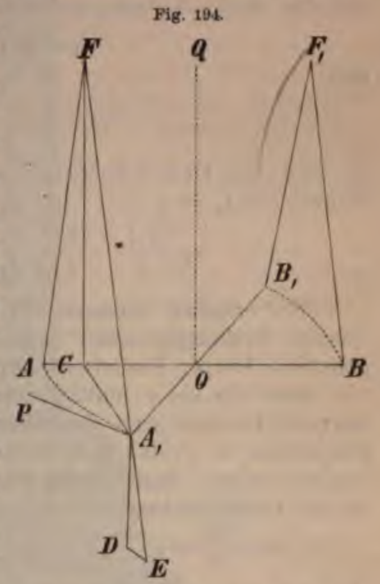
Wegen der Gröfse und Unsicherheit in der Bestimmung der i Reibung wandten später Meyer[2]) sowie Kundt und Warburg[3]) zur hängung der Scheiben, die zuerst von Gauss[4]) bei magnetischen Be tungen benutzte Bifilarsuspension an. Dieselbe besteht darin, dafs ma Körper, der Schwingungen vollführen soll, an zwei Fäden von gl

---

[1]) *Maxwell*, Philos. Transactions for the year 1866 p. 249.
[2]) *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. Bd. CXLIII.
[3]) *Kundt* und *Warburg*, Poggend. Ann. Bd. CLV.
[4]) *Gauss*, Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Verei das Jahr 1837 p. 1, für das Jahr 1840 p. 1.

ıfhängt, welche sich in gröſserer oder geringerer Entfernung von befinden, und welche entweder einander parallel hängen, wenn ihre nd unteren Anknüpfungspunkte gleich weit von einander entfernt ır symmetrisch zur vertikalen, wenn die unteren Anknüpfungspunkte näher oder auch von einander entfernter sind als die oberen. Ein hängter Körper befindet sich in der Gleichgewichtslage, wenn die äden sich ihrer ganzen Länge nach in einer Vertikalebene befinden, durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte Vertikale sich in derbene befindet. Bringt man den Körper aus seiner Lage durch eine um die Mittellinie der beiden Fäden, so wird das Gleichgewicht da die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr bestehen; die Fäden ıt mehr parallel, nicht mehr in einer Ebene, und gleichzeitig wird erpunkt des Körpers etwas gehoben. Es entsteht daher ein Drehungswelches den Körper in die Gleichgewichtsstellung zurückzuführen ist. Um die Gröſse dieses Drehungsmomentes zu bestimmen, sei ;. 194) ein Durchschnitt durch den Körper in der Aufhängeebene B seien die Aufhängefäden und verpunkt des Körpers sei in der ie QO. Ist das Gewicht des p, so können wir für unsere Beg annehmen, in jedem der Aufnkte A und B wirke das Gewicht

Fig. 194.



ı werde der Körper in die Lage edreht, wobei wir voraussetzen laſs die Fäden eine solche Länge er den Abständen $AB = 2a$ oder $2b$ haben, daſs wir die durch die eintretende Hebung des Schweraufser Acht lassen können. Dann sich AB und A_1B_1 in derselben alebene und $AOA_1 = \varphi$ ist der um welchen der Körper gedreht Gewicht $\frac{p}{2}$, das durch die Länge rgestellt sei, greift dann in A_1 abwärts an, und bildet mit der ; des Fadens einen Winkel DA_1E, h ist dem Winkel CFA_1, wenn CFA_1 die durch den Faden FA_1 Vertikale gelegte Ebene ist. Den parallel A_1D gerichteten Zug en wir in zwei Komponenten zerlegen, deren eine parallel der ; des Fadens A_1E, deren andere in der Ebene CA_1D senkrecht len den Körper wieder gegen die Gleichgewichtslage zurückzieht. llel A_1P senkrecht zu A_1O genommene Komponente dieser letztern ıltipliciert mit $A_1O = a$ gibt uns dann das den Körper in die wichtslage zurückführende Drehungsmoment. Nennen wir den den der Faden FA_1 mit der Vertikalen bildet, δ, so ist die zum nkrechte Komponente $\frac{p}{2}\sin\delta$; da die zum Faden senkrechte Kom-

ponente ED mit der Horizontalen CA_1 denselben Winkel δ bildet, ist parallel CA_1 genommene Komponente dieser Kraft $\frac{p}{2}\sin\delta\cdot\cos\delta$ und zu A_1O senkrechte $\frac{p}{2}\sin\delta\cos\delta\cos CA_1P$; zur Bildung des Dreh momentes haben wir diesen Ausdruck mit $A_1O = a$ zu multiplicieren. nun an dem andern Aufhängepunkte B_1 ein ganz ebensolches Dreh moment wirkt, ist das gesamte den Körper zurückführende Drehungsmo

$$a\cdot p\cdot\sin\delta\cos\delta\cos CA_1P.$$

In diesem Ausdrucke ist

$$\sin\delta = \sin DA_1E = \sin CFA_1 = \frac{CA_1}{FA_1} = \frac{CA_1}{l}$$

$$\cos\delta = \frac{CF}{l} = \frac{h}{l},$$

wenn wir die Länge der Fäden mit l und den vertikalen Abstand der un von den oberen Aufhängepunkten mit h bezeichnen. Da weiter

$$\cos CA_1P = \sin CA_1O$$

und

$$\sin CA_1O = \sin COA_1\frac{CO}{CA_1},$$

so wird das Drehungsmoment unter Beachtung, dafs $CO = b$ und Winkel $COA_1 = \varphi$,

$$ap\frac{CA_1}{l}\cdot\frac{h}{l}\frac{b}{CA_1}\cdot\sin\varphi = ap\frac{h}{l}\frac{b}{l}\sin\varphi.$$

Wir erhalten demnach ein dem Sinus des Drehungswinkels pr tionales Drehungsmoment; somit vollführt der aus der Gleichgewicht gebrachte Körper Pendelschwingungen um die Gleichgewichtslage.

Den mit $\sin\varphi$ multiplicierten Faktor, das Drehungsmoment, $\sin\varphi = 1$, nennt man die bifilare Direktionskraft. Ist die Länge der hängefäden so grofs, dafs wir die Hebung des Schwerpunktes ver lässigen dürfen, dann dürfen wir auch $h = l$ setzen, und erhalten fü bifilare Direktionskraft

$$p\frac{ab}{l},$$

sie ist dem Gewichte des Körpers, dem Produkte aus den halben Abst der oberen und unteren Aufhängepunkte direkt und der Länge der F umgekehrt proportional.

Da bei einer solchen Aufhängung keine innere Reibung des Aufh drahtes vorhanden ist, hängt das Dekrement der Schwingungen wese von dem Widerstande, den die Bewegung in der Luft findet, also we lich von der Reibung des an den Fäden hängenden Körpers ab. Indem Kundt und Warburg sehr feine und einander sehr nahe Fäden anwa waren die Dekremente innerhalb der Beobachtungsfehler nur von der l reibung der nach der Maxwellschen Methode schwingenden Scheibe hängig. Wurde anstatt der Scheibe ein Gewicht angehängt, welches einer kleinen Zinkscheibe bestand, so war das logarithmische Dekre

dafs die aus demselben berechnete dämpfende Kraft nur 1 Procent
den Reibungsversuchen sich zeigenden Dämpfung betrug. Kundt
burg konnten deshalb das ganze bei den Schwingungsversuchen
Maxwellschen Methode auftretende Dekrement als von der Luft-
herrührend ansehen, sie konnten daher ihre Beobachtungen mit
igen, zwischen nahe stehenden festen, schwingenden Scheibe durch-

von Kundt und Warburg bei ihren Versuchen benutzte Anordnung
. 195. Die schwingende Scheibe sitzt zunächst an einem festen
r zugleich oben bei w den zur Beobachtung der Schwingungen
Spiegel trägt. An diesem Stiel sind die Fäden der bifilaren Auf-
angeknüpft. Die festen Scheiben, zwischen denen die bewegliche
n soll, deren obere aus zwei gegen einander geschobenen Halb-
esteht, die erst an ihre Stelle
werden, wenn die schwingende
richtig hängt, werden von
hmen getragen, auf welchem
galgenartige Vorrichtung be-
t, an der oben die Bifilar-
geknüpft sind. Die ganze
ng ist mit einer Glasglocke
welche auf dem Teller pq,
des ganzen Apparates luft-
geschliffen ist. Aus der Glocke
mit einem Glashahne l ver-
re Röhre zu einem weitern
abzusperrenden ⊤förmigen
ssen einer Schenkel zu einer
e, dessen anderer zu einem
führt, welches das Gas ent-
sen Reibungskoefficient be-
werden soll. Um die
Schwingungen zu setzen,
n dem dieselbe tragenden
Stückchen Eisendraht be-
ie Schwingungen werden
rch Annähe-
s Magnetes
Eisendraht

Fig. 195.

nd Warburg
ihren Ver-
sehr hohem
Dichtigkeit der Gase geändert, zur Prüfung des aus der Theorie sich
n Gesetzes, dafs die Reibung von der Dichtigkeit des Gases un-
sei. Da die Reibungskoefficienten bei diesen Beobachtungen den
ischen Dekrementen proportional sind, so mufs, wenn das Gesetz
t, der Wert des logarithmischen Dekrementes von der Dichte des
abhängig sein. In der That zeigte sich das, so lange der Druck

mehr als 20^{mm} Quecksilber betrug; wurde er kleiner, so nahmen die logarithmischen Dekremente nicht unerheblich ab. Die beiden Physiker zeigten indes, dafs hieraus nicht ein Mangel der aus unserer Auffassung sich ergebenden Theorie der Reibung folgt, dafs vielmehr die bei der Ableitung der schwingenden Bewegung mit Berücksichtigung der Reibung gemachte Voraussetzung, dafs die an den festen Körpern anliegende Gasschicht an derselben fest haftet, nicht mehr zulässig ist. Wird der Druck kleiner als 20^{mm} Quecksilber, so ist der mit ε bezeichnete Koefficient der äufseren Reibung nicht mehr unendlich zu setzen, es tritt ein Gleiten des Gases an den Wänden des festen Körpers ein. Mit Berücksichtigung dieses Gleitens, dessen Theorie sie entwickeln[1]), konnten die beiden Physiker zeigen, dafs bis zu einem Drucke von $0,6^{mm}$ Quecksilber die Koefficienten der inneren Reibung konstant sind.

Ehe wir die von den verschiedenen Experimentatoren erhaltenen Werte für die Reibungskoefficienten einiger Gase zusammenstellen, wollen wir, um nicht später auf diese Untersuchungen noch zurückkommen zu müssen, noch auf eine Folgerung der Theorie hinweisen. Die Theorie gibt für den Reibungskoefficienten den Wert

$$\eta = \tfrac{1}{3} m n u l,$$

sie zeigt somit, dafs derselbe der Geschwindigkeit u der Moleküle proportional ist. Für diese gaben wir § 103 an, dafs, wenn u_0 die Geschwindigkeit bei 0^0 ist

$$u = u_0 \sqrt{1 + 0,003\,67\,t} = u_0\,(1 + 0,003\,67\,t)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Nach demselben Gesetze müfste also auch der Reibungskoefficient mit der Temperatur wachsen. Diese Folgerung hat sich in den Versuchen nicht bestätigt, sämtliche Versuche ergeben ein rascheres Wachsen des Reibungskoefficienten. Maxwell[2]) folgerte aus seinen Versuchen, dafs der Reibungskoefficient der Luft nicht der Quadratwurzel, sondern direkt $1 + 0,003\,67\,t$ proportional zunehme. O. E. Meyer[3]) erhielt für Luft einen zwischen dem theoretischen und dem von Maxwell gefundenen liegenden Wert, er fand

$$\eta = \eta_0\,(1 + 0,002\,5\,t) = \eta_0\,(1 + 0,003\,67\,t)^{\frac{3}{4}},$$

da man bei der Kleinheit der Koefficienten von t sich bei Entwicklung der Potenz $\frac{3}{4}$ auf das erste Glied beschränken kann. Denselben Wert für Luft fand Warburg[4]).

Am ausführlichsten ist die Abhängigkeit der Reibungskoefficienten von der Temperatur fast gleichzeitig von Puluj[5]) durch Ausflufsversuche und Schwingungsversuche, und von A. von Obermaier[6]) durch Ausflufsversuche verfolgt worden. Beide Experimentatoren gelangen übereinstimmend

[1]) *Kundt* und *Warburg*, Poggend. Ann. Bd. CLV. p. 345 ff.
[2]) *Maxwell*, Philosophical Transactions for 1866 p. 267.
[3]) *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. Bd. CXLIII, Bd. CXLVIII.
[4]) *Warburg*, Poggend. Ann. Bd. CLIX.
[5]) *Puluj*, Wiener Berichte Bd. LXIX, Bd. LXX, Bd. LXXIII. *Carl*, Repertorium Bd. XIII.
[6]) *A. von Obermaier*, Wiener Berichte Bd. LXXI, Bd. LXXIII. *Carl*, Repertorium Bd. XII, Bd. XIII.

Resultate, dafs die Änderung der Reibungskoefficienten mit der
atur für die verschiedenen Gase verschieden ist, für alle aber er-
rascher erfolgt, als es nach der vorgeführten Theorie der Reibung
ll sein sollte. Für Luft finden beide Experimentatoren fast den
n Wert wie O. E. Meyer; Puluj gibt als Exponenten des Temperatur-
enten anstatt $\frac{1}{2}$ den Wert 0,722, A. von Obermaier 0,76; für Wasser-
hält der erstere 0,693, der letztere 0,70, für Kohlensäure sind die
0,917 und 0,94, wie man sieht vortrefflich übereinstimmende Werte.
ähnlichen fast der Einheit gleichen Wert erhielt A. von Obermaier
koxydul, Chloräthyl und Äthylen, Gase, die zum Teil bei gewöhn-
Temperatur durch Druck flüssig gemacht werden können, teils, wie
ylen nach § 99, sehr stark von dem Mariotteschen Gesetze abweichen.
n diese Nichtübereinstimmung der Erfahrung mit der aus unserer
nung von der Natur der Gase abgeleiteten Theorie der Gase in Ein-
u bringen, nimmt Stefan[1]) an, dafs die mittleren Wegelängen mit
nperatur des Gases auch bei konstanter Dichtigkeit des Gases etwas
werden, eine Annahme, welche nach unserem Ausdrucke für dieselbe

$$l = \frac{1}{n \frac{4}{3} \varrho^2 \pi}$$

hinauskommt, dafs die Radien der Wirkungssphären mit steigender
atur kleiner werden. Ohne auf diese Frage hier schon näher ein-
, möge nur bemerkt werden, dafs diese Annahme darauf hinaus-
, dafs die Abstände, bis zu welchen die Schwerpunkte der Moleküle
neinanderprallen sich nähern können, mit der Geschwindigkeit, mit
sie gegen einander fliegen, etwas kleiner wird.
folgender Tabelle sind für einige Gase die Reibungskoefficienten
en gestellt, dieselben geben, gerade wie bei den Flüssigkeiten in
mmen den auf ein Quadratmillimeter der Strömung entgegenwirken-
ck, wenn zwei ein Millimeter von einander entfernte Schichten die
ndigkeitsdifferenz von einem Millimeter haben.
r Luft ist η bei 15° nach

well[2])	O. E. Meyer[3])	Puluj[4])	K. u. W.[5])	A. v. Oberm.[6])
002 02	0,000 001 93	0,000 001 86	0,000 001 91	0,000 001 77
erstoff				
—	0,000 000 95	0,000 000 95	0,000 000 94	0,000 000 91
nsäure				
—	0,000 001 63	0,000 001 53	0,000 001 55	0,000 001 49
rstoff				
—	0,000 002 16	—	—	0,000 001 99
kstoff				
—	0,000 001 87	—	—	0,000 001 76
noxyd				
—	—	—	—	0,000 001 72

Stefan, Wien. Berichte Bd. LXV. p. 338.
Maxwell, Philos. Transactions for 1866.
O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXLVIII. p. 226 u. 549.
Puluj, Wiener Berichte Bd. LXXIII. *Carl*, Repertorium Bd. XIII.
Kundt und *Warburg*, Poggend. Ann. Bd. CLV.
A. von Obermaier, Wiener Berichte Bd. LXXIII. *Carl*, Repert. Bd. XIII.

Wie man sieht stimmen die von verschiedenen Beobachtern gefundenen Werte recht gut mit einander überein, nur findet A. von Obermaier durchweg etwas kleinere Werte.

§ 118.

Diffusion der Gase. Verbindet man zwei Gefäfse etwa durch eine Öffnung in dünner Wand, welche dasselbe Gas enthalten, so tritt eine Bewegung der Gase nur ein, wenn in dem einen Gefäfs der Druck kleiner ist als in dem andern, ist keine Druckdifferenz in beiden Gefäfsen vorhanden, so tritt auch keine Strömung des Gases ein. Das ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn in den beiden durch eine Öffnung in Verbindung stehenden Räumen verschiedene Gase vorhanden sind. Zwar läfst sich durch den Versuch nachweisen, dafs substantiell verschiedene Gase denselben Druck auf einander ausüben, wie die Teilchen gleichartiger Gase, aber dennoch tritt stets eine Vermischung ein, wenn verschiedene Gase unter gleichem Drucke durch eine Öffnung mit einander in Verbindung stehen. Dafs ersteres der Fall ist, zeigt folgender Versuch[1]). Wenn man eine mit Luft gefüllte unten verschlossene Glasröhre vom Boden aus mit einem gefärbten Gase zur Hälfte anfüllt, welches schwerer ist als Luft, z. B. mit unterchloriger Säure, so ruht in dem obern Teile der Röhre anfänglich eine farblose Luftsäule auf dem gefärbten Gase. Bringt man dann rasch das obere Ende der Röhre mit einer Luftpumpe in Verbindung und pumpt einen Teil der Luft aus, so rückt die an der Farbe erkenntliche Grenzfläche beider Gase mit der zunehmenden Verdünnung aufwärts, der Druck der Gase ändert sich aber in der ganzen Ausdehnung der Röhre in gleicher Weise, denn seitlich angebrachte Manometer zeigen in jedem Momente an allen Stellen der Röhre den gleichen Druck. Aber ungeachtet dessen, dafs die verschiedenen Gase auf einander denselben Druck ausüben, als die einzelnen Teile desselben Gases, vermag ein Gas ein anderes nicht in einem Raume abzusperren.

Der erste, welcher diese Vermischung verschiedener Gase nachwies, war Dalton[2]), er wandte zwei Flaschen von gleicher Kapacität an, welche durch einen Hahn mit einander in Verbindung gesetzt werden konnten. Die eine füllte er mit Kohlensäure, die andere mit atmosphärischer Luft unter gleichem Drucke und bei gleicher Temperatur, und stellte sie so auf, dafs die Kohlensäure in der untern, die Luft in der obern Flasche sich befand. Auf diese Weise konnte durch die verschiedenen specifischen Gewichte der Gase eine Mischung derselben nicht eintreten, da die Kohlensäure als das specifisch schwerere Gas unten und die leichtere Luft darüber war. Nach geöffnetem Hahne war der Druck im Innern der Flaschen ungeändert derselbe geblieben, nach mehreren Stunden waren aber beide Gase gleichmäfsig in beiden Flaschen verteilt, ungeachtet, dafs die Schwere dieselben getrennt zu erhalten suchte. Es folgt daraus, dafs jedes der beiden Gase sich in dem ganzen Raum verbreitet hatte, als wenn es in demselben allein vorhanden gewesen wäre. Jedes der Gase dehnte sich dadurch auf den doppelten Raum aus, sein Druck mufste dadurch die Hälfte des frühern

[1]) *Bunsen*, Gasometrische Methoden p. 209.
[2]) *Dalton*, Gilbert Annalen Bd. XXVII.

erden; die Unveränderlichkeit des äufsern Druckes zeigt daher ebenfalls, afs auch die Drucke verschiedener Gase sich summieren.

Ein ausgezeichnetes Beispiel dieser Mischung der Gase ihrem Gewichte atgegen zeigt uns unsere Atmosphäre, welche, wie wir bereits früher erähnten, ein Gemische zweier Gase, Sauerstoff und Stickstoff ist. Obwohl ämlich der Sauerstoff schwerer ist als der Stickstoff und zwar im Verhälts 110 zu 97, so zeigt doch die Luft an allen Stellen, wo sie geschöpft ird, wesentlich dieselbe Zusammensetzung von 79 Teilen Stickstoff und 1 Teilen Sauerstoff.

Man bezeichnet diese Mischung von unter gleichem Drucke stehenden asen ähnlich wie die allmähliche Mischung zweier verschiedener über einader gelagerter mischbarer Flüssigkeiten, als Diffusion der Gase.

Die Diffusion der Gase in einander zeigt auch darin eine Analogie mit er Diffusion der Flüssigkeiten, dafs die Schnelligkeit, mit welcher zwei ase sich mischen, wesentlich von der Natur der Gase abhängig ist, wie das hon die ersten messenden Versuche von Graham[1]) zeigten. Graham gibt a, dafs sich Wasserstoff in Luft sehr viel schneller verbreitet als Kohlenure.

Der erste, welcher die Diffusion der Gase genauer untersuchte, war oschmidt[2]), er ging davon aus, dafs die Diffusion der Gase ganz denselben esetzen folgen müsse wie diejenige der Flüssigkeiten. Die Menge eines ases, welche, konstante Verhältnisse vorausgesetzt, in der Zeiteinheit durch e Querschnittseinheit wandert, wenn auf den beiden Seiten des Querschnitts e Konzentration des Gases eine verschiedene ist, wird der Konzentrationsfferenz, und einem von der Natur der beiden Gase abhängigen Koefficienten, er Diffusionsgeschwindigkeit oder dem Diffusionskoefficienten proportional esetzt. Als Konzentration des Gases können wir hier einfach den Druck es betreffenden Gases an der betrachteten Stelle einführen, indem nach dem orhin erwähnten Gesetze von Dalton an jeder Stelle eines zwei Gase entaltenden Raumes sich die Drucke beider Gase zu dem im ganzen Raume onstanten Gesamtdrucke summieren, jedes Gas aber einen solchen Teil des esamtdruckes ausübt, als es einen Bruchteil der in der Volumeinheit an er betreffenden Stelle vorhandenen Gesamtmenge des Gases ausmacht. Der iffusionsvorgang wird demnach durch dieselben Gleichungen, die wir § 82 r die Diffusion der Flüssigkeiten ableiteten, dargestellt, wenn wir die dort ngeführte Konzentration durch den Druck p des betreffenden Gases ertzen, also durch die Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = -k\frac{d^2p}{dx^2},$$

enn wir auch jetzt den Diffusionskoefficienten mit k bezeichnen.

Betreffs desselben ist nur zu bemerken, dafs der Diffusionskoefficient ch immer auf zwei Gase beziehen mufs, dafs wir also z. B. für Kohlensäure ur einen bestimmten Diffusionskoefficienten einem bestimmten zweiten Gase egenüber, also etwa dem Wasserstoff gegenüber erhalten, und dafs dann er Diffusionskoefficient des Wasserstoffs gegenüber der Kohlensäure derlbe ist als derjenige der Kohlensäure gegenüber dem Wasserstoff. Dafs

[1]) *Graham*, Philosoph. Magazin, 4 series, vol. XXVI. Poggend. Ann. CXX.
[2]) *Loschmidt*, Wiener Ber. Bd. LXI, Bd. LXII.

letzteres der Fall sein mufs, ergibt sich unmittelbar aus dem Daltonschen Gesetze, dafs sich die Drucke beider Gase an jeder Stelle eines Gefäfses zu dem konstanten Gesamtdrucke summieren. Ist also in einem gegebenen Momente an einer Stelle des Raumes p_1 der Druck des einen, p_2 der des andern Gases, so ist immer

$$p_1 + p_2 = p$$

gleich dem konstanten Gesamtdrucke. Geht dann durch Zuströmen des einen Gases in der Zeit dt der Druck desselben in $p_1 + dp_1$ über, so muſs durch Fortströmen des andern der Druck desselben in $p_2 - dp_2$ übergehen, und da wieder

$$p_1 + dp_1 + p_2 - dp_2 = p$$

sein mufs, folgt $dp_1 = dp_2$. Es ist somit der Strom des einen Gases gegen das zweite stets gleich dem des zweiten gegen das erste.

Um die physikalische Bedeutung des Diffusionskoefficienten zu erkennen, denken wir uns wieder den stationären Zustand hergestellt, das heifst also, wir denken uns ein Gefäfs mit Kohlensäure gefüllt, etwa unter dem Drucke einer Atmosphäre und dieses durch einen Cylinder von ^{qcm} Querschnitt und l^{cm} Länge mit einem ebensolchen mit Wasserstoff gefüllten Gefäfse verbunden. Die Gefäfse denken wir uns von solcher Gröfse, dafs die durch Diffusion der Gase in sie übertretenden Mengen des andern Gases keine merkliche Verunreinigung des in dem Gefäfse vorhandenen Gases bewirken, oder etwa, wir denken uns durch irgend ein Mittel die in das Wasserstoffgefäfs übergetretene Kohlensäure und den in das Kohlensäuregefäfs übergegangenen Wasserstoff sofort weggenommen. Dann ist auf der einen Seite des Cylinders der Druck des einen Gases stets konstant und gleich p_0, der der andern stets gleich Null, und auf der l^{cm} langen Strecke des Cylinders nimmt der Druck von p_0 auf 0, und zwar nach Eintritt des stationären Zustandes in solcher Weise ab, dafs, wie sich durch eine der im § 82 für den analogen Fall gemachten gleiche Entwicklung ergibt, im Abstande x von dem Beginne des Cylinders der Druck des betreffenden Gases p_1 gleich ist

$$p_1 = p_0 - \frac{p_0}{l} \cdot x.$$

Für das unter dem Drucke p_0 gemessene Volumen des Gases, welches dann in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt des Cylinders wandert, welches somit aus dem einen Gefäfse aus- und in das andere übertritt, ergibt sich gemäfs den Entwicklungen des § 82

$$S = kq\frac{p_0}{l} \cdot$$

Setzen wir nun $q = 1$, ein Quadratcentimeter, $l = 1^{cm}$, p_0 gleich einer Atmosphäre, so wird

$$S = k,$$

somit ist der Diffusionskoefficient jene Menge eines Gases, dieselbe in Kubikcentimetern unter dem Drucke p_0 gemessen, welche in der Zeiteinheit, welche wir die Sekunde wählen, bei dem stationären Zustand durch die Fläche ein Quadratcentimeter in ein anderes Gas übertritt, wenn auf der Strecke 1^{cm} der Druck des ersten Gases von 1 Atmosphäre auf 0 abnimmt, somit der des zweiten Gases von 0 auf eine Atmosphäre zunimmt. Der Diffusionskoefficient des zweiten Gases ist dann ganz derselbe.

Das hier gedachte einfache Verfahren läfst sich in der Praxis allerdings icht durchführen. Loschmidt verfuhr deshalb zur Bestimmung des Diffu-onskoefficienten folgendermafsen. Ein vertikal zu stellendes Glasrohr von 7,5^{cm} Länge und 2,6^{cm} Durchmesser wird an beiden Enden durch Spiegel-lasplatten geschlossen, in welche je zwei Glashähne eingekittet sind. In er Mitte ist dasselbe durchschnitten und beide Hälften sind in zwei durch ntergelegte Metallplatten verstärkte Spiegelglastafeln eingelassen, zwischen enen sich ein Schieber von dünnem Stahlblech mittels eines Schrauben-ewindes hin und herführen läfst. Derselbe ist mit einer dem lichten Quer-hnitt des Glasrohres entsprechenden kreisförmigen Öffnung versehen, und eingerichtet, dafs er in der einen Stellung I die beiden Rohrhälften von nander gasdicht absperrt, in der andern Stellung II dagegen die Kommuni-ation zwischen ihnen vollkommen frei läfst. Es wurden bei der Schieber-ellung I beide Rohrhälften mit Quecksilber gefüllt, dasselbe dann durch e wohlgetrockneten Gase verdrängt, und der Apparat in die Vertikal-ellung gebracht.

Nach etwa einer Viertelstunde wurde der Schieber möglichst rasch die Stellung II gebracht, wodurch der Beginn der Diffusion herbei-führt wurde. Nach Ablauf einer passenden Zeit, eine halbe oder eine nze Stunde, ward der Schieber geschlossen, und damit die Diffusion be-det. Das Resultat der Diffusion wurde durch eine genaue Analyse der in er Rohrhälfte vorhandenen Gase festgestellt. Wie man sieht, entspricht s Verfahren im wesentlichen dem einen von Schuhmeister (§ 82) zur Be-mmung der Diffusion der Salze angewandten. Der Diffusionskoefficient gibt sich in ähnlicher Weise aus den gefundenen Gasmengen[1]). In ser Weise erhielt Loschmidt unter andern folgende Diffusionskoefficienten sgedrückt in den oben angenommenen Einheiten

Wasserstoff — Kohlensäure	$k = 0{,}556$
Sauerstoff — Kohlensäure	0,141
Wasserstoff — Sauerstoff	0,722
Luft — Kohlensäure	0,142.

Loschmidt fand weiter, dafs die Diffusionskoefficienten einer und der-ben Kombination der Summe der Gasdrucke, oder dem in dem Diffusions-fäfse vorhandenem Gesamtdrucke umgekehrt proportional seien, und dafs ganz erheblich mit der Temperatur wachsen. Obige Werte beziehen sich f die Temperatur des schmelzenden Eises.

Für die bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur den verschiedenen mbinationen entsprechenden Werte der Diffusionskoefficienten ergeben e Beobachtungen Loschmidts, dafs dieselben der Quadratwurzel aus dem odukte der specifischen Gewichte umgekehrt proportional sind, oder wenn r die Dichtigkeiten der beiden Gase mit δ_1 und δ_2 bezeichnen, dafs

$$k\sqrt{\delta_1 \delta_2} = k_0$$

konstante Gröfse ist. Setzen wir das specifische Gewicht der Luft 1, so wird:

[1]) Man sehe aufser *Loschmidt* a. a. O. *Stefan*, Wiener Berichte Bd. LXIII. ff.

Luft δ = 1	Luft — Kohlens.	$k\sqrt{\delta_1 \delta_2}$	= 0,1775
Kohlensäure 1,53	Wasserst. — Kohlens.	„	= 0,1811
Wasserstoff 0,0693	Wasserst. — Sauerst.	„	= 0,1990
Sauerstoff 1,103	Sauerst. — Kohlens.	„	= 0,1848.

Die Zahlen der letzten Kolumne weichen in der That nur wenig v einander ab.

§ 119.

Ableitung der Diffusion aus der dynamischen Gastheorie. langsame Mischung, welche bei der Diffusion zweier Gase eintritt, glau Buys Ballot[1]) als mit der dynamischen Gastheorie nicht verträglich sehen zu können, da bei der großen Geschwindigkeit der gasförmigen wegung es nur sehr kurze Zeit dauern könne, bis in geschlossenen Räum zwei Gase sich mischen. Clausius[2]) wies dem entgegen darauf hin, d die Schnelligkeit, mit welcher zwei Gase sich mischen, nicht von der schwindigkeit der fortschreitenden Bewegung allein, sondern ebenso s von den Strecken abhängig sein müsse, welche die Gasmoleküle unges zurücklegen. Es war das für Clausius der Anlaß, die mittlern Wegelän der Gasmoleküle zu untersuchen, für welche sich dann Werte ergaben, § 1 welche nicht sehr große Vielfache des Radius der Wirkungsphäre s Eine vollständigere Ableitung der Diffusion aus der dynamischen Gasthe gaben Maxwell[3]) und besonders Stefan[4]). Wir begnügen uns hier damit, Diffusion der Gase nur so weit aus der Theorie abzuleiten, daß wir erken wie der Diffusionskoefficient von den das Gas in der dynamischen The charakterisierenden Größen, Geschwindigkeit und Wegelänge abhängig wir schlagen dazu im wesentlichen denselben Weg der Betrachtung ein, O. E. Meyer[5]) gewählt hat.

Haben wir zunächst einen ganz gleichmäßig mit einem und demsel Gas gefüllten Raum, so ergeben uns die Entwicklungen des § 101 und die Anzahl der Moleküle, welche durch irgend eine Ebene in der Zeitein in der einen Richtung hindurchgehen. Schon im § 116 leiteten wir da ab, daß, wenn in der Volumeinheit des Raumes n Moleküle vorhanden s durch eine in dem Gase gedachte Ebene pro Flächeneinheit in der Richt welche mit der zur Ebene senkrechten Richtung den Winkel ϑ bildet, der Sekunde

$$\frac{nu \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{2}$$

Moleküle hindurchgehen. Die gesamte durch die Flächeneinheit dieser E hindurchfliegende Zahl erhalten wir in der Summe aller den verschied Winkeln ϑ zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ entsprechenden Zahlen, also in der Su

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{nu \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{2} = \frac{nu}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\left(\cos^2 o - \cos^2 \frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{4}\, nu.$$

1) *Buys Ballot*, Poggend. Ann. Bd. CIII.
2) *Clausius*, Poggend. Ann. Bd. CV. Abhandl. zur mechanischen Wä theorie II p. 260.
3) *Maxwell*, Philosoph. Mag. 4 series. vol. XX.
4) *Stefan*, Wiener Berichte Bd. LXIII, Bd. LXV.
5) *O. E. Meyer*, die kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877. p. 1

Es passiert also ein Viertel der in der Volumeinheit vorhandenen ›lektüle in der Zeiteinheit die die Volumeinheit begrenzende Flächeneinheit der einen Richtung. Genau die gleiche Zahl passiert die Flächeneinheit n der andern Seite, so dafs die Dichtigkeit und Druck des Gases überall r gleiche bleibt.

Denken wir uns jetzt, ein Gefäfs enthalte etwa in der von Loschmidt wählten Anordnung zwei Gase, und die Diffusion habe schon eine Zeit ag gedauert. Es wird dann die Dichtigkeit des einen Gases von unten ch oben, die des andern von oben nach unten abnehmen. Nennen wir n Gesamtdruck der Gase in dem Gefäfse p, in irgend einem Quermitt den Druck des einen Gases p_1, den des andern p_2, so ist nach dem ltonschen Satze überall

$$p_1 + p_2 = p.$$

Gehen wir von dem betrachteten Querschnitt nach der Richtung des nehmenden Druckes um eine kleine Entfernung x weiter, so werden wir Druckabnahme dem Werte x proportional setzen, und somit den Druck Abstande x setzen dürfen

$$p' = p_1 - \frac{dp_1}{dx} \cdot x,$$

der andern Seite des betrachteten Querschnitts wächst für gleiche Werte x der Druck um dieselbe Gröfse.

Für den Druck des zweiten Gases p'' an derselben Stelle, wo der des en p' ist, erhalten wir ebenso

$$p'' = p_2 + \frac{dp_2}{dx} \cdot x$$

d da nach dem Daltonschen Satze auch $p' + p'' = p$, so mufs dem rte nach

$$\frac{dp_1}{dx} = \frac{dp_2}{dx}.$$

Dieselbe Beziehung, welche für die Verteilung des Druckes der einzelnen e gilt, gilt auch für die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Mole-e. Nach einem von Avogadro aufgestellten Satze, der darauf basiert, s das specifische Gewicht der Gase ihrem chemischen Molekulargewicht portional ist, befindet sich nämlich in mit Gas gefüllten Räumen gleicher öfse unter gleichem Drucke und bei gleicher Temperatur stets dieselbe ahl von Molekülen, welches auch die chemische Natur des Gases sei. r werden auf diesen Satz in der Wärmelehre bei Untersuchung der Dampften zurückkommen. Nach diesem Satze können wir für das ganze usionsgefäfs an jeder Stelle setzen für die Anzahl der in der Volumeint vorhandenen Moleküle

$$n = n_1 + n_2,$$

n n_1 die an der betrachteten Stelle in der Volumeinheit vorhandenen ekülle des einen Gases und n_2 die des andern bedeuten. In einem Abde x in der Richtung der abnehmenden Dichte des ersten Gases it n in der Volumeinheit die Zahl der Moleküle des ersten Gases

$$n' = n_1 - \frac{dn_1}{dx} x,$$

die der zweiten Art

$$n'' = n_2 + \frac{dn_2}{dx}\,x,$$

wo wieder dem Werte nach

$$\frac{dn_1}{dx} = -\frac{dn_2}{dx}.$$

Durch den betrachteten Querschnitt gehen nun stetig infolge der schreitenden Bewegung Moleküle der beiden Arten nach beiden Richtu hin, deren Zahl wir zu bestimmen haben. Zu dem Zwecke machen wieder die Annahme, dafs der von allen Molekülen desselben Gases zu gelegte Weg derselbe sei. Da indes diese Moleküle sich nicht in Molek der gleichen Art bewegen, sondern da Moleküle beider Gase sich neben ander befinden, so dürfen wir für diese mittlere Wegelänge nicht die einsetzen, welche die Moleküle haben, wenn sie sich in einem mit gl artigen Molekülen gefüllten Raume bewegen, sondern müssen einen an noch näher zu bestimmenden Wert einsetzen. Wir nennen die Wegel des ersten Gases unter diesen Verhältnissen l', die des zweiten l''; dies kommen den für die betreffenden Gase charakteristischen Wegelänge so näher, je weniger Moleküle des zweiten Gases in dem betrachteten R vorhanden sind.

Denken wir uns das Gas I sei unten, das Gas II sei oben. durch den betrachteten Querschnitt nach oben tretenden Moleküle der e Art werden dann durch den allgemeinen Ausdruck für die durch die Flä einheit tretende Molekülzahl $\frac{1}{4}\,nu$ gegeben, wenn wir für n die Molekü n' setzen, welche der Volumeinheit der Schicht entsprechen, die um l' dem betrachteten Querschnitt sich befindet. Diese ist

$$n' = n_1 + \frac{dn_1}{dx}\,l',$$

somit ist die Zahl der übertretenden Moleküle

$$\nu_1 = \tfrac{1}{4}\,u_1\left(n_1 + \frac{dn_1}{dx}\,l'\right);$$

ganz entsprechend ist die Zahl der von unten nach oben gehenden Mol des zweiten Gases

$$\nu_2 = \tfrac{1}{4}\,u_2\left(n_2 - \frac{dn_2}{dx}\,l''\right).$$

Von oben nach unten treten Moleküle der beiden Gase

$$\nu'_1 = \tfrac{1}{4}\,u_1\left(n_1 - \frac{dn_1}{dx}\,l'\right); \quad \nu'_2 = \tfrac{1}{4}\,u_2\left(n_2 + \frac{dn_2}{dx}\,l''\right).$$

Es gehen demnach von unten nach oben überhaupt mehr Moleküle von oben nach unten

$$\nu_1 - \nu'_1 + \nu_2 - \nu'_2.$$

Da die Mischung der Gase in so geringen Abständen von dem bet teten Querschnitt nicht wesentlich verschieden sind, können wir die in Ausdrücken für ν_1 und ν'_1 vorkommenden Werte von l' und ebenso d denen für ν_2 und ν'_2 vorkommenden l'' als einander gleich setzen; da f

$$\frac{dn_1}{dx} = -\frac{dn_2}{dx},$$

wird

$$\nu_1 - \nu'_1 + \nu'_2 - \nu'_2 = \tfrac{1}{2}\frac{dn_1}{dx}\left(l' u_1 - l'' u_2\right).$$

Durch diesen Überschufs würde indes oberhalb des betrachteten Quer-
hnitts eine Vermehrung des Druckes eintreten; infolge dessen treten eben-
viel Moleküle des oberhalb desselben vorhandenen Gasgemisches durch
n Querschnitt auf die andere Seite zurück. Das Gemische enthält in der
lumeinheit n' Moleküle des ersten, n'' des zweiten Gases oder der $\frac{n'}{n}$ Teil
s Gemisches besteht aus dem ersten, der $\frac{n''}{n}$ aus dem zweiten Gas. Es
gibt somit als Zuwachs des ersten Gases oberhalb des Querschnittes

$$\tfrac{1}{2}\frac{dn_1}{dx} l' u_1 - \frac{n'}{n}\tfrac{1}{2}\frac{dn_1}{dx}\left(l' u_1 - l'' u_2\right),$$

er

$$\frac{1}{2n}\frac{dn_1}{dx}\left((n-n')\, l' u_1 + n' l'' u_2\right) = \frac{1}{2n}\frac{dn_1}{dx}\left(n'' l' u_1 + n' l'' u_2\right).$$

Genau derselbe Zuwachs von Molekülen des zweiten Gases findet unter-
lb des Querschnittes statt, so dafs sich also zunächst ergibt, dafs der Diffusions-
om der Gase nach beiden Richtungen der gleiche ist.

Weiter enthält dieser Ausdruck die der Theorie der Diffusion zu Grunde
gende Annahme, dafs nämlich die Menge des durch die Querschnittseinheit
rtretenden Gases der Abnahme der Dichtigkeit des betreffenden Gases
d einem von der Natur beider Gase abhängigen Koefficienten proportional
; dieser vorhin mit k bezeichnete Quotient ist

$$k = \frac{1}{2n}\left(n'' l' u_1 + n' l'' u_2\right).$$

Anstatt der Zunahme der Molekülzahl des ersten Gases erhalten wir
jenige des von dem ersten Gase ausgeübten Druckes, indem wir einfach
$\frac{1}{c}$ durch $\frac{dp_1}{dx}$ ersetzen, da wir früher gezeigt haben, dafs der Druck, den
Gas in einem gegebenen Raume ausübt, der Zahl der in demselben vor-
ndenen Moleküle proportional ist.

In einer Beziehung weicht dagegen der gefundene Wert von k von
im vorigen Paragraphen gemachten Annahme ab, derselbe ist nicht für
ei Gase bei gegebenem Gesamtdruck und gegebener Temperatur konstant,
ndern ändert sich mit dem Mischungsverhältnisse der Gase, da sowohl n'
d n'' als auch l' und l'' sich mit demselben ändern.

Bei den Versuchen von Loschmidt wird die Diffusion der Gase durch
n Querschnitt beobachtet, der anfänglich beide Gase von einander trennt,
m dieser wird am Schlusse des Versuches wieder geschlossen und dann
r Inhalt jeder Rohrhälfte analysiert. In diesem Querschnitt und in dessen
he wird man mit grofser Annäherung annehmen dürfen, dafs während
r ganzen Dauer des Versuches die Zahlen n' und n'' der Moleküle der
den Gase stets gleich sind, so dafs jede gleich $\tfrac{1}{2} n$ ist. Für diese Ver-
he ergibt sich dann k

$$k = \tfrac{1}{4}\left(l' u_1 + l'' u_2\right).$$

In dem Falle werden wir auch $l' = l''$, also die mittlere Wegelänge
r Moleküle im Gemische einander gleich setzen dürfen. Für diese Wege-

länge macht dann Stefan die Voraussetzung, dafs sie dieselbe sein würde, wie wenn der Radius der Wirkungssphäre aller Moleküle derselbe und zwar gleich dem arithmetischen Mittel der Radien der Moleküle der beiden Gase sei. Vernachlässigen wir in dem Ausdruck für die Wegelängen den von den Wirkungssphären selbst ausgefüllten Raum, so ist

$$l = \frac{1}{\frac{4}{3} n \varrho^2 \pi};$$

nennen wir den Radius der Wirkungssphäre für das erste Gas ϱ_1, für das zweite ϱ_2, so wird

$$l' = l'' = \frac{1}{\frac{4}{3} n \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}\right)^2 \pi},$$

denn die Gesamtzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle ist auch jetzt gleich n. Setzen wir die mittlere Wegelänge des ersten Gases l_1, die des zweiten l_2, beide Gase im ungemischten Zustande vorausgesetzt, so können wir setzen

$$\frac{1}{\sqrt{l'}} = \frac{1}{2} \varrho_1 \sqrt{\frac{4}{3} n \pi} + \frac{1}{2} \varrho_2 \sqrt{\frac{4}{3} n \pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)$$

$$l' = l'' = 4 \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2}.$$

Setzen wir diesen Wert ein, so wird

$$k = \frac{u_1 + u_2}{\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2},$$

ein Ausdruck, der zeigt, dafs, wie Loschmidt fand, der Diffusionskoefficient dem Gesamtdrucke des Gases umgekehrt proportional ist, da die Wegelängen der dem Gesamtdrucke der Gase proportionalen Molekülzahl n umgekehrt proportional sind. Ebenso ergibt sich nach den früheren Bemerkungen, dafs der Diffusionskoefficient sich mit der Temperatur ändern mufs, da die Geschwindigkeiten u und die Wegelängen l sich mit derselben ändern.

Interessant ist, dafs nach obigem Werte der Diffusionskoefficient durch den Reibungskoefficienten der beiden Gase ausgedrückt werden kann. Die Wegelängen l_1 und l_2 sind jene der Gasmoleküle, wenn die Volumeinheit n Moleküle des einen oder des andern Gases enthält; nennen wir den Reibungskoefficienten des ersten Gases η_1, des zweiten η_2, so ist nach § 116

$$\eta_1 = \frac{1}{3} n m_1 u_1 l_1 \qquad \eta_2 = \frac{1}{3} n m_2 u_2 l_2.$$

Setzen wir die hiernach sich ergebenden Werte für l_1 und l_2 in obigen Ausdruck für k, so wird

$$k = \frac{1}{n} \frac{3 \eta_1 \eta_2 (u_1 + u_2)}{(\sqrt{3 \eta_2 m_1 u_1} + \sqrt{3 \eta_1 m_2 u_2})^2},$$

Ausdruck, den wir zur numerischen Prüfung der Theorie benutzten, indem wir für die von Loschmidt gewählten Kombinationen

Diffusionskoefficienten berechnen. Wir wollen indes diese Prüfung der Theorie m nächsten Paragraphen vornehmen, wenn wir die Wegelängen der Molele berechnet haben.

§ 120.

Absolute Werte der mittleren Wegelängen, Gröfse und Zahl r Moleküle. Die experimentelle Bestimmung der Reibungs- und Diffusionsefficienten setzt uns in den Stand, die absoluten Werte der Wegelängen r Gase zu bestimmen; in der Übereinstimmung der auf beiden Wegen geadenen Werte erhalten wir dann eine wertvolle Bestätigung der dynamien Gastheorie. Für den Reibungskoefficienten eines Gases erhielten wir

$$\eta = \frac{1}{3} m n u l,$$

nit für die Wegelänge

$$l = 3 \cdot \frac{\eta}{m n u}.$$

Wir haben im § 117 die Reibung als Druck in Milligrammen auf den adratmillimeter ausgedrückt, oder was dasselbe ist, als die durch ein adratmillimeter der rascher strömenden Gasmasse zu der langsamer 5menden hinübertretende Bewegungsgröfse, wenn wir die Masse von Iilligramm als Einheit der Masse setzen. Wir erhalten demnach die gelängen aus dem Reibungskoefficienten in Millimetern, wenn wir für die Masse eines Kubikmillimeters des betreffenden Gases in Milligrammen, l u in Millimetern einsetzen.

Für Luft erhalten wir als Mittelwert für η bei 15^0, wenn wir die Benmung von Maxwell ausschliefsen nach der Tabelle des § 117

$$\eta = 0{,}000\,001\,87.$$

Das Gewicht von 1 Kubikmillimeter Luft ist bei $15^0 = 0{,}001\,226^{\text{mgr}}$, nit

$$m n = \frac{0{,}001\,226}{9810} = 0{,}000\,000\,124\,8.$$

Für die Geschwindigkeit u der Luftmoleküle bei 15^0 ergibt sich nach .03 in Millimetern

$$u = 498\,000.$$

Mit diesen Werten wird

$$l = 0{,}000\,090\,2^{\text{mm}},$$

mittlere Wegelänge der Luftmoleküle beträgt somit nicht ganz den ntausendsten Teil eines Millimeters.

Setzen wir die Dichtigkeit eines andern Gases bezogen auf Luft δ, so nen wir für dieses schreiben

$$m_1 n_1 = m n \delta, \quad u_1 = \frac{u}{\sqrt{\delta}}, \quad m_1 n_1 u_1 = m n u \sqrt{\delta},$$

it

$$l_1 = \frac{3\,\eta_1}{m n u \sqrt{\delta}}.$$

Darnach wird für

	η_1	δ	l_1
Wasserstoff	0,000 000 94	0,069 26	0,000 172 4^{mm}
Sauerstoff	0,000 002 07	1,105 63	0,000 095 0
Stickstoff	0,000 001 81	0,971 37	0,000 088 6
Kohlensäure	0,000 001 55	1,529 01	0,000 060 5
Kohlenoxyd	0,000 001 72	0,967 30	0,000 086 7.

Der zweite Weg zur Berechnung der mittlern Wegelänge ist durch d[illegible] Beobachtung der Diffusionskoefficienten zwischen den möglichen Kombin[illegible]tionen dreier Gase, also etwa Wasserstoff-Sauerstoff, Wasserstoff-Kohle[illegible]säure und Sauerstoff-Kohlensäure gegeben. Nennen wir die Geschwindi[illegible]keiten der Moleküle der drei Gase u_1, u_2 u_3, die Wegelängen l_1, l_2, l_3, d[illegible] Diffusionskoefficienten k_{12}, k_{13}, k_{23}, so ist

$$k_{12} = \frac{u_1 + u_2}{\left(\sqrt{\frac{1}{l_1}} + \sqrt{\frac{1}{l_2}}\right)^2}; \quad k_{13} = \frac{u_1 + u_3}{\left(\sqrt{\frac{1}{l_1}} + \sqrt{\frac{1}{l_3}}\right)^2};$$

$$k_{23} = \frac{u_2 + u_3}{\left(\sqrt{\frac{1}{l_2}} + \sqrt{\frac{1}{l_3}}\right)^2},$$

drei Gleichungen, aus denen sich die drei Werte von l berechnen lass[illegible] Aus den von Loschmidt gegebenen Koefficienten für diese drei Gase [illegible]gibt sich dann

Wasserstoff — Sauerstoff	$k_{12} = 0{,}722$	$l_1 = 0{,}000\,225\,1$
Wasserstoff — Kohlensäure	$k_{13} = 0{,}556$	$l_2 = 0{,}000\,079\,8$
Sauerstoff — Kohlensäure	$k_{23} = 0{,}141$	$l_3 = 0{,}000\,055\,7$

Werte, die allerdings nicht ganz mit den aus der Reibung abgeleiteten üb[illegible]einstimmen, die aber unter Beachtung, dafs der von uns abgeleit[illegible] Diffusionskoefficient nur angenähert richtig ist, denselben so nahe komm[illegible] dafs wir in den Resultaten der Rechnung eine schöne Bestätigung [illegible] dynamischen Gastheorie erkennen. Berechnen wir aus unseren aus [illegible] Reibung abgeleiteten Wegelängen die Diffusionskoefficienten, so wird

$$k_{12} = 0{,}721\,3 \qquad k_{13} = 0{,}532\,9 \qquad k_{23} = 0{,}159\,7;$$

es weicht also nur der Diffusionskoefficient Sauerstoff-Kohlensäure erh[illegible]lich von den beobachteten ab.

Andere der von Loschmidt angewandten Kombinationen liefern et[illegible] andere Werte, so liefern die Kombinationen Wasserstoff-Sauerstoff-Kohl[illegible]oxyd

$$k_{12} = 0{,}722 \qquad k_{13} = 0{,}642 \qquad k_{23} = 0{,}180$$

$$l_1 = 0{,}000\,206\,2 \qquad l_2 = 0{,}000\,084\,1 \qquad l_3 = 0{,}000\,068\,1.$$

Für die beiden ersten Wegelängen ergeben sich Werte, die den der Reibung erhaltenen näher kommen, der für Kohlenoxyd erhaltene dagegen erheblich kleiner.

Die Bestimmung der absoluten Werte der mittleren Wegelängen s[illegible] uns weiter in den Stand, einen angenäherten Wert für die Radien [illegible]

irkungssphären zu erhalten, und zwar bieten sich dazu wiederum zwei ege. Der erste benutzt dazu die nach den Entwicklungen von van der aals, § 102, mitgeteilte theoretische Bedeutung der Gröfse b, welche in r das Verhalten der Gase an Stelle des Mariotteschen Gesetzes charakterirenden Gleichung vorkommt. Dieselbe ist das von der Wirkungssphäre r in dem Raum V unter dem Drucke p vorhandenen Moleküle ausgefüllte lumen, somit wenn wir die Volumeinheit Gas unter dem Drucke p voraussen und wie immer die Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Molele mit n bezeichnen,

$$b = n \tfrac{4}{3} \varrho^3 \pi.$$

Für die Wegelängen l, ausgedrückt durch den Radius der Wirkungsäre, fanden wir § 101

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{V - N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi}{N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi} = \frac{1 - n \frac{4}{3} \varrho^3 \pi}{n \frac{4}{3} \varrho^3 \pi} = \frac{1 - b}{b},$$

nit

$$\varrho = l \frac{b}{1 - b}.$$

Im § 102 erhielten wir für Stickstoff als Wert von $b = 0{,}002\,325$, Wert, der, wie wir sahen, auch die Amagatschen Beobachtungen bis zu 8 Meter Quecksilber gut wieder gab. Als Druck p ist hier jener von Meter Quecksilber angenommen; unsere Wegelängen beziehen sich dagegen f 1 Atmosph. = 0,76 Meter Quecksilber. Da die Zahl der Moleküle in r Volumeinheit dem Drucke proportional ist, so enthält dieselbe unter mosphärendruck nur 0,76 derjenigen, welche sie unter dem Drucke von Meter enthält. Der von ihnen ausgefüllte Raum ist daher

$$b = 0{,}76 \cdot 0{,}002\,325 = 0{,}001\,767.$$

Damit wird für Stickstoff

$$\varrho = l \frac{0{,}001\,767}{1 - 0{,}001\,767} = \frac{l}{564}.$$

Die mittlere Wegelänge würde somit bei Stickstoff, wenn derselbe unter n Drucke einer Atmosphäre steht, gleich dem 564 fachen des Radius der rkungssphäre sein. Für ϱ erhalten wir daraus in Millimetern

$$\varrho = \frac{0{,}000\,088\,6}{564} = 0{,}000\,000\,157,$$

o etwa anderthalb Zehmillionstel eines Millimeters.

Mit diesem Werte erhalten wir die Zahl n der in einem Kubikmillitter unter dem Drucke einer Atmosphäre vorhandenen Stickstoffmoleküle s der Gleichung für b

$$n = \frac{b}{\frac{4}{3} \varrho^3 \pi} = \frac{0{,}001\,767}{\frac{4}{3} \varrho^3 \pi},$$

, wenn wir ϱ in Millimetern angeben, b der irkungssphäre der in einem Kubikmillimeter ommene Raum ist. Mit dem oben erhal

$$n = 1090.$$

oder im Kubikmillimeter Stickstoff, wenn derselbe unter dem Drucke Atmosphäre steht, befinden sich 109 000 Billionen Moleküle.

Einen zweiten, zuerst von Loschmidt benutzten Weg bietet u Vergleichung des Volumens der Gase, welche durch Druck flüssig ge werden können, mit dem Volumen der aus ihnen entstandenen Flüssi Wir können zu diesem Zwecke die Kohlensäure benutzen, deren specif Gewicht in flüssiger Form wir § 111 zu 0,947 bei der Temperatu schmelzenden Eises angaben.

Bei derselben Temperatur ist das Gewicht von 1 Kubikmillimete förmiger Kohlensäure unter dem Druck einer Atmosphäre, da das speci Gewicht derselben, bezogen auf Luft, gleich 1,529 ist und 1 Kubikm Luft unter denselben Verhältnissen 0,001 293 Milligramm wiegt,

$$0{,}001\,293 \cdot 1{,}529 = 0{,}001\,977.$$

Das Volumen dieser Kohlensäuremenge in flüssiger Form ist in K millimetern

$$\frac{0{,}001\,977}{0{,}947} = 0{,}002\,08.$$

Im flüssigen Zustande sind die Moleküle einander so nahe, daſs die geringe Kompressibilität zeigt, dieselben überhaupt nur wenig einander genähert werden können. Wir werden daher nur wenig vo Wahrheit abweichen, wenn wir annehmen, daſs die Moleküle einand weit genähert sind, wie sie es im Gaszustande im Augenblicke des S sind. Dann würde also der Abstand der Mittelpunkte der Moleküle g dem Radius der Wirkungssphären sein. Man würde sich etwa die Mol selbst als Kugeln denken können, deren Durchmesser gleich dem R der Wirkungssphäre wäre, und daſs diese Kugeln sich zur Berührung n könnten, denn in dem Falle wäre der Abstand ihrer Mittelpunkte g dem Durchmesser der Moleküle. Die von uns bisher allein in Betrach zogenen Wirkungssphären entsprächen dann dem Achtfachen des von Molekül selbst ausgefüllten Raumes.

Wir erhalten aus dem von der flüssigen Kohlensäure in Anspruc nommenen Raume den von den Wirkungssphären ausgefüllten in fo der Weise. Denken wir um jedes der im flüssigen Zustande sich berü den Moleküle einen Würfel gelegt, dessen Seite gleich dem Durchm des Moleküls ist, so füllen diese Würfel den ganzen von der Flüssi eingenommenen Raum aus. Der von den Molekülen wirklich ausge Raum verhält sich somit zu dem von der Flüssigkeit ausgefüllten, wi Volum der Kugel zu dem des umschriebenen Würfels, er ist somit $\frac{1}{6}$ ganzen Raumes. Da nun die Wirkungssphären den achtfachen Raum Moleküle einnehmen, ist derselbe $\frac{8}{6}\pi$ des von der Flüssigkeit ausgefü somit

$$b = \frac{8}{6}\pi \cdot 0{,}002\,08 = 0{,}008\,69,$$

und dann

$$\varrho = l\,\frac{b}{1-b} = \frac{l}{114} = \frac{0{,}000\,060\,5}{114} = 0{,}000\,000\,53,$$

wo wir als l den aus der Reibung sich ergebenden Wert der mittlern W länge einsetzten.

Der Radius der Wirkungssphäre wäre also etwas mehr als dreimal so rofs als bei Stickstoff. Für die Molekülzahl n ergibt sich dann

$$n = 139{,}4 \cdot 10^{14}.$$

Die Annahme, dafs die Moleküle, dieselben als Kugeln gedacht, sich nmittelbar berühren, ist keinenfalls ganz richtig, und damit wird b und amit ϱ etwas zu grofs und n zu klein. Nach dem Avogadroschen Satze nüfste dieses n dem für Stickstoff gefundenen gleich sein, letzteres ist aber twa das siebenfache. Indes, wenn wir beachten, aus welch verschieden-rtigen Erfahrungen wir die beiden Zahlen abgeleitet haben, und dafs weder ie für den Stickstoff aus den Regnaultschen Beobachtungen abgeleitete röfse b vollkommen genau, noch dafs der für die Kohlensäure berechnete Vert ganz richtig ist, weiter, dafs die Werte der mittleren Wegelängen ie gleiche Unsicherheit enthalten, welche die experimentell bestimmten eibungskoefficienten haben, so müssen wir die Übereinstimmung der Werte on n für eine ganz aufserordentlich nahe halten und darin einen neuen Beweis erblicken, wie vortrefflich die dynamische Gastheorie die verschie-lensten bei den Gasen beobachteten Erscheinungen aus der einfachen Grund-ypothese abzuleiten vermag. Würden wir annehmen, dafs im flüssigen Zu-tande der Abstand der Schwerpunkte der Moleküle nur das 1,5fache des adius der Wirkungssphäre wäre, so würde der für Kohlensäure berechnete Vert von n schon auf mehr als das Zehnfache steigen. Überhaupt läfst ich ja bei diesen Berechnungen nicht mehr erwarten, als dafs wir in den chliefslichen Resultaten nur ein ungefähres Bild der äufserst kleinen Dimen-ionen und der sehr grofsen Zahl der Moleküle erhalten, wir können die r Stickstoff und Kohlensäure berechneten Werte von n als eine obere nd untere Grenze ansehen, zwischen denen die Zahl der Moleküle ein-schlossen ist.

§ 121.

Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen. Trennt man rei Gase durch eine poröse Scheidewand, z. B. durch eine poröse Thon-atte oder durch ein Gypsdiaphragma, dessen Poren so enge sind, dafs in-lge selbst bedeutender Drucke die Gase nur mit geringer Geschwindigkeit ndurchfliefsen, so zeigt sich, dafs auch durch solche Scheidewände hin-rch die Gase sich mit grofser Geschwindigkeit mischen. Sorgt man dafür, fs der Druck auf beiden Seiten der Scheidewand während der ganzen uer des Versuches genau gleich ist, so sieht man, dafs die in entgegen-setzter Richtung durch die Scheidewand hindurchtretenden Gasvolumina ineswegs gleich sind, dafs also die chemisch verschiedenen Gase die Scheide-and mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchdringen.

Die ersten genauern Versuche über die Diffusion der Gase durch trockene röse Scheidewände rühren von Graham[1]) her. Derselbe liefs verschiedene ase, die er in Röhren, welche mit einem trockenen Gypspfropf verschlossen aren, über Quecksilber absperrte, in atmosphärische Luft diffundieren, und nd, dafs das gegen Luft unter konstantem Drucke ausgetauschte Gas-lumen nahezu der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Gase umgekehrt

---

[1]) *Graham, Poggend. Annalen* Bd. XVII und XXVIII.

proportional war. So verhält sich z. B. die Dichtigkeit der Luft zu der des Wasserstoffes wie

$$1{,}000 : 0{,}069\,26,$$

oder wie

$$14{,}43 : 1;$$

für 1 Volumen Luft, welches in die Diffusionsröhre durch den Gypspfropf eingetreten war, traten nun 3,1 Volumina Wasserstoff aus; die Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten der Luft und des Wasserstoffes verhalten sich aber wie 3,8 : 1; man sieht, dafs die ausgetauschten Gasmengen nahezu im umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten stehen.

Da die sich austauschenden Gasmengen diejenigen sind, welche in gleichen Zeiten durch die Scheidewand hindurchtreten, so messen sie zugleich die Geschwindigkeiten, mit denen die verschiedenen Gase durch die Scheidewand hindurchfliefsen.

Vorhin sahen wir, dafs die Ausflufsgeschwindigkeiten verschiedener Gase aus Öffnungen in dünner Wand unter gleichem Drucke den Quadratwurzeln aus ihren Dichtigkeiten umgekehrt proportional sind. Die Diffusionsgeschwindigkeiten verhalten sich also nahezu wie die Ausflufsgeschwindigkeiten aus dünner Wand.

Graham nahm nun an, dafs die Diffusionsgeschwindigkeiten mit den Ausflufsgeschwindigkeiten genau übereinstimmen, und gründete darauf eine Erklärung der Diffusionserscheinungen. Nach dieser verbreitet sich ein Gas in ein anderes gerade so wie in den leeren Raum und die Bewegung erfolgt mit derselben Geschwindigkeit. Die Poren der Thonplatte sieht man dann an als Öffnungen in dünner Wand und dann folgt unmittelbar, dafs die ausgetauschten Gasmengen sich verhalten müssen wie die reciproken Werte aus den Quadratwurzeln der Dichtigkeiten.

Bunsen[1]) machte jedoch später darauf aufmerksam, dafs die Erklärung nicht zulässig sei, da nur bei Anwendung von Öffnungen in dünner Wand die Ausflufsgeschwindigkeiten in dem erwähnten Verhältnisse stehen, nicht aber bei der Anwendung enger und besonders kapillarer Röhren. Wenn nun auch bei der Anwendung poröser Diaphragmen die Gesetze des Ausströmens nicht einfach diejenigen der Transpiration durch lange kapillare Röhren sein werden, so ist es doch wahrscheinlich, dafs die Gase durch solche Diaphragmen nicht wie aus Öffnungen in dünner Wand fliefsen.

Letzteres hat Bunsen dann zunächst nachgewiesen; eine mit einer Teilung versehene und kalibrierte Glasröhre wurde oben mit einem Gypspfropf, der bei 60° getrocknet war, geschlossen, mit Quecksilber gefüllt, und dann mit dem Gypspfropf nach oben in ein tiefes Quecksilbergefäfs gesenkt. Dann wurde das obere durch den Gypspfropf geschlossene Ende der Röhre mit einem Raume in Verbindung gesetzt, der mit den verschiedenen Gasen unter dem während des ganzen Versuches konstant erhaltenen Drucke einer Atmosphäre gefüllt werden konnte. Wurde das Rohr allmählich aus dem Quecksilber herausgezogen, so strömte durch das Diaphragma das ...n die Röhre. War dann der Druck in der Röhre nur wenig mehr von ...rucke einer Atmosphäre verschieden, so hielt man durch langsames

[1]) *Bunsen*, Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857.

Heben der Röhre den Druck des Gases eine Zeit lang auch im Innern der Röhre konstant, und beobachtete die Zeit, welche erforderlich war, daſs eine bestimmte Menge Gas durch das Diaphragma in die Röhre einströmte.

Dabei ergab sich, daſs die Einströmungsgeschwindigkeit, das ist die immer unter demselben Drucke von 1^m in der Zeit $1''$ einströmende Gasmenge der Differenz der an beiden Seiten des porösen Diaphragmas vorhandenen Drucke bei den einzelnen Gasen proportional war, und daſs die Einströmungsgeschwindigkeit verschiedener Gase keineswegs in dem reciproken Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichten steht. So erhielt Bunsen unter andern folgende Werte:

Sauerstoff			
Einströmungsgeschwindigkeit V_1	0,091 87	0,197 7	0,305 8
Druckdifferenz p in M. Quecksilber	0,016 7	0,033 5	0,052 0
$\frac{V_1}{p}$	5,893	5,901	5,881.
Wasserstoff			
Einströmungsgeschwindigkeit V_1	0,266 5	0,536 9	0,843 1
Druckdifferenz p in M. Quecksilber	0,016 7	0,033 8	0,052 0
$\frac{V_1}{p}$	15,96	15,89	16,21.

Während also die Druckdifferenzen von $16{,}7^{mm}$ bis 52^{mm} Quecksilber wachsen, zeigen sich die Einströmungsgeschwindigkeiten den Drucken scharf proportional.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten für Wasserstoff und Sauerstoff ist im Mittel 1 : 2,71, während das Verhältnis der reciproken Quadratwurzeln der Dichten 1 : 3,995 ist.

Das Verhalten der durch Diaphragmen strömenden Gase kommt also mit dem durch kapillare Röhren strömenden Gase überein, und das Verhältnis der von Bunsen beobachteten Einströmungsgeschwindigkeiten weicht auch nicht sehr von dem Verhältnis der reciproken Werte der Reibungskoefficienten ab, wie sie sich im § 117 aus Meyers Beobachtungen der Transpirationszeiten, 1 : 2, ergaben.

Wollte man nun im übrigen die Grahamsche Theorie beibehalten, also die Diffusion der Gase einfach als eine Strömung durch kapillare Röhren ansehen, weil ein Gas ein anderes nicht in einem bestimmten Raume absperren kann, so müſsten sich die Diffusionsgeschwindigkeiten nahe wie die Ausströmungsgeschwindigkeiten durch kapillare Röhren verhalten, das ist aber nach den vorhin angegebenen Zahlen Grahams, welche Bunsen bestätigt fand, nicht der Fall. Bunsen fand das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigkeiten Luft zu Wasserstoff wie 1 : 3,34, Sauerstoff zu Wasserstoff wie 1 : 3,345, Zahlen, welche dem Verhältnis der reciproken Werte der Quadratwurzeln aus den Dichten näher kommen als dem Verhältnis der vorher bestimmten Einströmungsgeschwindigkeiten.

Auſserdem nimmt Bunsen an, daſs die Verhältnisse der Diffusionsgeschwindigkeiten von der Natur des Diaphragmas abhängig sind, wodurch eine weitere Abweichung von den einfachen Strömungserscheinungen der Gase bedingt wäre.

Eine ausführlichere Theorie dieser Diffusionserscheinungen ist später von Stefan[1]) gegeben worden, in welcher er einen wohl zuerst von Maxwell[2]) ausgesprochenen Gedanken ausführt, nach welchem man diese Diffusion als einen Specialfall der in den Paragraphen 118 und 119 betrachteten Diffusion ansehen kann. Stefan untersucht zunächst die Diffusion der Gase, denen ein drittes Gas gleichförmig beigemischt ist, also etwa die Diffusion von Wasserstoff und Sauerstoff, denen beiden Kohlensäure beigemischt ist. Man kann dann die Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen als eine solche ansehen, wobei indes die Moleküle des dritten Gases nicht beweglich, sondern fest sind. Ein weiteres Eingehen in die Theorie würde uns zu weit führen, wir verweisen auf die Abhandlung von Stefan.

§ 122.

Stofs und Widerstand der Luft. Wenn die bewegte Luft gegen einen festen Körper stöfst, so verliert sie wie jeder bewegte Körper, wenn er auf einen ruhenden trifft, an Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit wird auf den getroffenen Körper übertragen, und ist der Anstofs hinreichend grofs, so kann letzterer durch den Stofs der Luft in Bewegung versetzt werden. So ist es der Stofs der Luft, welcher die Segelschiffe treibt, oder die Flügel der Windmühlen dreht. Die Kraft, welche die bewegte Luft ausübt, läfst sich nach den frühern Gesetzen bestimmen, sie ist proportional dem Produkte aus der Masse der bewegten Luft in das Quadrat der Geschwindigkeit der Bewegung. Je rascher die Bewegung der Luft ist, um so kräftiger sind daher auch die Wirkungen, welche ihr Stofs hervorbringt; die zerstörenden Wirkungen der Orkane sind bekannt.

Ebenso wie die bewegte Luft einen Teil ihrer Geschwindigkeit verliert, wenn sie gegen andere Körper stöfst, so mufs auch die Geschwindigkeit eines in ruhender Luft bewegten Körpers abnehmen, da er gegen die ruhenden Luftmassen stöfst und diese aus der Stelle drängen mufs. Dafs die Gröfse dieses Widerstandes von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers abhängig sein mufs, das erkennt man leicht, da je gröfser die Geschwindigkeit ist, um so mehr ruhende Luft von dem Körper getroffen wird. Newton nahm an, dafs der Luftwiderstand dem Quadrate des bewegten Körpers proportional sei. Man kann diese Annahme in folgender Weise plausibel machen.

Ist die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t und während der unendlich kleinen Zeit dt gleich v, und verdrängt er während dieser Zeit die Luftmasse m, so überwindet er den Luftwiderstand dadurch, dafs er dieser Luftmenge die Geschwindigkeit v erteilt. Die dazu erforderliche Kraft ist aber nach § 11 Gleichung I gleich $\frac{mv}{dt}$, oder auch, wenn wir den in der Zeit dt zurückgelegten Weg mit ds bezeichnen, da dann $v = \frac{ds}{dt}$, gleich $\frac{m \cdot ds}{dt^2}$. Die Masse m ist nun aber dem in der Zeit dt zurückgelegten Wege proportional, so dafs wir dieselbe setzen können $m = \mu \,.\, ds$. Setzen wir diesen Wert in obigen Ausdruck ein, so erhalten wir für die zur Überwindung des Widerstandes erforderliche Kraft $\mu \cdot \frac{ds^2}{dt^2}$ oder $\mu\, v^2$. Infolge des Luft-

---

[1]) *Stefan*, Wiener Berichte Bd. LXIII.
[2]) *Maxwell*, Phil. mag. 4 ser. vol XX.

lieben der Röhre den Druck des Gases eine Zeit lang auch im Innern er Röhre konstant, und beobachtete die Zeit, welche erforderlich war, afs eine bestimmte Menge Gas durch das Diaphragma in die Röhre einrömte.

Dabei ergab sich, dafs die Einströmungsgeschwindigkeit, das ist die mmer unter demselben Drucke von 1^m in der Zeit $1''$ einströmende Gasnenge der Differenz der an beiden Seiten des porösen Diaphragmas vorandenen Drucke bei den einzelnen Gasen proportional war, und dafs die Einströmungsgeschwindigkeit verschiedener Gase keineswegs in dem reciroken Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichten steht. So erielt Bunsen unter andern folgende Werte:

Sauerstoff

Einströmungsgeschwindigkeit V_1	0,091 87	0,197 7	0,305 8
Druckdifferenz p in M. Quecksilber	0,016 7	0,033 5	0,052 0
$\frac{V_1}{p}$	5,893	5,901	5,881.

Wasserstoff

Einströmungsgeschwindigkeit V_1	0,266 5	0,536 9	0,843 1
Druckdifferenz p in M. Quecksilber	0,016 7	0,033 8	0,052 0
$\frac{V_1}{p}$	15,96	15,89	16,21.

Während also die Druckdifferenzen von $16,7^{mm}$ bis 52^{mm} Quecksilber achsen, zeigen sich die Einströmungsgeschwindigkeiten den Drucken scharf roportional.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten für Wasserstoff und Sauerstoff t im Mittel 1 : 2,71, während das Verhältnis der reciproken Quadratwurzeln er Dichten 1 : 3,995 ist.

Das Verhalten der durch Diaphragmen strömenden Gase kommt also it dem durch kapillare Röhren strömenden Gase überein, und das Verältnis der von Bunsen beobachteten Einströmungsgeschwindigkeiten weicht uch nicht sehr von dem Verhältnis der reciproken Werte der Reibungsoefficienten ab, wie sie sich im § 117 aus Meyers Beobachtungen der ranspirationszeiten, 1 : 2, ergaben.

Wollte man nun im übrigen die Grahamsche Theorie beibehalten, also ie Diffusion der Gase einfach als eine Strömung durch kapillare Röhren nsehen, weil ein Gas ein anderes nicht in einem bestimmten Raume abperren kann, so müfsten sich die Diffusionsgeschwindigkeiten nahe wie die Ausströmungsgeschwindigkeiten durch kapillare Röhren verhalten, das ist ber nach den vorhin angegebenen Zahlen Grahams, welche Bunsen bestätigt and, nicht der Fall. Bunsen fand das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigeiten Luft zu Wasserstoff wie 1 : 3,34, Sauerstoff zu Wasserstoff wie 1 : 3,345, ahlen, welche dem Verhältnis der reciproken Werte der Quadratwurzeln us den Dichten näher kommen als dem Verhältnis der vorher bestimmten Einströmungsgeschwindigkeiten.

Aufserdem nimmt Bunsen an, dafs die Verhältnisse der Diffusionsschwindigkeiten von der Natur des Diaphragmas abhängig sind, wodurch ne weitere Abweichung von den einfachen Strömungserscheinungen der ase bedingt wäre.

folgt dann unmittelbar, dafs bei dem freien Fall in der Luft leichte Körper langsamer fallen müssen als schwere, so dafs wir in dem Widerstande der Luft neben dem früher erwähnten Gewichtsverlust der Körper in der Luft den Grund der beobachteten Abweichung vom Fallgesetz erkennen.

Anhang zu Abschnitt I und II.

Über absolute Mafssysteme.

Wir haben in der Einleitung die Mafse angegeben, nach welchen wi die bei den physikalischen Erscheinungen auszuwertenden Gröfsen messen. Es waren das Meter, entsprechend dem in Paris deponierten Etalon al Längeneinheit, die Sekunde als Zeiteinheit und das Gewicht eines Kubik centimeters Wasser bei der Temperatur 4^0 C., das Gramm, als Gewicht einheit; anstatt des letztern auch das Tausendfache desselben, das Kil gramm.

Die Gewichtseinheit benutzten wir im ersten Abschnitt sofort, Kräfte, Bewegungsantriebe zu messen; wir gingen dabei von der Erfahru aus, dafs wir jedem Bewegungsantriebe durch den Zug, den ein schwe Körper oder eine gewisse Anzahl von Kubikcentimeter oder Kubikdecime Wasser gegen die Erde hin erfahren, das Gleichgewicht halten können, mafsen die Kraft durch den entgegengesetzt gleichen Zug, also nach Gramm oder Kilogrammen. Dadurch, dafs wir die Kraft nach Gewichten mafs gaben wir eigentlich erst die genaue Definition dessen, was wir unter Ge wicht verstanden, nämlich den Antrieb, den ein schwerer Körper in verti kaler Richtung gegen die Erde erfährt, der sich als Druck gegen die Unter lage zu erkennen gibt, wenn der Körper unterstützt ist, und der den Körp mit gleichmäfsig beschleunigter Bewegung in vertikaler Richtung gegen di Erde treibt, wenn ihm die Unterstützung entzogen wird.

Damit hatten wir für alle bisher zu messenden physikalischen Gröfs ein allerdings willkürliches aber festbestimmtes System von Grundmafs festgestellt, aus welchem alle übrigen Mafse, wie das der Geschwindigkei Beschleunigung u. s. f. abgeleitet wurden.

Wir hatten zunächst dieses Grundmafs der Kraft gewissermafsen al ein Hülfsmafs aufgestellt, aber auch als wir die Gesetze der gleichmäfs beschleunigten Bewegung untersucht hatten und im § 11 zeigten, dafs w die Kraft durch ihre Wirkung, durch die Beschleunigung, die sie ei Masse erteilt, messen können, behielten wir dieses Mafs bei. Wir erhielt für die Kraft die Gleichung

$$p = mG,$$

wenn G die der Masse m durch die Kraft p erteilte Beschleunigung i Für die Masse hatten wir vorher erkannt, dafs sie dem Gewichte ei Körpers, also dem Zuge, den derselbe gegen die Erde hin erfährt, und d wir messen, indem wir an der Wage denselben mit dem Zuge einer g wissen Anzahl Kubikdecimeter Wasser resp. mit dem von Gewichtsstück die den gleichen Zug ausüben, vergleichen, proportional ist. Das Mafs d

Masse bildeten wir aber aus unserem Kraftmaſs, indem wir jene Masse als Masseneinheit festsetzten, welche durch die Einheit des Bewegungsantriebes, 1 Kilogramm in der Sekunde die Beschleunigung von 1 Meter erhielt. Das Maſs der Masse war also ein aus unseren drei Grundmaſsen abgeleitetes Maſs.

Im dritten Kapitel des ersten Abschnittes fanden wir, daſs die Beschleunigung, welche das Kubikdecimeter Wasser oder ein demselben an Gewicht gleicher Körper an verschiedenen Stellen der Erde bei freiem Fall erfährt, eine verschiedene ist. Wir muſsten daraus schlieſsen, daſs der Antrieb, welchen ein und derselbe Körper gegen die Erde hin erfährt, an den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche und in verschiedenen Höhen über dem Meeresniveau ein verschiedener ist, daſs also das Gewicht eines und desselben Körpers eine Funktion der geographischen Breite und der Höhe über dem Meeresniveau ist.

Hieraus folgt, daſs unser bisher angenommenes System von Grundmaſsen uns strenge genommen nur die unter derselben geographischen Breite und in derselben Höhe über dem Meeresniveau angestellten Messungen vergleichbar macht, das heiſst, daſs die Zahlenwerte für irgend eine gemessene Gröſse, in welche die Kraft eingeht, nur an den so gelegenen Orten dieselben bleiben. Messen wir dieselbe Gröſse an einem anders gelegenen Orte, so wird der für dieselbe gefundene Zahlenwert ein anderer, da dort der Zug, den wir ein Kilogramm nennen, also unsere Einheit der Kraft eine andere ist. Unser Maſssystem ist demnach nur ein relatives, das heiſst das Verhältnis der Zahlenwerte der in demselben ausgedrückten Gröſsen ist an allen Orten dasselbe, die Zahlenwerte selbst ändern sich von Ort zu Ort. Haben wir an irgend einem Orte irgend eine Gröſse gemessen gleich z Kilogrammen gefunden

$$E = zK;$$

an einem andern Orte, wo der Wert des Kilogrammes nicht K, sondern K_1 ist, müssen wir bei Messung derselben Gröſse

$$E = z_1 K_1,$$

also einen andern Zahlenwert z_1 finden. Sind g_a und g_b die Beschleunigungen bei freiem Fall an beiden Orten, so ist

$$K : K_1 = g_a : g_b$$

$$K_1 = K \frac{g_b}{g_a},$$

somit ist

$$E = z_1 \left(\frac{g_b}{g_a}\right) K,$$

oder es muſs

$$z_1 \left(\frac{g_b}{g_a}\right) = z; \quad z_1 = z\left(\frac{g_a}{g_b}\right).$$

Ein Zug also oder ein Antrieb, den wir an einem Orte, wo die Beschleunigung g_a ist, gleich z Kilogrammen finden, würde an einem Orte, dessen Beschleunigung gleich g_b ist, als z_1 Kilogramme bezeichnet, wo $z_1 = z \frac{g_a}{g_b}$ ist. Um also *eine an dem Orte a* ausgeführte Messung auf den

Ort b zu übertragen, müssen wir den Zahlenwert für jede der Kraf
portionale Gröfse mit dem Quotienten aus den Beschleunigungen a
Orte a und an dem Orte b multiplicieren.

Eine solche Korrektion würde z. B. an allen Elasticitätskoeffic
anzubringen sein, die wir nach Kilogrammen messen. Ein unte
45^0 n. Br. etwa gleich 10 000 gefundener Elasticitätskoefficient
unter dem Äquator in dem Mafse gröfser gefunden werden, als d
schleunigung dort kleiner ist als unter 45^0 n. Br., er würde

$$10000 \frac{9{,}805\,52}{9{,}780\,09} = 10026.$$

Auch dann, wenn wir die Kraft durch die Beschleunigung mess
sie einer Masse m erteilt, müssen wir sie durch denselben Quotient
einem Orte zu einem anders gelegenen übertragen, da wir auch dann i
der Definition der Masseneinheit die Kraft in Kilogrammen des betref
Ortes messen. Wir nennen eben jene Masse eins, welche durch den A
eins die Beschleunigung eins bekommt, setzen also die Masse eines l
decimeters Wasser oder eines Körpers, der mit demselben das gleic
wicht hat, stets $\frac{1}{g}$. In dem Mafse somit, in welchem die Kraft
gröfser wird, setzen wir die Einheit der Masse in unsern Gleic
ebenfalls gröfser, oder die Masse eines gegebenen Körpers entspricht
in dem Verhältnis kleinern Zahl von Masseneinheiten. Da nun st
Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist, so wird die Anzahl
einheiten, die einem gegebenen Körper eine bestimmte Beschleu
geben, in dem Verhältnisse kleiner, als die Zahl Masseneinheiten
wird, die wir dem Körper beilegen.

Ein Beispiel wird das noch klarer machen. Eine gespannte
gibt bei dem Losschnellen einem gegebenen Körper überall diesel
schwindigkeit c; sei das an der Wage bestimmte Gewicht des Kör
Kilogrammen gleich q. Diese Zahl q finden wir für denselben Kör
allen Orten gleich, denn sie bedeutet immer die Zahl Kubikde
Wasser, welche an demselben Orte den gleichen Zug gegen die E
fahren wie der abgewogene Körper; in demselben Mafse, in welchem d
des gegebenen Körpers sich ändert, ändert sich auch der Zug des
decimeters Wasser, es ist also überall der Zug der gleichen Zahl
decimeter Wasser erforderlich, um den gegebenen Körper an der W
äquilibrieren. Die lebendige Kraft des geworfenen Körpers setzen wi

$$\tfrac{1}{2} \frac{q}{g} c^2.$$

Definieren wir die Federkraft als den konstanten Druck p, w
denselben Weg s hindurch auf den Körper gewirkt haben müfste,
welchen der Druck der Feder gewirkt hat, um demselben die Geschw
keit c zu erteilen, so erhalten wir die Federkraft aus der Gleichung

$$ps = \tfrac{1}{2} \frac{q}{g} c^2$$

in Kilogrammen gegeben, wenn das Kilogramm des betreffenden Ort
Einheit ist. An einem andern Orte, wo die Beschleunigung bei f

alle g_1 ist, wird der Zahlenwert p_1 für die Gröfse der Federkraft aus der Gleichung erhalten

$$p_1 s = \frac{1}{2} \frac{q}{g_1} c^2.$$

Es ist somit gerade wie vorhin

$$p_1 = p \frac{g}{g_1}.$$

Wenn es hiernach auch keine grofse Schwierigkeit hat, die an einem Orte ausgeführten Messungen durch die an andern Orten in diesem relativen Mafssystem gültigen Einheiten auszudrücken, so ist es doch durchaus wünschenswert, die physikalischen Gröfsen in solchen Einheiten anzugeben, dafs der für diese Gröfsen erhaltene Zahlenwert überall derselbe bleibt, also ein System von absoluten Einheiten aufzustellen.

Das sich zunächst darbietende Mittel würde sein, nicht den Zug, den ein Kubikdecimeter Wasser gegen die Erde hin an den verschiedenen Orten erfährt, als Einheit zu wählen, sondern den Zug, den es an einem bestimmten Orte, etwa unter dem 45. Breitegrad am Meeresniveau erfährt, als solche festzusetzen. Gegen diese Bestimmung der Krafteinheit würde theoretisch wenig einzuwenden sein, wenn man gleichzeitig für dieselbe den Namen Kilogramm fallen liefse. Das wäre nötig, da für uns das Kilogramm nicht nur Kraftmafs ist, sondern auch Quantitätsmafs. Wir messen die Menge einer gegebenen Substanz durch ihr Gewicht; für diese Quantitätsbestimmungen sind die relativen Gewichte gleichzeitig die absoluten. Finden wir, dafs ein Quantum irgend einer Substanz unter dem 45° n. Br. n Kilo wiegt, so finden wir für dieses Quantum an allen Orten dasselbe Gewicht von n Kilo, wie schon vorhin bemerkt wurde. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob wir den zur Wägung benutzten Gewichtssatz unter dem 45. Breitegrad oder an einem andern Orte hergestellt haben, denn das Gewichtsstück, welches an der Wage auf dem 45. Breitegrade einem Kubikdecimeter Wasser das Gleichgewicht hält, thut es überall. Als Quantitätsmafs ist also das Kilo immer dasselbe; damit ist auch das Mafs der Masse überall durch g_0 Kilo gegeben, wenn g_0 die Beschleunigung bei dem freien Fall auf dem 45. Breitengrade ist. Ist die Beschleunigung, welche ein Körper, dessen Gewicht gleich q Kilo ist, bei dem freien Falle an einem andern Orte erfährt, gleich g, so ist die ihn gegen die Erde treibende Kraft

$$p = \frac{q}{g_0} g,$$

man sieht, würden wir auch die Kraft als p Kilo bezeichnen, so würde dieselbe Bezeichnung zweien verschiedenen Gröfsen beigelegt.

Gegen diese Definition der Krafteinheit lassen sich indes doch einige Einwendungen machen; zunächst, dafs wir zu derselben eine Konstante g_0 verwenden müssen, die wir an Ort und Stelle nicht bestimmen können, dann aber weiter, dafs bei wirklichen Kraftmessungen die Kraft in der That als abgeleitetes Mafs erhalten wird. Wir können nämlich in dieser Einheit die Kraft nur aus der Beschleunigung einer bekannten Masse ableiten; denn wenn wir auch einer Kraft durch den Zug von Gewichten das Gleichgewicht halten, somit dieselbe durch diese messen können, so ist doch

der Wert dieser Gewichte in dem festgestellten Kraftmaſse erst durch die Beschleunigung derselben bei dem freien Falle etwa zu erhalten, indem wir, wenn die Gewichte an der Wage zu q Kilo gefunden werden, den Quotienten $\frac{q}{g_0}$ mit g multiplicieren. Wir bestimmen also bei der Ausführung der Messung erst die Masse des Bewegten und leiten aus dieser erst die Kraft ab.

Deshalb hat Gauss den schon im § 6 angegebenen Weg eingeschlagen, daſs er nicht die Einheit der Kraft als Grundmaſs festsetzt, sondern diejenige der Masse. Das Maſs der Masse eines Körpers ist das als Quantitätsmaſs benutzte Gewicht, er setzt jene Masse gleich eins, welche das Gewicht eins hat. Damit hört das Gewicht auf Kraftmaſs zu sein, es wird Maſs der Masse eines Körpers, und in dem Sinne ist das Gewicht eines und desselben Körpers überall das gleiche, denn er wird überall von derselben Anzahl Kubikdecimeter Wasser an der Wage äquilibriert. Deshalb ist auch das Maſs der Masse so definiert überall dasselbe, somit neben dem Maſs der Länge und der Zeit ein absolutes Maſs. Das Maſs der Kraft wird dadurch ein abgeleitetes, es ist jene Kraft, welche der Gewichtseinheit in der Zeiteinheit die Beschleunigung eins erteilt. Die Kraft ist gemessen durch unsere Gleichung

$$p = mG = qG,$$

wenn q die Anzahl Gewichtseinheiten ist, welche die Masse wiegt, und G die Beschleunigung, welche die Kraft p ihr erteilt. Da die Beschleunigung, welche ein Körper vom Gewichte q bei freiem Fall erhält, gleich g ist, so ist die Kraft, welche den Körper gegen die Erde treibt,

$$p = q \cdot g$$

Krafteinheiten. Nehmen wir als Einheit der Masse das Kilogramm, so wird das Kilogramm mit g Krafteinheiten gegen die Erde getrieben.

Gauss wählte als Einheit der Masse das Milligramm, als Einheit der Länge das Millimeter, als Zeiteinheit die Sekunde; die Krafteinheit ist also die, welche der Masse 1^{mgr} in der Sekunde die Beschleunigung 1^{mm} erteilt.

Bei Zugrundelegung dieser Einheiten erhält man vielfach unbequem groſse Zahlen; deshalb hat die British Association for the advancement of science vorgeschlagen Gramm, Centimeter und Sekunde als Einheiten zu wählen. Aber auch dann werden die Zahlen vielfach unbequem, man wird deshalb in der Praxis nicht umhin können, zuweilen noch gröſsere Einheiten zu wählen.

Dimensionen der abgeleiteten Maſse.

Um die mit zu Grundelegung eines bestimmten Systems von Einheiten gegebenen Zahlenwerte auf andere Einheiten umzurechnen, also auch die bisher in dem relativen oder wie man es auch nennt irdischen Maſssystem ausgedrückten Zahlenwerte in absolutem System wiederzugeben, ist es von wesentlichem Vorteil, genau zu übersehen, in welcher Weise die verschiedenen abgeleiteten Maſse aus den Grundmaſsen hervorgehen. Wir können jedes abgeleitete Maſs als das Produkt irgend einer Potenz der Masse, der Länge und der Zeit bezeichnen. Den so dargestellten Zusam-

ng irgend einer gemessenen Gröfse mit den drei Grundmafsen nennt man ch dem Vorgange Maxwells[1]) die Dimensionen des abgeleiteten Mafses.

Die Möglichkeit dieser Darstellung und die Bedeutung derselben tritt n besten hervor, wenn wir sofort dazu übergehen, die wichtigsten der von s bisher gemessenen Gröfsen in dieser Weise auszudrücken.

Das erste abgeleitete Mafs war das der Geschwindigkeit; wir erhielten ie Definition derselben bei der gleichförmigen Bewegung als den Quotienten s einer Anzahl Längeneinheiten und der Anzahl Zeiteinheiten, in welcher eser Weg zurückgelegt wird. Ist also L die Einheit der Länge, T die nheit der Zeit, so ist, wenn z_1 und z_2 Zahlen sind,

$$c = \frac{z_1 L}{z_2 T} = z\,(LT^{-1}).$$

Die Geschwindigkeit wird somit durch eine Zahl gegeben, die als otient einer Anzahl Längeneinheiten und einer Anzahl Zeiteinheiten, oder Produkt einer ersten Potenz der Länge und der minus ersten Potenz r Zeit erscheint, die Dimension der Geschwindigkeit ist LT^{-1}. Das tte Grundmafs, die Masse kommt hier nicht, oder was dasselbe ist, mit m Exponenten Null vor. Die Geschwindigkeit ist also erst bestimmt, nn wir die Einheit der Länge und der Zeit bestimmen, also etwa

$$c = z\,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}\,.$$

Nehmen wir statt Meter und Sekunde andere Einheiten, so wird diebe Geschwindigkeit durch eine andere Zahl ausgedrückt, welche Zahl s sein mufs, ergibt sich aus den Dimensionen sofort. Seien l und t die en Einheiten, so dafs

$$L = kl \quad T = kt,$$

ist

$$c = z'\,(lt^{-1})$$

es mufs

$$z'(lt^{-1}) = z(kl\cdot(k_1 t)^{-1})$$

, somit

$$z' = z\,\frac{k}{k_1}\,.$$

Würden wir statt Meter Kilometer, statt Sekunden Minuten wählen, äre $k = 0{,}001$, $k_1 = \frac{1}{60}$, somit

$$z' = z\,\frac{60}{1000}\,.$$

Gehen wir zu einer neuen Einheit über, so dafs die alte Einheit dem hen der neuen Einheit gleich ist, so haben wir demnach den in den n Einheiten gegebenen Zahlenwert einer gemessenen Gröfse nur mit lben Potenz von k zu multiplicieren, in welcher die Einheit in die ension der gemessenen Gröfse eingeht, um den Zahlenwert der geenen Gröfse in der neuen Einheit ausgedrückt zu erhalten.

---

[1]) *Maxwell*, Report of the British Association for 1863 p. 130. Man sehe auch *Physikalische Begriffe* und absolute Mafse. Leipzig, B. G. Teubner, 1880.

Die Beschleunigung ist die Geschwindigkeitszunahme in der Zeiteinheit; wir erhalten sie bei der gleichmäfsig beschleunigten Bewegung, indem wir die nach der Zeit t erlangte Geschwindigkeit durch die Zeit t dividieren. Da die Geschwindigkeit der Quotient aus einer Länge und der Zeit ist, so ist die Beschleunigung der Quotient aus einer Länge und dem Quadrate einer Zeit, ihre Dimension ist somit

$$\text{Beschleunigung} = z(LT^{-2}),$$

wenn z die Zahl bedeutet, die wir für die Beschleunigung angeben.

Die Kraft, welche einer Masse m die Beschleunigung G erteilt, ist gleich dem Produkt von Masse und Beschleunigung, sie ist also das Produkt einer Masse, einer Länge und der minus zweiten Potenz einer Zeit. Ist also M die Masseneinheit, so ist eine Kraft dargestellt durch

$$\text{Kraft} = z(MLT^{-2}),$$

wo wieder z die Zahl bedeutet, welche die Anzahl Krafteinheiten angibt.

Die dem absoluten System zu Grunde liegende Einheit der Masse ist die Gewichtseinheit; wir sagen ausdrücklich die Gewichtseinheit, nicht die Masse der Gewichtseinheit, da im absoluten System das Gewicht Massenmafs ist, nicht mehr Kraftmafs. Bisher haben wir als Masseneinheit den Quotienten aus dem Gewicht eines Körpers und der Zahl g genommen; nennen wir die bisher gebrauchte Masseneinheit M_1, so ist

$$M = \frac{1}{g} M_1.$$

Wenn auch in dem bisher benutzten System das Mafs der Masse ein abgeleitetes Mafs war, so können wir doch zur Umrechnung der in denselben gegebenen Mafse in das neue System gerade so verfahren, wie wenn das früher angewandte Mafs der Masse ein Grundmafs wäre, dem nur eine andere Einheit zu Grunde liegt. Dann ergibt sich, wenn die Zahl der Krafteinheiten in dem bisher angewandten System z_1 ist, die Zahl z im absoluten System nach der Gleichung

$$z(MLT^{-2}) = z\left(\frac{M_1}{g} LT^{-2}\right) = \frac{z}{g}(M_1 LT^{-2})$$

$$\frac{z}{g} = z_1, \quad z = g z_1.$$

Um die in unserm bisherigen System gegebenen Kräfte in das absolute System zu übertragen, haben wir die früher gegebenen Zahlen bei Anwendung derselben Gewichtseinheiten nur mit g zu multiplicieren, wobei das g in jenen Längeneinheiten angegeben sein mufs, welche dem Mafs der Beschleunigung zu Grunde liegen, also in den Einheiten L.

Im § 11 fanden wir die Beziehung, dafs die Bewegungsgröfse gleich dem Antriebe der Kraft ist. Die Gleichheit dieser Gröfsen verlangt die Gleichheit ihrer Dimensionen, in der That sind dieselben gleich. Der Antrieb der Kraft ist Produkt einer Kraft und einer Zeit, somit

$$pt = z(MLT^{-1})$$

die Bewegungsgröfse der bewegten Masse m ist das Produkt aus der Masse und der nach der Zeit t erreichten Geschwindigkeit v, es ist

$$mv = z(MLT^{-1}).$$

Die einer Masse m erteilte lebendige Kraft $\frac{1}{2}mv^2$ ist gleich der Arbeit der Kraft

$$\frac{1}{2}mv^2 = z(ML^2T^{-2})$$

$$ps = z(MLT^{-2}L) = z(ML^2T^{-2}).$$

Man sieht, die Dimensionen dieser beiden Gröfsen sind die gleichen.

Die Winkelgeschwindigkeit bei der drehenden Bewegung können wir definieren als die Geschwindigkeit eines Punktes, der sich in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe befindet; die Geschwindigkeit in Bogenmafs ausgedrückt, den Kreisumfang gleich 2π gesetzt, gibt uns dann auch die Geschwindigkeit des Punktes in der Abstandseinheit in gewöhnlichem Mafse. Die Geschwindigkeit eines im Abstande l von der Axe befindlichen Körpers ist dann das Produkt der Winkelgeschwindigkeit und der Länge l. Da das Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Länge uns eine Geschwindigkeit gibt, ist die Dimension der Winkelgeschwindigkeit somit die einer Geschwindigkeit LT^{-1} dividiert durch L, somit T^{-1}.

Ein Drehungsmoment ist das Produkt einer Kraft und einer Länge. Dasselbe ist somit

$$D = zKL = z(ML^2T^{-2}),$$

ein Trägheitsmoment das Produkt aus einer Masse und dem Quadrate einer Länge, dasselbe ist also

$$z(ML^2).$$

Drehungsmomente und Trägheitsmomente werden demnach aus dem früher angewandten System in das absolute übergeführt durch Multiplikation der früher angegebenen Zahlen mit g.

Wir fanden bei der Untersuchung der Pendelbewegung, dafs die Schwingungsdauer gleich ist π multipliciert mit der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmoment und dividiert durch die Quadratwurzel aus dem Drehungsmoment, welches die im Schwerpunkte des Pendels angreifende Kraft dem Pendel erteilt, wenn dasselbe senkrecht zur Richtung der Kraft ist. Der Quotient aus einem Trägheitsmoment und einem Drehungsmoment mufs demnach das Quadrat einer Zeit sein. In der That zeigen unsere Dimensionsausdrücke das, denn der Quotient ist

$$\frac{z_1(ML^2)}{z_2(ML^2T^{-2})} = zT^2.$$

Im § 22 definierten wir das specifische Gewicht einer Substanz als das Gewicht der Volumeinheit und unterschieden von demselben die Dichtigkeit der Substanz als die Masse der Volumeinheit. Im absoluten System fallen specifisches Gewicht und Dichtigkeit zusammen, da die Einheit der Masse die Einheit des Gewichtes ist. Da die Dichtigkeit Quotient einer Masse und eines Volumens, das Volumen die dritte Potenz einer Länge ist, so ist

$$s = z(ML^{-3}),$$

und man erkennt sofort aus der Beziehung zwischen der Masseneinheit des absoluten und des bisher angewandten Systemes, dafs in dem bisher angewandten Mafssystem die Dichtigkeit durch den Quotienten aus dem specifischen Gewicht und der Zahl g gegeben ist.

Die Centripetalbeschleunigung, welche ein Körper gegen den Mi punkt der drehenden Bewegung erhalten mufs, wenn derselbe sich im Ki bewegen soll, mufs die Dimension einer Beschleunigung haben. In That fanden wir § 33

$$\frac{F}{m} = \frac{v^2}{R} = z(L^2T^{-2}L^{-1}) = z(LT^{-2});$$

der Zug, den der im Kreise bewegte Körper zu dem Zwecke gegen Mittelpunkt des Kreises erfahren mufs, ist

$$F = m\frac{v^2}{R} = z(MLT^{-2}),$$

er hat also, wie es sein mufs, die Dimension einer Kraft.

Im dritten Kapitel des ersten Abschnittes berechneten wir die stante der Gravitation, das heifst den Zug in Kilogrammen, welch der Einheit gleiche Massen in der Entfernung von einem Meter ausübe erhielten

$$f = 6{,}46 \cdot 10^{-10}.$$

Die Dimensionen der Gravitationskonstanten ergeben sich darau zwei Massen m und m_1 im Abstande r sich mit einer Kraft K an welche gleich ist

$$K = f\frac{mm_1}{r^2},$$

somit

$$f = K\frac{r^2}{mm_1}.$$

Drücken wir K durch eine Zahl und seine Dimensionen aus, be dafs r eine Anzahl Längeneinheiten, m und m_1 eine Anzahl Massenei sind, so wird

$$f = z(MLT^{-2}L^2M^{-2}) = z(M^{-1}L^3T^{-2}).$$

Wir erhalten die Beziehung zwischen dem Zahlenwert von f bisher gebrauchten System und dem absoluten System, wenn wir a heiten zunächst Kilogramm, Meter, Sekunde beibehalten, da wen jetzt die frühere Masseneinheit M_1 genannt wird,

$$M = \frac{M_1}{g}$$

$$f = z(M^{-1}L^3T^{-2}) = zg(M_1^{-1}L^3T^{-2})$$

$$zg = z_1 \qquad z = \frac{z_1}{g}.$$

$$f = \frac{6{,}46}{9{,}822\,36} \cdot 10^{-10} = 0{,}657 \cdot 10^{-10} = 6{,}57 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\text{Meter}}{\text{Kilogr. S}}$$

Die Zahl bedeutet jetzt den Zug, den zwei Massen von je ei gramm auf einander ausüben, in Krafteinheiten, deren jede einem Kilo in der Sekunde die Beschleunigung ein Meter erteilen, wenn die ein Meter von einander entfernt sind.

Zu demselben Resultate gelangt man durch die Erwägung, dafs in
em absoluten System die Attraktionskonstante den Zug zweier Massen be-
eutet, deren jede $\frac{1}{g}$ der Masse ist, für welche früher der Zug berechnet
ar, dafs dann aber, um den Zug in unseren Krafteinheiten zu erhalten,
e früher gefundene Zahl mit g multipliciert werden mufs. Im Gauss-
hen Systeme Millimeter, Milligramm, Sekunde wird

$$f = 6{,}57 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Mm.}^3}{\text{Milligr. Sek.}^2},$$

d denselben Zahlenwert behält sie in den C, G, S Einheiten, das heifst
enn Centimeter, Gramm, Sekunde als Einheit gewählt werden. Diese
nheiten werden eben nach dem Vorgange der British Association die
G. S Einheiten genannt, so dafs also auch

$$f = 6{,}57 \cdot 10^{-8} \frac{C^3}{GS^2} = 6{,}57 \cdot 10^{-8} \left(G^{-1} C^3 S^{-2}\right)$$

Bei der Untersuchung der Eigenschaften der festen Körper fanden wir,
fs die elastischen Eigenschaften derselben ihrer Gröfse nach wesentlich
dingt werden durch zwei Konstante, den Elasticitätskoefficienten und die
nstante μ der Querkontraktion. Ersterer ist der Koefficient, mit welchem
r die in Bruchteilen der ursprünglichen Länge gegebene Verlängerung
es Stabes und den Querschnitt des Stabes multiplicieren müssen, um die
raft zu erhalten, mit welcher zwei benachbarte Schichten des verlänger-
n Stabes sich anziehen. Da die Verlängerung des Stabes in Bruchteilen
r ursprünglichen Länge gemessen eine reine Zahl ist, so folgt, dafs der
asticitätskoefficient, multipliciert mit einer Fläche, eine Kraft liefert,
mit dafs wir ihn als den Quotienten einer Kraft und einer Fläche er-
lten. Als solcher tritt er auch in den Gleichungen des § 49 auf. Da die
äche das Quadrat einer Länge ist, so wird

$$E = z\left(MLT^{-2} L^{-2}\right) = z\left(ML^{-1} T^{-2}\right).$$

Wir haben im § 49 die Elasticitätskoefficienten in einem rein kon-
ntionellen Mafse mitgeteilt, Kilogramm an einem Stabe vom Querschnitt
es Quadratmillimeter. Im absoluten Mafssystem dagegen mufs jede Längen-
mension in der einmal gewählten Einheit ausgedrückt werden, also auch
Fläche als das Quadrat derjenigen Länge, welche der Definition der
afteinheit zu Grunde liegt. Wollen wir den Elasticitätskoefficienten in
logramm, Meter, Sekunden ausdrücken, so müssen wir auch einen Stab
n 1 Quadratmeter Querschnitt voraussetzen. Wir müssen dann zunächst
e im § 49 gegebenen Zahlenwerte mit $1\,000\,000 = 10^6$ multiplicieren,
d dann, um den Zug in unseren Krafteinheiten auszudrücken, mit der
ahl g in Meter angegeben, im ganzen haben wir also die dort angegebenen
hlen mit

$$9{,}81 \cdot 10^6$$

multiplicieren. Der Elasticitätskoefficient des Silbers würde so z. B.

$$7357 \cdot 9{,}81 \cdot 10^6 = 72172 \cdot 10^6 \frac{\text{Kilogr.}}{\text{Meter Sek.}^2}.$$

Um die Elasticitätskoefficienten im System $C.G.S$ auszudrücken, sind, da das Kilo gleich 1000^{gr}, das Meter gleich 100^{cm} ist, die Zahlen mit

$$981 \cdot 10^5$$

zu multiplicieren, oder der Elasticitätskoefficient des hart gezogenen Silbers ist

$$72\,172 \cdot 10^7 \frac{G}{CS^2} \cdot$$

Hiernach lassen sich alle Elasticitätskoefficienten in absolute Maße umrechnen.

Der Querkontraktionskoefficient μ ist eine reine Zahl, diejenige, mit der wir die in Bruchteilen der Länge, also als Zahl gegebene Verlängerung des Stabes multiplicieren müssen, um die Veränderung der Querdimension in Bruchteilen der letztern, also auch als reine Zahl zu erhalten.

Der lineare Dilatationskoefficient und der kubische Kompressionskoefficient haben die reciproken Dimensionen des Elasticitätskoefficienten; ersterer ist der reciproke Wert des Elasticitätskoefficienten; dafs letzterer derselben Dimension ist, ergibt die Erwägung, dafs wir ihn erhalten, wenn wir die in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens gegebene Volumverminderung durch den pro Flächeneinheit wirkenden Druck dividieren. Wir fanden ja auch den kubischen Kompressionskoefficienten gleich $3\,\frac{1-2\mu}{E}$.

Der Torsionskoefficient und der Biegungskoefficient haben dieselben Dimensionen wie der Elasticitätskoefficient. Denn nach § 53 ist der Torsionskoefficient multipliciert mit einer Fläche ϱ^2, einer Länge $\omega\varrho$ und dem Quotienten zweier Längen $\frac{\varrho}{l}$ ein Drehungsmoment, somit Torsionskoefficient mal Fläche eine Kraft. Für den Torsionskoefficienten eines cylindrischen Stabes erhielten wir

$$\frac{\pi}{4(1+\mu)} E;$$

der vor E stehende Faktor ist eine reine Zahl; für den Biegungskoefficienten fanden wir $\frac{E}{4}$.

Dasselbe, was von den Kompressionskoefficienten und Elasticitätskoefficienten der festen Körper gilt, gilt auch für die der flüssigen Körper. Wir haben § 63 aus den von Grassi beobachteten Kompressionskoefficienten die Elasticitätskoefficienten einer Anzahl Flüssigkeiten im Kilogramm auf das Quadratmillimeter abgeleitet; zur Überführung dieser Zahlen in absolutes Mafs $C.G.S$ haben wir die dort angeführten Zahlen mit $981 \cdot 10^5$ zu multiplicieren. So wird der Elasticitätskoefficient des Wassers bei 0^0

$$2011 \cdot 10^7 \frac{G}{CS^2};$$

der der Druckeinheit auf das Quadratcentimeter entsprechende Kompressionskoefficient

$$0{,}197 \cdot 10^{-10} \frac{CS^2}{G}.$$

Der hydrostatische Druck ist der Druck, den die über der Flächeneinheit des betrachteten Niveaus stehende Flüssigkeitssäule ausübt. Da d

rodukt aus der Höhe h der Flüssigkeitssäule und dem specifischen Ge-
ichte s der Flüssigkeit das Gewicht der drückenden Flüssigkeitssäule gibt,
ist hsg, das Produkt aus dem Gewichte und der Beschleunigung bei dem
eien Fall der Druck auf die Flächeneinheit in Krafteinheiten. Die Di-
ension des Druckes ist, da

$$h = zL \qquad s = z\frac{M}{L^3} \qquad g = z\frac{L}{T^2}$$

$$ML^{-1}T^{-2}.$$

Multiplicieren wir mit einer Fläche, so erhalten wir eine Kraft; der
imensionsausdruck multipliciert mit L^2 wird auch MLT^{-2} die Dimension
er Kraft.

Der Luftdruck in $C.G.L$ ausgedrückt, wird bei uns

$$76 \cdot 13{,}5959 \cdot 981 = 10\,136\,673\,\frac{G}{CS^2}\cdot$$

Man sieht, der hydrostatische Druck einer und derselben Flüssigkeits-
ule, somit auch der Luftdruck ändert sich proportional dem Werte von g.

Die sämtlichen Kapillarerscheinungen werden in quantitativer Be-
hung bedingt durch den Wert der beiden Kapillarkonstanten H und ϑ.
tzterer ist ein Winkel, die Bedeutung der erstern ergibt sich daraus, daſs
i einer Kugel vom Radius R

$$\frac{H}{R}$$

n durch die Oberflächenspannung bewirkten Druck auf die Einheit der
äche der Kugel bedeutet. Die Konstante H ist also das Produkt aus
em Druck und einer Länge. Da die Dimension des Druckes $ML^{-1}T^{-2}$
, so folgt

$$H = z\,(ML^{-1}T^{-2}L) = z\,(MT^{-2}).$$

In der Dimension der Konstanten H kommt also die Länge nicht vor.

Zu demselben Resultat führt uns die erste Gleichung des § 77. Um
n Druck in den Krafteinheiten des absoluten Systems auszudrücken, haben
r die linke Seite der dort gegebenen Gleichung mit der Beschleunigung
u multiplicieren, es wird dann

$$fhgs = gm = H\cos\vartheta\,\frac{1}{r},$$

er für vollkommen benetzende Flüssigkeiten

$$(h + \tfrac{1}{3}r)\,gs = \frac{H}{r}$$

$$r\,(h + \tfrac{1}{3}r)\,gs = H.$$

Hierin ist $r = zL$, $h + \frac{1}{3}r = zL$, $g = zLT^{-2}$, $s = zML^{-3}$,
s Produkt wird

$$z\,(MT^{-2}) = H.$$

In der Tabelle von Seite 341 sind die Werte von $\frac{H}{2}$, oder eigentlich
$\frac{I}{r}$ für $r = 1$, weil wir die Konstanten als Milligramme bezeichnen
geben. Sie bedeuten so den Druck auf das Quadratmillimeter ein
che *von 1mm Radius in Milligrammen.*

Wir führen die Zahlen in die Druckeinheiten des Gaussschen Syste über, indem wir diese Zahlen mit 9810, dem bei uns gültigen Werte vo multiplicieren. Es wird demnach für Wasser bei 0° nach Brunner

$$H = 2 \cdot 7{,}666 \cdot 9810 = 149{,}7 \cdot 10^8 \frac{\text{Milligr.}}{\text{Sek.}^2}.$$

Im $C.G.S$ System wird für Wasser, da $1^{mgr} = 0{,}001^{gr}$,

$$H = 149{,}7 \frac{G}{\text{Sek.}^2},$$

und bedeutet so den Druck in Einheiten, deren jede der Masse 1^{gr} in Sekunde 1^{cm} Beschleunigung gibt auf ein Quadratcentimeter einer Ku deren Radius ein Centimeter ist.

Dafs wir einfach durch Einsetzen von Gramm an die Stelle des Mi gramm aus dem Gaussschen in das $C.G.S$ System übergehen, weil in Dimension von H die Länge L nicht vorkommt, ist auf den ersten B auffallend, läfst sich aber durch eine einfache Überlegung als richtig kennen.

In den Einheiten von Gauss würde der Druck auf die Fläche Quadratcentimeters und bei dem Krümmungsradius 1^{mm} der 100fache angegebenen sein, bei dem Krümmungsradius 1^{cm} gleich 10^{mm} ein Zeh des Hundertfachen, also

$$149{,}7 \cdot 10^4.$$

Da nun im $C.G.S$ System die Krafteinheit, weil das Gramm gl 1000^{mgr}, das Centimeter gleich 10^{mm} ist, 10 000 mal gröfser ist, so deuten

$$149{,}7 \cdot 10^4 \text{ Gauss} \quad 149{,}7 \text{ Krafteinheiten}$$

im $C.G.S$ System.

Wir bekommen demnach die in der Tabelle angegebenen Konsta $\frac{H}{2}$, übertragen ins $C.G.S$ System, wenn wir die dort angegebenen Za mit 9,81 multiplicieren.

Die Diffusionskonstante oder Diffusionsgeschwindigkeit definierten als die Salzmenge in Grammen, welche im Laufe eines Tages durch Querschnitt von 1^{qcm} geht, wenn zwei um 1^{cm} entfernte Schichten die l zentrationsdifferenz von 1^{gr} im Kubikcentimeter haben. Der Wert der l stanten bleibt derselbe, wenn wir das Gramm durch das Milligramm setzen, ist also von der gewählten Masseneinheit unabhängig, wie man s aus der Dimensionsbestimmung erkennt.

Auf Seite 361 erhielten wir für k

$$k = \frac{l S}{q u_0},$$

hierin ist l eine Länge $= z L$, S die in der Zeiteinheit übergetretene S menge $= z \frac{M}{T}$, q der Querschnitt $= z L^2$, u_0 die Konzentration, M in der Volumeinheit, somit $z \frac{M}{L^3}$; demnach wird

$$k = z \frac{L M L^3}{L^2 M T} = z \frac{L^2}{T}.$$

Nach Ficks Bestimmung wäre also für Kochsalz

$$k = 1{,}076 \frac{C^2}{\text{Tag}} = 12{,}5 \cdot 10^{-6} \frac{C^2}{S}.$$

Bei der Ausströmung der Flüssigkeiten durch kapillare Röhren de-
ierten wir den Koefficienten der innern Reibung als den in der Flächen-
nheit der Bewegung einer Flüssigkeitsschicht entgegenwirkenden Wider-
and, wenn die Geschwindigkeitsdifferenz zweier um die Längeneinheit von
nander entfernter Schichten gleich der Einheit ist. Der Reibungskoefficient
ultipliciert mit einer Fläche und dem Quotienten einer Geschwindigkeit
d einer Länge, repräsentiert somit eine Kraft; demnach ergibt sich seine
imension aus der Gleichung

$$\eta \cdot L^2 \frac{L}{TL} = z\,(MLT^{-2})$$

$$\eta = z\,(ML^{-1}T^{-1}).$$

Dieselbe Dimension für η ergibt sich auch aus der Gleichung des § 87
384, welche nach η aufgelöst liefert

$$\eta = \frac{\pi\,(p_a - p_e)}{8\,VL}\,R^4.$$

Hierin ist $p_a - p_e$ ein Druck, V ein Volumen dividiert durch eine Zeit,
mit ist $VL = L^4T^{-1}$. Die vierte Potenz der Länge im Nenner hebt
ch gegen jene im Zähler, und es bleibt für die Dimension von η das Pro-
kt eines Druckes und einer Zeit; da die Dimension des Druckes $ML^{-1}T^{-2}$
, ergibt sich für die Dimension von η der oben hingeschriebene Ausdruck.

Wir haben die Reibungskoefficienten der Flüssigkeiten § 87 in Milli-
ammen auf das Quadratmillimeter angegeben. Multiplicieren wir die
rt angegebenen Zahlenwerte mit dem in Millimetern ausgedrückten Werte
n G, so erhalten wir die Reibungskonstanten im Gaussschen System. So
ird die Reibungskonstante des Wassers bei 10° nach Poiseuille

$$1{,}309\,6 \frac{\text{Milligr.}}{\text{Millim. Sek.}}.$$

Zur Überführung in das $C.G.S$ System haben wir, da das Milli-
amm $0{,}001^{\text{gr}}$, das Centimeter gleich 10^{mm} ist, den in Gaussschen Ein-
iten gegebenen Zahlenwert des Reibungskoefficienten mit 100 zu divi-
eren, es wird für Wasser bei 10°

$$\eta = 0{,}013\,096 \frac{G}{CS}.$$

Die bei den Gasen zu bestimmenden Gröfsen sind derselben Art wie
i den Flüssigkeiten, Druck, Reibungskonstante, Diffusionskonstante, und
ben auch dieselben Dimensionen. Man erkennt das z. B. auch aus dem
n der dynamischen Gastheorie gelieferten Werte der beiden letzteren
nstanten.

Für die Diffusionskonstante erhielten wir, wenn u_1 und u_2 die mittlern
schwindigkeiten der fortschreitenden Bewegungen der Moleküle der bei-
n Gase, l_1 und l_2 die mittleren Wegelängen sind,

$$c = \frac{u_1 + u_2}{\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2} = \frac{(u_1 + u_2)\,l_1\,l_2}{(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2})^2}.$$

Die Dimension ist

$$LT^{-1}L^2L^{-1} = \frac{L^2}{T},$$

also dieselbe wie für die Flüssigkeit. **Der Zahlenwert des Dif** koefficienten hängt also nur von den gewählten Einheiten der Län der Zeit ab, wir haben dieselben seiner Zeit in Centimetern und Se angegeben.

Der Ausdruck für den Reibungskoefficienten war

$$\eta = \tfrac{1}{3}\, m n u l;$$

mn ist die Masse der Volumeinheit, u die mittlere Geschwindigk fortschreitenden Bewegung, l die mittlere Wegelänge der Moleküle,

$$\eta = z\,(ML^{-3}LT^{-1}L) = z\,(ML^{-1}T^{-1}).$$

Wir haben auch die Reibungskoefficienten in Milligrammen ang dieselben mit 98,1 multipliciert geben die Zahlenwerte im $C \,.\, G \,.\, S$ S so wird nach Kundt und Warburg

$$\text{für Luft } \eta = 0{,}000\,188 \;\frac{G}{CS}$$

$$\text{Wasserstoff } \eta = 0{,}000\,092\,3 \;\frac{G}{CS}$$

$$\text{Kohlensäure } \eta = 0{,}000\,152 \;\frac{G}{CS}.$$

Wir werden von jetzt an das absolute Mafssystem anwenden u den zu bestimmenden Konstanten die Dimensionen sowie die gewählte heiten in der bei dieser Darlegung benutzten Weise angeben. In der werden wir das $C \,.\, G \,.\, S$ System benutzen.

Dritter Abschnitt.

Von der Wellenbewegung.

Erstes Kapitel.

Theoretische Principien der Wellenbewegung.

§ 123.

Schwingende Bewegung eines Punktes. Wenn ein materieller unkt A (Fig. 196), welcher durch irgend welche Kräfte in einer bestimmten ge so festgehalten wird, dafs er, sobald er aus derselben fortgeschoben ist, eder in seine frühere Lage zurückgezogen wird, durch eine äufsere Kraft seiner Gleichgewichtslage nach B entfernt und dann der Wirkung der in die Ruhelage zurückziehenden Kräfte erlassen wird, so wird er zunächst wieder seine frühere Lage zurückkehren. Da aber Kräfte, welche den Punkt zurückziehen, lange auf ihn wirken, bis er die Lage in A wieder erreicht hat, so ist ihm erteilte Bewegung eine beschleunigte und der Punkt ist in A mit er gewissen gegen C gerichteten Geschwindigkeit begabt. Infolge dieser schwindigkeit mufs der Punkt, gerade wie das bewegte Pendel über vertikale Lage, sich über die Ruhelage hinaus gegen C hin bewegen. on der Zeit an aber, wo er die Ruhelage nach der andern Seite verlassen t, wirken die ihn nach A ziehenden Kräfte wieder auf den Punkt ein. esmal aber sind sie der Bewegung entgegengerichtet, bewirken also, dafs Bewegung des Punktes eine verzögerte wird, bis er in dem Abstande C von A auf einen Augenblick in Ruhe kommt, wenn durch die Wirkung r nach A gerichteten Kräfte die dem Punkte auf dem Wege BA erteilte schwindigkeit vernichtet ist.

Fig. 196.

Der Abstand AC ist gleich dem Abstande AB, da der bewegte Punkt Geschwindigkeit in A nur infolge der gegen A gerichteten Kräfte erten hatte, und dieselben Kräfte es sind, welche die Bewegung desselben mmen. Von C aus wird dann der betrachtete Punkt gerade so nach A ückkehren, wie vorher von B, wird ebenso infolge der auf diesem Wege ngten Geschwindigkeit sich über A hinausbewegen nach B hin, weiter B wieder über A nach C und so fort. Kurz, der Punkt wird eine her gehende Bewegung um den Punkt A vollführen, indem ihn gegen A hinziehenden Kräfte sich abwechselnd der nähert und von ihr entfernt.

Eine solche hin und her gehende Bewe mte Lage nennt man eine schwingend

dort eintreten, wo ein Punkt aus seiner Gleichgewichtslage entfernt ist, d
in eine neue Gleichgewichtslage übergeführt zu sein; ein specielles Beis
einer solchen haben wir bereits früher beim Pendel kennen gelernt, weld
infolge der Schwerkraft Schwingungen um die Vertikale vollführt. And
Arten von schwingenden Bewegungen der einzelnen Teile fester, flüs
und gasförmiger Körper werden wir demnächst zu betrachten haben.

Den Abstand der äufsersten Punkte der Bahn des Beweglichen von
Ruhelage, die Länge AB, nennen wir die Schwingungsweite oder Amplit
der Schwingung, und die Zeit, welche der Punkt zum Zurücklegen ei
ganzen Schwingung gebraucht, das heifst, um den Weg von B nach C
wieder zurück zu durchlaufen, die Schwingungsdauer. Den Bewegu
zustand des Punktes zu irgend einer Zeit, oder an einer Stelle a der B
desselben nennt man die Oscillationsphase, so dafs also die Phase d
den Abstand Aa von der Ruhelage, die Geschwindigkeit und Bewegu
richtung des Punktes in dem betrachteten Augenblicke bestimmt v
Während einer ganzen Oscillation ist der bewegte Punkt in allen mögli
Phasen, d. h., er nimmt alle überhaupt bei den Schwingungen mögl
Bewegungszustände an. Zugleich sieht man, dafs die Zeit, welche verf
bis der Punkt wieder in derselben Phase ist, ebenfalls der ganzen Os
tionsdauer gleich ist. Die um eine halbe Schwingungszeit von ein
entfernten Phasen nennt man entgegengesetzte. Der bewegte Punk
findet sich dann in gleichen, aber der Richtung nach entgegenges
Bewegungszuständen; die Abstände von der Ruhelage sind dann g
aber an verschiedenen Seiten, und die Geschwindigkeiten sind gleich
nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Wir nahmen vorhin an, dafs die schwingende Bewegung des Pu
dadurch eingeleitet wurde, dafs äufsere Kräfte denselben nach B entf
und dann ihn der Wirkung der nach A gerichteten Kräfte überliefs
ist jedoch klar, dafs die schwingende Bewegung auch dadurch eing
werden kann, dafs dem Punkt A durch einen Stofs eine gewisse n
gerichtete Geschwindigkeit erteilt wird. Er wird sich dann in der Ri
nach B bewegen, bis durch die Wirkung der ihn nach A zurückziel
Kräfte die dem Punkte erteilte Geschwindigkeit aufgehoben wird, dan
mit beschleunigter Bewegung nach A zurückbewegen, darüber hinaus
C hin und von da an ganz in der vorhin betrachteten Weise über A n
um die soeben betrachteten Schwingungen zu vollführen.

§ 124.

Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes. U
schwingende Bewegung eines Punktes zu bestimmen, ist es notwendi
jedem Augenblicke den Ort sowohl als die Geschwindigkeit des Punkte
Gröfse und Richtung nach zu kennen. Wir werden daher eine Gleic
aufzusuchen haben, worin der Abstand des beweglichen Punktes von
Ruhelage, ferner die Geschwindigkeit desselben als abhängig von der
dargestellt wird.

Diese Abhängigkeit wird lediglich davon bedingt, nach welchen
setze die Kräfte, welche den aus der Gleichgewichtslage gebrachten P
gegen dieselbe hintreiben, sich mit dem Abstande des Punktes von
selben ändern. Da wir es nun in unsern weitern Untersuchungen fast

Schwingungen zu thun haben, welche durch Elasticität bedingt sind, deren Amplituden so klein sind, dafs die Elasticitätsgrenzen nicht über-:itten werden, so wollen wir hier nur die schwingenden Bewegungen achten, bei denen die wirkenden Kräfte in jedem Momente dem augenklichen Abstande des Punktes von der Gleichgewichtslage proportional L. Bezeichnen wir dann die Kraft, welche den Punkt gegen die Gleichichtslage hintreibt, wenn er sich im Abstande y von derselben befindet, ψ und mit p eine Konstante, so ist

$$\psi = -py.$$

Wir müssen der rechten Seite das negative Vorzeichen geben, da die atung der wirksamen Kraft immer die entgegengesetzte ist von dergen, nach welcher der Punkt aus der Gleichgewichtslage entfernt ist; ndet sich der Punkt rechts von A Fig. 196, so wirkt die Kraft nach :s und umgekehrt. Die Konstante p in dieser Gleichung ist die Kraft, welcher der Punkt gegen die Gleichgewichtslage hin gezogen wird, m der Abstand $y = 1$ ist.

Nennen wir die Masse des beweglichen Punktes m, so wird die Beleunigung φ, welche derselbe im Abstande y gegen die Gleichgewichtsp hin erfährt,

$$\varphi = -\frac{p}{m}y = -k^2 y.$$

Diese Beschleunigung φ ist gleich dem Quotienten aus der Änderung Geschwindigkeit dv, welche die Bewegung in der unendlich kleinen it dt erfährt, in welcher der Punkt gerade den Abstand y passiert, und ser unendlich kleinen Zeit dt, oder

$$\varphi = \frac{dv}{dt}$$

d damit

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 y \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ I.}$$

In dieser Form der Gleichung I erkennt man unmittelbar, dafs sie ttisch dieselbe ist, welche wir § 25 für die Schwingungen des Pendels erten, eine Übereinstimmung, die notwendig ist, da wir bei Betrachtung der delbewegung so kleine Amplituden voraussetzten, dafs wir die bewegende ft in jedem Momente dem Abstande des Pendels von seiner Gleichichtslage proportional setzen konnten. Es ist also dasselbe Gesetz für Abhängigkeit des Beweglichen von der bewegenden Kraft, welche wir wie an jener Stelle zu Grunde legen.

In derselben Weise wie § 25 erhalten wir aus der Geichung I für Geschwindigkeit v, welche das Bewegliche im Abstande y von der ichgewichtslage besitzt, wenn wir den Abstand des Punktes dort, wo Geschwindigkeit gleich Null ist, also die Amplitude der Bewegung α bezeichnen,

$$v^2 = k^2(\alpha^2 - y^2) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ II.}$$

Um die Abhängigkeit des Abstandes y des Punktes von chtslage zu erhalten, wollen wir annehmen, der Punk egung in dem Momente, in welchem er seine Gleichg

läfst, dafs also die Bewegung durch einen kurzen Stofs eingeleitet w
In dem Ausdrucke für v

$$v = \pm k \sqrt{\alpha^2 - y^2}$$

haben wir dann auf der rechten Seite das positive Vorzeichen zu wi
wenn wir die Richtung, nach welcher das Bewegliche aus der G
gewichtslage sich zuerst bewegt, als die positive Richtung der y betra
Nach der Bedeutung von v

$$v = \frac{dy}{dt}$$

wird dann

$$\frac{dy}{dt} = k \sqrt{\alpha^2 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} = k\,dt$$

und

$$\int_0^y \frac{dy}{\alpha\sqrt{1 - \frac{y^2}{\alpha^2}}} = \int k\,dt = kt.$$

Die Summe auf der linken Seite müssen wir von $y = 0$ bis y
nehmen, weil wir den Beginn der Bewegung von dem Momente an re
in welchem das Bewegliche die Gleichgewichtslage passiert, also $y =$
wenn $t = 0$ ist. Diese Summe ist nach E 8 und E VIII

$$kt = \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{\alpha}\right) - \text{arc}\left(\sin = \frac{0}{\alpha}\right) = \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{\alpha}\right).$$

Lösen wir die Gleichung nach y auf, so wird

$$y = \alpha \sin kt \quad \cdots\cdots \quad \text{III.}$$

In dieser Gleichung wächst y mit t von $t = 0$ bis $kt = \frac{\pi}{2}$; ist
terer Wert von t erreicht, so wird $y = \alpha$ gleich der Amplitude de
wegung. Wächst t weiter, so nimmt y ab und wird 0, wenn $kt =$
worden ist; bei weiterer Zunahme von t wird, so lange $kt > \pi < 3\frac{\pi}{2}$
negativ und wächst negativ bis $-\alpha$, welcher Wert für $kt = 3\frac{\pi}{2}$ er
wird. Wenn dann kt von $3\frac{\pi}{2}$ bis 2π zunimmt, wird der negative
von y kleiner und für $kt = 2\pi$ wird y wieder gleich Null, der Punk
seine Gleichgewichtslage wieder erreicht. Das Bewegliche hat also,
die Zeit t einen solchen Wert angenommen hat, dafs $kT = 2\pi$, eine g
Schwingung zurückgelegt. Da wir nun als Schwingungsdauer jene
bezeichnet haben, in welcher das Bewegliche eine ganze Schwingung
führt, so ist T die Schwingungsdauer der Bewegung. Zwischen dem
und der Quadratwurzel aus der Beschleunigung k im Abstande 1 vo
Gleichgewichtslage besteht somit die Beziehung

$$k = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p}{m}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{p}}.$$

Ersetzen wir schliefslich k in der Gleichung für y durch diesen Wert, wird

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Dafs diese Gleichung die schwingende Bewegung gerade so ergibt, wie r sie im vorigen Paragraphen abgeleitet haben, erkennt man unmittelbar. enn gerade so wie die Abstände y sich ändern, wenn t von 0 bis T wächst, rade so ändern sie sich jedesmal, wenn t von nT bis $(n+1)\,T$ wächst, nn also die Zeit t um eine ganze Schwingungsdauer zunimmt. Ferner kennt man, dafs in zwei Zeitpunkten, welche um eine halbe Schwingungs-uer von einander entfernt sind, die Abstände y auf entgegengesetzter ite der Gleichgewichtslage einander gleich sind, denn die Werte zweier nus, deren Argumente um π verschieden sind, sind der Gröfse nach gleich, m Zeichen nach entgegengesetzt.

Die Geschwindigkeit v zur Zeit t ist

$$v = k\sqrt{\alpha^2 - y^2} = \alpha \frac{2\pi}{T}\sqrt{1 - \sin^2 2\pi \frac{t}{T}} = \frac{2\pi}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

ie Gleichung zeigt, dafs, wenn $t = 0$, die Geschwindigkeit ihren gröfsten ert hat; dieselbe wird mit wachsendem t kleiner und gleich 0, wenn $= \frac{1}{4}\,T$, also zur Zeit, in welcher $y = \alpha$ das Bewegliche seinen gröfsten bstand von der Gleichgewichtslage erreicht hat. Wächst t, so wird v gativ, das Bewegliche kehrt gegen die Gleichgewichtslage zurück und ar, da das negative v wächst, bis $t = \frac{1}{2}\,T$, $y = 0$ geworden ist, mit achsender Geschwindigkeit, bis das Bewegliche in die Gleichgewichtslage rückgekehrt ist. Bei weiterm Wachsen von t bleibt v negativ, bis $= \frac{3}{4}\,T$, $y = -\alpha$ geworden, das Bewegliche also den gröfsten Abstand f der andern Seite der Gleichgewichtslage erreicht hat. Dann ist $v = 0$ d bei weiterem Wachsen von t wird es wieder positiv; das Bewegliche mmt von der negativen Seite her mit wachsender Geschwindigkeit in die ichgewichtslage zurück und hat, wenn es die Gleichgewichtslage erreicht , dieselbe Geschwindigkeit wie bei dem Beginne der Bewegung. Auch zeigt somit, dafs, wie wir es im vorigen Paragraphen ableiteten, das wegliche, wenn keine Hindernisse vorhanden sind, unaufhörlich zwischen selben Grenzen und mit derselben Geschwindigkeit hin und her geht.

Die entwickelte Gleichung setzt uns somit den Stand, für jeden Moment, wenn wir die egenden Kräfte kennen, die Lage und Ge-windigkeit des Beweglichen vollkommen zu timmen, sie gibt uns somit unmittelbar das etz der schwingenden Bewegung eines nktes, wenn auf denselben Kräfte wirken, che dem Abstande des Punktes aus der ichgewichtslage proportional sind.

Fig. 197.

Die Bewegung eines nach diesem Gesetze wingenden Punktes können wir uns leicht phisch darstellen. Sei C Fig. 197 die Gleich-wichtslage des Punktes, der auf der Linie Ca sich [illegible] ge. Beschreiben wir dann mit dem Radius Ca und C [illegible]

denken uns, dafs ein Punkt mit der Geschwindigkeit $\alpha \frac{2\pi}{T}$ diesen
durchlaufe, so sind die Projektionen der von dem Punkte in diesem
durchlaufenen Bögen auf den Durchmesser *Ca* die Strecken, die der
in der schwingenden Bewegung zurückgelegt hat. Geht der Punkt
aus nach oben, so gibt uns die Projektion des Bogens $\frac{1}{12} T$ gleich C
nach $\frac{1}{12}$ Schwingungsdauer zurückgelegten Weg u. s. f. Man sieh
dafs die in gleichen Zeiten bei der schwingenden Bewegung zurückg
Wege sehr verschieden sind. Die den gleichen Bögen angehörigen (
sind dann den Geschwindigkeiten proportional, welche den Abständen
des Punktes von der Gleichgewichtslage entsprechen.

§ 125.

Schwingung von Punktreihen. Entstehung der Wellen.
wir in einer Reihe von Punkten, welche durch Kräfte, die zwisch
einzelnen Punkten thätig sind, in einer bestimmten Lage, der
gewichtslage, festgehalten werden, einen Punkt in eine schwingen
wegung versetzen, so wird dadurch nicht nur das Gleichgewicht
einen Punktes gestört, sondern das der ganzen Reihe. Da die
gewichtslage durch die Wirkung der übrigen Punkte bedingt wird, s
dadurch, dafs der eine Punkt seine Lage ändert, zunächst die c
grenzenden Punkte gestört werden und von diesen sich die Gleichge
störung auf immer weitere übertragen.

Wir nehmen an, dafs die einzelnen Punkte sich anziehen, u
die Anziehungskraft sich ändert mit der Entfernung der Punkte v
ander. Überdies setzen wir voraus, dafs der vollständigen Annäher
Punkte abstofsende
entgegenwirken, die
falls mit der Entfern
Punkte aber nach
andern Gesetze als
ziehenden Kräfte sich ändern. Nehmen wir an, dafs mit einer Annä
der Punkte die abstofsenden Kräfte viel rascher wachsen als die anzie
so ist durch ein System solcher Kräfte die Gleichgewichtslage der
vollständig bestimmt. In dieser sind die an jedem einzelnen Punkt
entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte gleich. Wird nun der P
Fig. 198 aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und z. B. nach α' v
so wird dadurch der Abstand zwischen α und β gröfser. Durch die
rung des Abstandes $\alpha\beta$ in $\alpha'\beta$ werden die auf β von α wirkenden
geändert; sowohl die anziehenden als die abstofsenden werden k
Da aber die Abstofsungen sehr viel rascher abnehmen als die Anzieh
so ist der Erfolg dieser Änderungen, dafs β jetzt stärker nach α' g
wird. Da in der Gleichgewichtslage die Wirkung der an β angre
Kräfte sich aufhebt, so mufs jetzt, da die Anziehung nach α' zugen
hat, der Punkt β sich α zu nähern suchen, aber nicht in der Richtu
sondern in einer andern Richtung $\beta\beta'$. Denn mit der Bewegung
nach unten hin ändert sich ebenfalls der Abstand $\beta\gamma$, und auch hie
wegen der raschern Abnahme der abstofsenden Kräfte die Anziehung

Fig. 198.

wiegen. Auf den Punkt β wirkt daher eine nach α' und eine nach γ gerichtete Anziehung ein, β wird sich also in der Richtung der Resultierenden nach β' bewegen.

Bewegt sich der Punkt α nach α'', so mufs β aus eben den Gründen folgen und sich nach β'' bewegen, zugleich mufs aber γ seine Ruhelage verlassen, da jetzt die Anziehung von β auf γ die Abstofsung überwiegt, und von γ sich nach γ' bewegen.

Wenn demnach α das erste Viertel seiner Oscillation zurückgelegt hat, ist die Bewegung auf der Punktreihe bis zum Punkte δ fortgeschritten, α, β, γ haben ihre Ruhelage verlassen; die Gestalt der Punktreihe ist die Fig. 198 dargestellte.

Wenn α in seiner Bewegung umkehrt und in der folgenden Zeit gegen die Ruhelage sich bewegt, wird sich β zunächst wegen der Geschwindigkeit, welche es in β'' besitzt, noch eine Strecke weiter bewegen, und dann ebenfalls durch die von α und γ ausgeübten Anziehungen zur Ruhelage zurückkehren. Das Gleiche wird etwas später mit γ der Fall sein. Hat α dann die Ruhelage erreicht, so wird β, γ die in Fig. 199 angedeutete Lage haben. Die Bewegung von γ hat aber während dieser Zeit die Bewegung von δ zur Folge gehabt, und diese wieder die Bewegung von ε und ζ, gerade wie sich vorhin β und γ infolge der Bewegung von α bewegten. Der Punkt δ hat in dieser Zeit seinen gröfsten Abstand erreicht, da γ denselben schon überschritten, und in dem in Fig. 199 dargestellten Momente sowohl γ als ε den Punkt δ gegen seine Gleichgewichtslage hinziehen. Wenn also α in seiner Ruhelage angekommen ist, hat ein in einem gewissen Abstande von α liegender Punkt seinen gröfsten Abstand erreicht und ist im Begriffe, den Rückweg gegen die Ruhelage anzutreten, und die Bewegung überhaupt hat sich bis zum doppelten Abstande von α bis η fortgepflanzt. Fig. 199 stellt die gegenseitige Lage der Punkte in diesem Augenblicke dar.

Fig. 199.

In der darauf folgenden Zeit bewegt sich der Punkt α über die Ruhelage hinaus nach α''' (Fig. 200); die Punkte β und γ folgen; der Punkt δ, der im Augenblicke, als α die Ruhelage passierte, seine rückgängige Bewegung antrat, hat denselben Raum durchlaufen wie in der vorigen Zeit und ist in seine Ruhelage zurückgekehrt. Die folgenden Punkte ε, ζ, η befinden sich in derselben Lage und derselben Phase der Bewegung wie β, γ, δ in dem vorhin betrachteten Zeitpunkte, wo α in die Ruhelage zurückgekehrt war, δ seine äufserste Lage erreicht hatte.

Fig. 200.

Wie sich aber am Ende des ersten Viertels der Oscillation von α die Bewegung bis δ fortgepflanzt hatte, so hat sie sich jetzt ϑ und ι mitgeteilt, und der Punkt $\varkappa$ ist im Begriffe, seine Bewegung nach unten hin zu beginnen.

Wenn schliefslich α den letzten Teil seiner Oscillation zurückge hat und wieder in seiner Gleichgewichtslage angekommen ist, so ist Lage der Punkte α bis ν folgende geworden (Fig. 201). Die Punkte haben ihre äufserste Lage überschritten und sind auf dem Rückwege Ruhelage; δ ist während der Zeit, welche α brauchte, um von s äufsersten zur Ruhelage sich zu bewegen, von der Ruhelage bis zu sei gröfsten Abstande fortgeschritten; ε und ζ haben die Ruhelage überschri η ist wie α von der äufsersten Lage in dieselbe zurückgekehrt; ϑ u haben ähnliche Wege zurückgelegt wie β und γ; der Punkt $\varkappa$, der am l der vorigen Zeit seine Bewegung anfing, hat den gröfsten Abstand err und λ und μ haben eine Bewegung erhalten, wie β und γ in der zuerst trachteten, ε und ζ in der folgenden und ϑ und ι in der der letzten mittelbar vorhergehenden Zeit. Die Bewegung hat sich also bis Punkte ν fortgepflanzt, der gerade im Begriff steht, seine Bewegun beginnen.

Dadurch also, dafs einem Punkte α einer Punktreihe, welche d anziehende und abstofsende Kräfte der einzelnen Punkte im Gleichge gehalten wird, eine lierende Bewegung e wird, erhalten auch di genden Punkte eine lierende Bewegung, w sich von Punkt zu Pu der Reihe fortpflanzt. D die Bewegung des Punktes α fort, so dauert ebenso die Bewegung de genden Punkte fort. Von ν an pflanzt sich die Bewegung gerade so w fort, während der ersten Oscillation von ν, welche mit der zweiten gleichzeitig ist, um eine der Länge $\alpha\nu$ gleiche Strecke und so w Ebenso wie nach der einen Richtung pflanzt sich die Bewegung auch der entgegengesetzten in ganz gleicher Weise fort, so dafs nach und sämtliche Punkte unserer Punktreihe eine oscillierende Bewegung erh

Fig. 201.

Wenn die Punkte bei ihrer oscillierenden Bewegung die Punk verlassen, wie wir es der Deutlichkeit wegen in unseren Figuren nommen haben, so erhält die Punktreihe im Laufe der Bewegung wellenförmige Gestalt, deshalb nennt man die Bewegung eine W bewegung.

Die Strecke, über welche sich die oscillierende Bewegung wä einer ganzen Oscillation des Punktes α verbreitet, hat die Gestalt Welle, deshalb nennt man sie eine Welle oder Wellenlänge. Auf Strecke sind alle Oscillationsphasen, welche der einzelne oscillierende nach und nach annimmt, neben einander vorhanden, weil jeder Punl dieser Strecke seine Oscillation um ein wenig später beginnt, und gerade so zurücklegt als der Punkt α.

Die einzelne Welle besteht aus zwei kongruenten Teilen, einem w und einem hintern, dem Wellenberge und dem Wellenthale, in den homologen Punkte, das heifst diejenigen, welche gleich weit vom A jeder Wellenhälfte entfernt sind, mit gleichen aber entgegengesetz teten Geschwindigkeiten begabt sind. Die gleich wei jeder Wellenhälfte liegenden Punkte befinden sich dahe

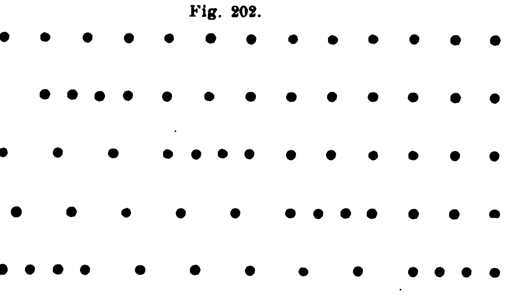
Phasen. Um diesen Gegensatz auszudrücken, ist auch der Name Wellenberg und Wellenthal gewählt worden, jeder der Hälften kann man den Namen Wellenberg oder Wellenthal beilegen.

Bei der fortschreitenden Bewegung teilt sich die Reihe in eine Folge solcher Wellenlängen, und wenn die Verhältnisse in der ganzen Reihe dieselben sind, so ist auch die Länge der Wellen in der ganzen Punktreihe die gleiche. Hat sich demnach die Bewegung in einer Zeit t um die Länge x fortgepflanzt, und ist die Zeit $t = n \cdot T$, wo T wie vorhin die Oscillationsdauer eines der Punkte bedeutet, so hat sich die Länge x in n Teile von der Länge einer Welle zerlegt, in deren jeder alle Punkte sich gerade so bewegen, wie die zwischen α und ν gelegenen Punkte. Da nun unter dieser Voraussetzung auch die Oscillationsdauer immer dieselbe ist, so mufs, da während der Zeit T die schwingende Bewegung sich um die Länge einer Welle fortpflanzt, die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Bewegung auf immer weitere Punkte überträgt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung konstant sein.

Wir haben bisher über die Richtung, in welcher die einzelnen Punkte sich bewegen, gar keine Voraussetzung gemacht, um die Betrachtung ganz allgemein zu halten. Die Richtung wird bedingt durch diejenige, welche der Punkt α anfänglich besitzt, und durch die Kräfte, welche auf die Punkte der Reihe einwirken.

Bewegt sich der Punkt α anfänglich in der Richtung der Punktreihe, so sieht man sofort, dafs dann alle Punkte ebenfalls in derselben Richtung hin und hergehen müssen, da dann nur Kräfte auftreten, welche in dieser Richtung wirken. Die Richtung der Bewegung der Punkte fällt dann mit derjenigen, in welcher sich die Bewegung fortpflanzt, zusammen. Bei diesen, den sogenannten longitudinalen Schwingungen oder longitudinalen Wellen, tritt eine Gestaltsveränderung der Punktreihe nicht ein, sondern nur eine Verdichtung und abwechselnde Verdünnung, indem die Punkte sich abwechselnd einander nähern und von einander entfernen (Fig. 202).

Fig. 202.



Ist die Bewegung der Punkte senkrecht gegen die Punktreihe, so nennt man die Schwingungen transversale; die Richtung, in welcher die Punkte sich bewegen, ist dann senkrecht gegen die Richtung, in welcher die Bewegung sich fortpflanzt. Eine solche transversale schwingende Bewegung tritt nicht immer dann ein, wenn die ursprüngliche Bewegung des zuerst bewegten Punktes eine transversale ist, sondern nur dann, wenn die Resultierende sämtlicher auf die einzelnen Punkte der Reihe, wenn sie die Gleichgewichtslage verlassen haben, wirkenden Kräfte gegen die Punktreihe senkrecht ist. Wir werden später Fälle der Art zu betrachten haben.

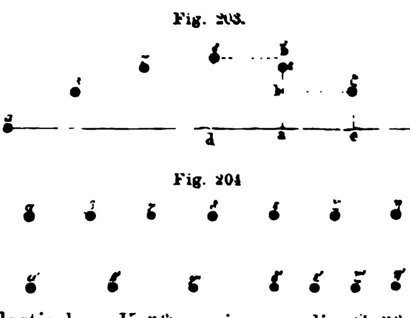
Möglich ist es ferner, dafs die longitudinale und transversal[e Be]wegung sich kombiniert und dafs die einzelnen Punkte dadurch ge[schlossene] oder krummlinige Bahnen beschreiben. Wir werden letztere bei eine[n] Wasserwellen finden.

§ 126.

Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer P[unkt]reihe. Um die Bewegung der einzelnen Punkte einer Reihe volls[tändig] darzustellen, müssen wir für jeden Zeitpunkt den Ort jedes Punkte[s der] Reihe, sowie seine Geschwindigkeit der Gröfse und Richtung nach besti[mmen] können. Wir müssen demnach auch hier, wie bei der oscillierende[n Be]wegung eines Punktes, eine Gleichung aufsuchen, welche uns die z[u be]stimmenden Gröfsen als abhängig von der Zeit und von ihrer Lage i[n der] Punktreihe wiedergibt, denn nach den Betrachtungen des vorigen Paragr[aphen] hängt der Bewegungszustand eines Punktes der Reihe sowohl von de[r Zeit] als auch von der Lage des Punktes in der Reihe ab. Für einen gege[benen] Zeitmoment ist die Bewegung der Punkte der Reihe je nach ihrer [Lage] verschieden, und für eine gegebene Lage ist sie eine andere zu verschie[denen] Zeiten.

Um zu der Gleichung zu gelangen, betrachten wir einen beli[ebigen] Punkt der Reihe, dessen Abstand von dem Anfangspunkt der Bew[egung], das heifst von dem Punkte, den wir in eine schwingende Bewegun[g ver]setzten, gleich x sei, und suchen dessen Bewegung zur Zeit t zu besti[mmen]. Wir gelangen dazu, indem wir die Kräfte aufsuchen, welche die Bew[egung] des Punktes bewirken.

Wie die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zeigen, werd[en die] Punkte der Reihe nach und nach von der Bewegung ergriffen, und die [Folge] davon ist, dafs die neben einander liegenden Punkte nie gleich weit, s[ondern] der eine mehr, der andere weniger von der Gleichgewichtslage entfern[t sind]. Die Punkte sind deshalb auch relativ gegen einander verschoben, das [heifst] ihre Stellung gegen einander ist eine andere als die der Gleichgewic[htslage] entsprechende. Da wir nun v[oraus]setzen, dafs die Punkte sich du[rch die] zwischen ihnen thätigen Kr[äfte im] Gleichgewicht halten, so [müssen] bei einer solchen Verschiebu[ng der] Punkte gegen einander Kräft[e thätig] sein, welche die Punkte in i[hre re]lative Gleichgewichtslage z[urück]zubringen suchen. Wir [setzen] voraus, dafs die Verschiebu[ngen so] klein sind, dafs wir, wie b[ei den] elastischen Kräften, immer die Gröfse dieser Kräfte der Gröfse de[r Ver]schiebung proportional setzen dürfen.



Es stelle nun $\alpha\delta\eta$ (Fig. 203) die Lage der Punkte in einem [Teile] der Punktreihe, welches in Bewegung ist, dar, sei es bei transvers[aler, sei] es bei longitudinaler Schwingung. Ist die Bewegung transversal, [so sind] die Abstände der Punkte $\beta, \gamma \cdots$ von $\alpha\eta$ in der That [die Abstände der] Punkte von der Gleichgewichtslage. Schwingen die P[unkte]

iellen die Abstände der Punkte von $\alpha\eta$ die Verschiebungen der Punkte der Gleichgewichtslage (Fig. 204) dar, indem die Verschiebungen in Orte der Gleichgewichtslage, z. B. $\alpha\beta' - \alpha\beta$, $\alpha\gamma' - \alpha\gamma$, $\cdot\cdot$ senkrecht η aufgetragen sind.

Betrachten wir irgend drei neben einander liegende Punkte, z. B. ζ, so ist die Verschiebung des Punktes ε gegen δ der Differenz der senkten Abstände $d\delta - a\varepsilon$ und ebenso die Verschiebung von ε gegen ζ der renz $a\varepsilon - c\zeta$ proportional. Schwingen die Punkte longitudinal, so die Differenzen $\varepsilon b'$ und εb die Verschiebungen der Punkte gegen einander t, wie sich aus der eben angeführten Konstruktion ergibt. Schwingen Punkte transversal, so wird, wenn wir voraussetzen, dafs die Amplituden Schwingung sehr klein sind, eine merkliche Veränderung in den Ablen der Punkte nicht eintreten, es ist $\delta\varepsilon$ von ad nur um eine selbst n ad verschwindende Gröfse verschieden. Es bildet dann aber die Verungslinie beider Punkte mit der Verbindungslinie in der Gleichgewichtseinen Winkel, in derselben Art, wie wir es bei der Torsion fanden. Tangente dieses Verschiebungswinkels, wie wir ihn damals nannten, oder da die Winkel so klein sind, dafs wir für die Tangente den Bogen einn dürfen, der Verschiebungswinkel selbst, ist gleich den Quotienten aus Verschiebung der Moleküle und dem Abstande der Moleküle in der hgewichtslage. Der Verschiebungswinkel zwischen δ und ε ist $\varepsilon\delta b' = \frac{\varepsilon b'}{ad}$, zwischen ε und ζ ist $\frac{\varepsilon b}{ac}$.

Setzen wir für unsere Punktreihe die früher erkannten Gesetze der icität als gültig voraus, so folgt, dafs zwischen zwei gegen einander hobenen Molekülen Kräfte thätig sind, welche sie in die relative Gleichchtslage zurückzubringen suchen, und welche der Gröfse der Verschiebung ortional sind. Das Mafs dieser Kräfte ist der Elasticitätskoefficient, die t, mit der die Moleküle gegen ihre Gleichgewichtslage hingetrieben en, wenn die Verschiebung dem ursprünglichen der Gleichgewichtslage prechenden Abstande gleich geworden ist. Bezeichnen wir den Elastiskoefficienten mit e, den der Gleichgewichtslage entsprechenden Abstand Moleküle mit dx, so ist die einer Verschiebung ξ der Moleküle enthende Kraft

$$f = \frac{\xi}{dx}\,e.$$

sahen weiter bei Besprechung der Torsionserscheinungen, dafs bei Verschiebung der Molekülschichten gegen einander ohne Vergröfserung Abstandes der Schichten, eine die Schichten gegen ihre relative Gleichchtslage zurücktreibende Kraft auftritt, welche der Gröfse des Verbungswinkels proportional ist. Diese Kraft war für die Einheit des chiebungswinkels ein gewisser Bruchteil des Elasticitätskoefficienten. lemnach α eine Konstante, die kleiner als eins ist, so können wir die n Verschiebungswinkel α entsprechende Kraft [illegible]

$$f_1 = \alpha e n.$$

Sätze dürfen *wir direkt auf unsere* Pu[illegible]
voraus, dafs zwischen den Punkten [illegible]

trachteten Punkte eine Reihe bilden, ebensolche Kräfte wirken, wie sie früher als elastische Kräfte erkannt haben.

Da nun in unserer Punktreihe die Verschiebung des Punktes ε g δ gemessen nach dem ursprünglichen Abstande der Punkte in der Gl gewichtslage, resp. bei transversaler Bewegung der Verschiebungsw gleich $\frac{\varepsilon b'}{ad}$ ist, so ist die Kraft, mit welcher der Punkt in seine Glei wichtslage in Bezug auf δ gezogen wird, also nach b' hin

$$a \frac{\varepsilon b'}{ad} \cdot e,$$

wenn wir mit e die Elasticität der Punktreihe bezeichnen, und a die angeführte Konstante ist, welche für longitudinale Schwingungen g eins ist.

Die Verschiebung des Punktes ε gegen ζ bewirkt, daſs ε gegen b getrieben wird, gegen die Stelle, in welcher er gegen ζ in seiner G gewichtslage ist; die Gröſse der Kraft, welche in diesem Sinne wirkt,

$$a \frac{\varepsilon b}{ac} \cdot e = a \frac{\varepsilon b}{ad} \cdot e.$$

Diese beiden Kräfte wirken auf den Punkt ε nach gerade entgegenges Richtung, die ihn wirklich bewegende Kraft ist somit die Differenz b somit

$$a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad} \cdot e.$$

Da wir es hier mit molekularen Kräften zu thun haben, welche von külschicht zu Molekülschicht wirken, so wird die Bewegung des Pu ε durch weiter entfernte Punkte nicht beeinfluſst; die soeben abgel bewegende Kraft ist somit die ganze den Punkt ε bewegende Kraft.

Um die durch diese Kraft dem Punkte ε erteilte Beschleun zu erhalten, haben wir nur dieselbe durch die Masse m des bew Punktes ε zu dividieren, wir erhalten dann

$$a \cdot \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad} \cdot \frac{e}{m}.$$

Anstatt der Masse m des einzelnen Punktes oder der einzelnen Mo schicht, zu welcher der Punkt gehört, können wir bequemer die der Längeneinheit der Punktreihe einführen, die wir als die Dichtigke Punktreihe bezeichnen wollen. Die Anzahl der Punkte in der Längen der Reihe ist

$$n = \frac{1}{ad}.$$

Die Dichtigkeit der Punktreihe ist somit

$$n \cdot m = \frac{m}{ad} = d.$$

Führen wir diesen Wert in obigen Ausdruck ein, so wird die Beschleu

$$a \cdot \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad} \cdot \frac{e}{\left(\frac{m}{ad}\right) \cdot ad} = a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad^2} \cdot \frac{e}{d}.$$

Diese Beschleunigung ist diejenige, welche der betrachtete Punkt der Reihe in dem betrachteten Zeitmoment, also zur Zeit t, nachdem die Bewegung in dem Ausgangspunkte derselben begonnen hat, erhält. Dieselbe ist somit gleich $\frac{dv}{dt}$, gleich dem Quotienten aus der in der unendlich kleinen der Zeit t folgenden Zeit dt stattfindenden Änderung der Geschwindigkeit dv und der Zeit dt, es ist also

$$\frac{dv}{dt} = a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad^2} \cdot \frac{e}{d}.$$

Die Differenz $\varepsilon b' - \varepsilon b$ hängt, wie man schon unmittelbar an der Fig. 203 erkennt, ab von der Lage des Punktes ε in der Reihe. Um das auszudrücken, wollen wir den Abstand des betrachteten Punktes von dem Ausgangspunkte der Bewegung mit x bezeichnen und den Abstand ad der einzelnen Punkte mit dx, sei ferner der Abstand εa des betrachteten Punktes ε von seiner Gleichgewichtslage gleich y. Da nun die in einem bestimmten Momente, also zur Zeit t, vorhandene Verschiebung der einzelnen Punkte aus der Gleichgewichtslage abhängig ist von der Lage des Punktes in der Reihe, also von dem Werte von x, so können wir ganz allgemein y als eine Funktion von x bezeichnen, also

$$y = f(x).$$

Der Abstand des vorhergehenden Punktes δ von der Gleichgewichtslage y' ist dann, da dieser Punkt dem Anfangspunkt um dx näher liegt,

$$y' = f(x - dx) = y - dy'.$$

Da man nämlich die Änderung von y, wenn x um dx wächst, mit dem positiven Vorzeichen versieht, so müssen wir die Änderung von y, wenn wir in die Funktion einen um dx kleinern Wert einführen, mit dem negativen Vorzeichen versehen.

Der Abstand des auf ε folgenden Punktes ζ vom Anfangspunkte der Bewegung ist $x + dx$, für den Abstand des Punktes von seiner Gleichgewichtslage $c\zeta = y''$ erhalten wir demnach

$$y'' = f(x + dx) = y + dy''.$$

Da nun $\varepsilon b' = y' - y$, $\varepsilon b = y - y''$, so folgt

$$\varepsilon b' - \varepsilon b = (y - dy - y) - (y - (y + dy'')) = dy'' - dy'.$$

Die Differenz $\varepsilon b' - \varepsilon b$, welcher die Beschleuniguug des betrachteten Punktes proportional ist, ist somit gleich dem Unterschiede zwischen den Veränderungen, welche die $f(x)$, die uns die Abstände y zu einer bestimmten Zeit darstellt, erfährt, wenn der Wert x einmal um dx, das andermal $2\,dx$ gröfser wird. Denn es ist dy' die Änderung, welche y erfährt, wenn wir von δ aus um dx weiter zu ε gehen und dy'' diejenige, wenn wir von ε aus nochmals um dx, also von δ aus um $2\,dx$ zu ζ gehen. Bezeichnen wir diesen Unterschied in den Veränderungen mit d^2y, so wird

$$\frac{dv}{dt} = a \frac{e}{d} \frac{d^2y}{dx^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

wenn wir den Faktor $a \frac{e}{d} = c^2$ setzen.

Die Gröfse dv im Zähler auf der linken Seite der Gleichung ist Änderung der Geschwindigkeit des bewegten Punktes in der auf die Z folgenden unendlich kleinen Zeit dt. Ist v die Geschwindigkeit am E der Zeit t, diejenige am Ende der Zeit $t + dt$ gleich v', so ist

$$dv = v' - v.$$

Zur Zeit t hat nun unser betrachteter Punkt, der durch die Entfernu vom Ausgangspunkte der Bewegung gegeben ist, den Weg y zurückge Wächst die Zeit um dt, so legt er in dieser den Weg dy zurück. Den ist seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{dy}{dt}.$$

Wächst jetzt die Zeit nochmals um dieselbe Gröfse dt, so legt er in d Zeit einen andern Weg dy' zurück, die Geschwindigkeit am Ende der $t + dt$ ist demnach

$$v' = \frac{dy'}{dt},$$

somit ist

$$dv = \frac{dy' - dy}{dt} = \frac{d^2 y}{dt},$$

wenn wir auch hier die Differenz der Wege, welche der betrachtete P in den auf einander folgenden Zeiten dt zurückgelegt, mit $d^2 y$ bezeic Damit wird dann schliefslich unsere Gleichung für die Beschleuni unseres betrachteten Punktes

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Diese letzte Gleichung bestimmt die Beschaffenheit der von un suchten Gleichung, welche uns für jeden Moment und für jede Lage Punktes in der Reihe den Abstand desselben von der Gleichgewicht anzugeben in den Stand setzt. Sie sagt nämlich direkt aus, dafs die U schiede der von einem und demselben Punkte in auf einander folge Zeiten dt durchlaufenen Räume, dividiert durch das Quadrat der Zeit, portional sei dem Unterschiede zwischen den Differenzen der in demse Zeitmomente vorhandenen Abstände der Punkte, welche von dem betracht Punkte um dx und um $2\,dx$ entfernt sind, von der Gleichgewichts dividiert durch das Quadrat von dx. Das heifst aber nichts anders, als die Werte von y, welche ein bestimmter Punkt nach und nach anni in demselben Momente auf einer gewissen Strecke der Punktreihe n einander vorhanden sein müssen. Die Gleichung, welche uns die Lage Punkte gibt, mufs also so beschaffen sein, dafs sie uns für einen gegeb Punkt, also für ein gegebenes x, dieselben Werte von y nach und nach wachsender Zeit liefert, welche sie uns für eine gegebene Zeit für die n einander liegenden Punkte, also für ein wachsendes x, ergibt.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich, dafs die gefundene Gleichung a uns noch keine bestimmte Funktion von x und t liefert, denn nach Entwicklungen der mathematischen Einleitung erkennt man, dafs j Funktion von der Form $y = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ oder $y = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ oder die Summe zweier solcher Funktionen der gefundenen Bed entspricht. Denn bilden wir nach den dort gefundenen

ine beliebige Funktion die in unserer Gleichung stehenden Differential-
uotienten, so besteht immer die gefundene Gleichung, welche Funktion
ir auch wählen. Es müssen deshalb noch weitere Bedingungen gegeben
in, welche die Natur der Funktion feststellen. In unserm Falle sind die-
lben dadurch vorhanden, dafs wir die Bewegung des Ausgangspunktes
er Bewegung kennen, also die Funktion $y = f(t)$ für x gleich Null.
afs diese Bedingung vollkommen genügt, ergibt sich daraus, dafs, wenn
ir für irgend einen Punkt der Reihe y als Funktion von t kennen, uns
er erkannte Zusammenhang zwischen t und x genügt, um sie für jeden
ert von x anzugeben.

Für den Ausgangspunkt der Bewegung, für welche x gleich Null ist,
aben wir eine einfache schwingende Bewegung vorausgesetzt, welche nach
124 gegeben ist durch

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

enn α die Amplitude und T die Schwingungsdauer der Bewegung ist.
araus folgt dann, dafs die Bewegung unserer Punktreihe dargestellt wird durch

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT}\right) + \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)$$

d man erkennt sofort, dass das eine Glied auf der rechten Seite die
sbreitung der Bewegung nach der positiven Seite der x, das andere die-
ige nach der entgegengesetzten Seite darstellt. Für $x = o$ wird die
mme der beiden Glieder der rechten Seite

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Dafs diese Gleichung der für die Beschleunigung abgeleiteten ent-
icht, folgt zunächst, wenn man die beiden in derselben vorkommenden
otienten bildet. Da bei der Berechnung der Differentialquotienten nach t
Veränderliche x als konstant zu betrachten ist, so wird nach E IV

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT}\right) + \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right),$$

l weiter

$$= \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = -\frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{T^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT}\right) - \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{T} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot y.$$

Zur Bildung der Differentialquotienten nach x ist t als konstant zu
achten, deshalb wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{cT} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT}\right) - \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{cT} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)$$

$$= -\frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\ldots}\right) \ldots \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)$$

Ebenso ergibt sich aber auch, dafs nach der Gleichung für y (stände der neben einander liegenden Punkte jene Werte zu einer ge(Zeit haben, welche der einzelne Punkt nach einander durchläuft, d: die hier dargestellte Bewegung jene ist, welche uns die Betrachtun(vorigen Paragraphen lieferten. Da wir zu diesem Nachweis nur d: der einen der beiden Richtungen sich fortpflanzende Bewegung trachten nötig haben, wollen wir zunächst untersuchen, welches der Glieder uns die Fortpflanzung der Bewegung nach der positiven, ' jene nach der negativen Seite gibt.

Die Bewegung irgend eines Punktes der Reihe wird von dem M ab, in welchem sich die Bewegung bis zu ihm ausgebreitet hat, d wie diejenige des Ausgangspunktes der Bewegung. Denn legen wi Gleichung x einen bestimmten Wert, etwa x_1 bei, so wird die Be dieses Punktes dargestellt durch

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t \pm \frac{x_1}{c}}{T} \right),$$

wo für den betrachteten Punkt auf der rechten Seite der Gleich eine Vorzeichen zu nehmen ist, wenn der Punkt auf der positiven, das wenn er auf der negativen Seite des Ausgangspunktes der Bewegu Ist $t \mp \frac{x_1}{c} = 0$, so beginnt der betrachtete Punkt seine Bewegu jedesmal, wenn von da ab t um T gewachsen ist, hat er ein Schwingung vollführt.

Nennen wir nun τ die Zeit, welche nach dem Beginne der Be in deren Ausgangspunkt verstrichen ist, bis die Bewegung zu dem l teten Punkte gelangt ist, so wird die Bewegung des letztern ebe gestellt durch

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t - \tau}{T} \right).$$

Es mufs somit

$$t - \tau = t \mp \frac{x_1}{c}$$

sein, oder

$$t - \tau = t - \frac{(\pm x_1)}{c}.$$

Daraus folgt, dafs wir für ein positives x von den beiden Glie Ausdruckes für y dasjenige wählen müssen, welches x mit dem n Vorzeichen enthält, dafs somit, wenn wir der Einfachheit wegen α setzen, also annehmen würden, in dem Ausgangspunkte der Be hätten wir dem Punkte die Amplitude 2α erteilt,

$$y = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right)$$

die nach der Seite der positiven x sich fortpflanzende Bewegung da

Zu irgend einer Zeit $t = nT$ hat der Ausgang n Schwingungen vollführt, also $n$mal alle Werte

α angenommen. In demselben Momente liefert aber auch in der :treihe auf der Strecke $nx = n \cdot cT$ unsere Gleichung n mal alle Werte :hen $+\alpha$ und $-\alpha$ neben einander. Denn setzen wir $t = nT$, so wird

$$x = -\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{x}{cT},$$

t für

$$\begin{array}{lllll} x = 0 & x = \frac{1}{4} cT & x = \frac{1}{2} cT & x = \frac{3}{4} cT & x = cT \\ y = 0 & y = -\alpha & y = 0 & y = \alpha & y = 0 \end{array}$$

f. Die Reihe zeigt also das neben einander, was der Ausgangspunkt Bewegung nach einander zeigt, mit dem Unterschiede nur, dafs die litude der Schwingungen nur die Hälfte ist, weil die Bewegung des :angspunktes sich nach beiden Seiten der Reihe mitteilt.

Die Strecke $x = cT$ ist jene, welche wir im vorigen Paragraphen als Wellenlänge der sich fortpflanzenden Bewegung bezeichneten, über ıe hin die Bewegung sich jedesmal fortpflanzt, wenn der Ausgangst eine Schwingung vollführt. Die Gleichung zeigt, entsprechend den ricklungen des vorigen Paragraphen, dafs die Wellenlänge in zwei ruente Hälften zerfällt, Wellenberg und Wellenthal, denn zwischen 0 und $x = \frac{1}{2} cT$ sind alle Werte von y negativ, die Punkte befinden an der einen Seite der Gleichgewichtslage, zwischen $x = \frac{1}{2} cT$ und cT sind alle Werte positiv. Dasselbe wiederholt sich in der ganzen ɜ, überall sind die Werte zwischen $x = 2m \frac{cT}{2}$ und $(2m+1) \frac{cT}{2}$:iv und zwischen $(2m+1) \frac{cT}{2}$ und $(2m+2) \frac{cT}{2}$ positiv. Der Beıng von cT als einer Wellenlänge entsprechend, wollen wir

$$cT = \lambda$$

ı.

Alle um irgend ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ vom Anfangspunkte der Beng entfernten Punkte befinden sich in der Gleichgewichtslage, sie beı sich aber in entgegengesetzter Phase der Bewegung, denn ihre Geindigkeiten sind einander gleich, aber entgegengesetzt. Wir erhalten łeschwindigkeiten in dem Quotienten

$$v = \frac{dy}{dt} = \alpha \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Setzen wir $t = nT$ und $x = m\lambda$, so wird

$$v = \frac{dy}{dt} = \alpha \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi (n - m$$

n wir dagegen $x = (2m +$

$$v = \alpha \frac{2\pi}{T} c$$

Ebenso wie für diese Punkte können wir für alle übrigen der Re
und ebenso für jeden Moment aus dieser Gleichung Gröfse und Richtu
der Geschwindigkeit ableiten, so dafs also unsere Gleichung für y die
wegung der Punktreihe in allen ihren Einzelheiten bestimmt.

§ 127.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung. Uns
Entwicklung liefert uns weiter die Geschwindigkeit, mit welcher sich
Bewegung in der Punktreihe ausbreitet. Wie wir schon vorhin bemerkten,

$$\tau = \frac{x}{c}$$

die Zeit, während welcher sich die Bewegung durch die Strecke x fo
pflanzt. Die in unserer Gleichung vorkommende Gröfse c

$$c = \sqrt{a\,\frac{e}{d}}$$

ist somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung hä
somit nicht von der Schwingungsdauer derselben, sondern nur von der
schaffenheit der Punktreihe, deren Elasticität und Dichtigkeit, sowie
der Richtung der Schwingungen, ob longitudinal oder transversal ab; d
für longitudinale Schwingungen ist $a = 1$, für transversale $a < 1$.
Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist somit in einer Punktreihe überall diese
so lange der Quotient aus Elasticität und Dichtigkeit nicht geändert ist.

Wir machen jedoch darauf aufmerksam, dafs dieser Schlufs nur un
der ausdrücklichen Voraussetzung richtig ist, dafs die Amplituden der
wegung klein sind gegen die Wellenlänge, wenigstens dann, wenn
Schwingungen transversale sind. Sind die Amplituden nicht klein, so kön
wir die bei transversalen Schwingungen geweckte Elasticität nicht einf
der Verschiebung der Punkte proportional setzen, es tritt dann die Dehn
der Punktreihe hinzu. In dem Falle hängt die Fortpflanzungsgeschwin
keit von der Wellenlänge ab. Wir werden im zweiten Bande auf d
Frage zurückkommen, wo wir auch Medien eigentümlicher Beschaffen
kennen lernen werden, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von
Wellenlänge abhängig ist, auch für Wellen, welche gegen die Amplitu
grofs sind.

Aus der Beziehung zwischen Wellenlänge und Schwingungsdauer

$$\lambda = c \cdot T$$

erhalten wir weiter auch für die Schwingungsdauer

$$T = \frac{\lambda}{c} = \lambda \sqrt{\frac{d}{ae}},$$

ein Ausdruck, der uns die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von
Wellenlänge und der Beschaffenheit der Punktreihe liefert. Gleichz
erkennen wir, dafs zur experimentellen Bestimmung der Fortpflanzu
geschwindigkeit es nur der Messung der Wellenlängen und der Schwingu
dauer bedarf.

§ 128.

Zusammensetzung mehrerer Bewegungen; Interferenz. Werden gleich an verschiedenen Punkten einer Reihe schwingende Bewegungen eugt, so pflanzen sich dieselben von jeder Erregungsstelle aus in der nktreihe fort; es fragt sich nun, wie wird die Bewegung derjenigen nkte beschaffen sein, welche von mehreren Bewegungen afficiert werden. ler dieser Punkte, an welchem z. B. zwei Bewegungen zugleich ankommen, ährt dann zwei Impulse, es mufs somit auch seine Bewegung durch beide pulse bestimmt werden.

Das Resultat dieses Zusammenwirkens ergibt sich aus dem Grundze der Mechanik, dafs wenn zwei Kräfte einen Punkt ergreifen, dafs m jede so wirkt, wie wenn sie allein vorhanden wäre. Wirken beide äfte in derselben Richtung, so summieren sie sich einfach, die Beleunigung des Punktes ist in jedem Momente gleich der Summe der schleunigungen, ebenso sind die Geschwindigkeiten und die durchlaufenen ume gleich der Summe der einzelnen Geschwindigkeiten und der mit selben durchlaufenen Räume. Wirken die Kräfte in verschiedenen htungen, so erhalten wir die resultierenden Beschleunigungen, Gewindigkeiten und durchlaufenen Räume nach dem Satze vom Kräfteallelogramm.

Gerade so müssen wir bei den schwingenden Bewegungen verfahren, die resultierende Bewegung zu erhalten. Setzen wir zunächst voraus, Bewegungen seien alle gleichgerichtet, so wird die Beschleunigung, lche ein Punkt zur Zeit t erhält, gleich der Summe aller einzelnen Beleunigungen, es ist deshalb auch die Geschwindigkeit des Punktes gleich algebraischen Summe aller Geschwindigkeiten, welche ihm infolge jeder zelnen ankommenden Bewegung erteilt wird. Entgegengesetzt gerichtete wegungen sind bei dieser Summe mit entgegengesetzten Vorzeichen zu men.

Daraus folgt schliefslich, dafs wenn ein Punkt zur Zeit t infolge der zelnen ankommenden Bewegungen die Abstände $y_1, y_2, y_3 \cdot \cdot$ von der ichgewichtslage haben würde, sein Abstand Y gleich der Summe aller zelabstände sein mufs, oder es ist

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$$

Damit sind wir sofort imstande für den Fall gleichgerichteter Begungen die resultierende Bewegung anzugeben. Wir betrachten zunächst wegungen gleicher Schwingungsdauer, und nehmen an, dafs in einer ktreihe zwei Bewegungen zu gleicher Zeit beginnen, deren Anfangskt um d von einander entfernt sei, und die sich nach gleichen Richgen in der Reihe fortpflanzen.

Es sei der Abstand irgend eines Punktes vom Ursprung der ersten Begung x, für diesen ist dann die Entfernung von der Gleichgewichtslage Zeit t

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Der Abstand des betrachteten Punktes von dem Ausgangspunkte d
zweiten Bewegung ist dann, wenn wir annehmen, derselbe wäre um d wei
von dem betrachteten Punkte entfernt, $x + d$. Ist α' die Amplitude d
zweiten Bewegung, so wird die Entfernung des betrachteten Punktes v
der Gleichgewichtslage, wenn nur diese Bewegung zu ihm käme,

$$y_1 = \alpha' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right).$$

Der resultierende Abstand Y ist die Summe beider, oder

$$Y = y + y_1 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right);$$

oder auch

$$Y = \left(\alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}\right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \alpha' \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\lambda} - \right.$$

Bestimmen wir nun zwei Größen A und D so, daß

$$A \cdot \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} = \alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

$$A \cdot \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \alpha' \sin 2\pi \frac{d}{\lambda},$$

so wird der Ausdruck für Y gleich

$$Y = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+D}{\lambda}\right),$$

und man erkennt, daß die resultierende Bewegung eine schwingende
wegung von gleicher Schwingungsdauer und gleicher Wellenlänge λ
welche die einzelnen Bewegungen besaßen. Die Amplitude der schwing
den Bewegung ist gleich A; die Phase derselben ist gegen die erste
beiden um D, gegen die zweite um $d - D$ verschoben, das heißt, diese
findet so statt, als wenn ihr Ausgangspunkt von dem betrachteten Pun
um die Strecke D weiter entfernt wäre, als der Ausgangspunkt der ers
Bewegung.

Die Amplitude A ergibt sich aus den beiden Gleichungen, welche
und D bestimmen, indem wir beide Gleichungen quadrieren und addiere

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda},$$

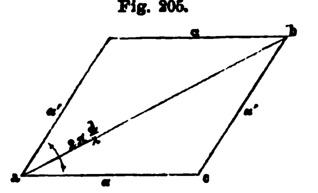
und für D erhalten wir

$$\tang 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha' \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}}{\alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}},$$

oder auch

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{A} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}.$$

Gleichung für A zeigt, daſs die resultierende Amplitude die Diagonale es Parallelogrammes ist, welches wir aus den einzelnen Amplituden α l α' mit dem Winkel $2\pi\frac{d}{\lambda}$ (Fig. 205) konlieren, und zwar jene Diagonale, welche den α und α' eingeschlossenen Winkel $2\pi\frac{d}{\lambda}$ t. Denn es ist


Fig. 205.

$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' \cos c$$

da der Winkel c Nebenwinkel von $a = 2\pi\frac{d}{\lambda}$ ist, so folgt

$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi\frac{d}{\lambda} = A^2.$$

ner ist in diesem Parallelogramm der Winkel, den ab und α einiefsen, der die Phase bestimmende Winkel $2\pi\frac{D}{\lambda}$, denn es ist

$$ab : \alpha' = \sin c : \sin bac$$

$$\sin bac = \frac{\alpha'}{ab} \cdot \sin c = \frac{\alpha'}{A} \sin 2\pi\frac{d}{\lambda} = \sin 2\pi\frac{D}{\lambda}.$$

Die resultierende Amplitude sowohl als die Phase der resultierenden regung sind hiernach abhängig von den Amplituden und der Phasenrenz der gegebenen Bewegungen. Ist die Phasendifferenz d eine beige Zahl von ganzen Wellenlängen, so ist

$$\cos 2\pi\frac{d}{\lambda} = \cos 2n\pi = 1$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha'; \quad A = \alpha + \alpha'$$

$$\sin 2\pi\frac{D}{\lambda} = \sin 2n\pi = 0; \quad D = 0.$$

also die Phasendifferenz der gegebenen Bewegungen Null oder ein beiges Vielfaches einer Wellenlänge, so ist die resultierende Amplitude ich der Summe der Teilamplituden, und die Phase der resultierenden wegung ist dieselbe wie diejenige der Teilbewegungen. Man erkennt die twendigkeit dieser Folgerung auch leicht aus der Natur der schwingen- Bewegung, denn in dem Falle wirken beide Bewegungen immer in selben Weise zusammen, da die Punkte, deren Entfernung von einander Wellenlänge ist, immer in der gleichen Phase der Bewegung sich nden.

Ist $d = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$, so ist

$$\cos 2\pi\frac{d}{\lambda} = \cos(2n + 1) = -1$$

$$\sin 2\pi\frac{d}{\lambda} = 0,$$

it

$$A = \alpha - \alpha' \quad D = 0$$

die resultierende Amplitude ist die Differenz der Teilamplituden, die Phase ist, wenn $\alpha > \alpha'$, jene der ersten, wenn $\alpha < \alpha'$ jene der zweiten Bewegung. Denn die Gleichung der resultierenden Bewegung wird

$$Y = (\alpha - \alpha') \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

die Werte von Y bekommen also entgegengesetztes Vorzeichen, je nachdem $\alpha > \alpha'$ oder $\alpha < \alpha'$. Zu gleichen Zeiten t vorhandene entgegengesetzte Werte von Y bedeuten aber entgegengesetzte Phasen oder eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge.

Sind α und α' einander gleich, so wird $A = 0$, die Bewegung hebt sich also auf der ganzen Strecke, auf welcher beide Bewegungen zusammenwirken, auf. In der That erfahren dann alle Punkte zu gleichen Zeiten t stets entgegengesetzte an Gröfse gleiche Impulse.

Ist $d = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$, so ist

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin (2n + 1) \frac{\pi}{2} = 1$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 \text{ tang}; \quad 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Das Quadrat der resultierenden Amplitude ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Amplituden und die Tangente des Winkels, welche die Phase der resultierenden Bewegung bestimmt, ist gleich dem Quotienten der beiden einzelnen Amplituden, wobei im Zähler jene steht, welche gegen die erste Bewegung von deren Ausgangspunkt die Abstände x gerechnet sind, um eine ungerade Anzahl von ein viertel Wellenlängen verschoben ist.

An diesen Beispielen ist die Abhängigkeit der resultierenden Amplitude und Phase von den sie bestimmenden Umständen hinreichend deutlich zu erkennen.

Es möge nur noch bemerkt werden, dafs der letzte Satz über die resultierende Amplitude und Phase, wenn die einzelnen Bewegungen die Phasendifferenz von $\frac{1}{4}\lambda$ besitzen, uns unmittelbar in den Stand setzt, die resultierende Amplitude und Phase einer beliebigen Anzahl von schwingenden Bewegungen zu bestimmen, wenn wir die einzelnen Amplituden und Phasen kennen.

Haben wir nämlich eine Anzahl Bewegungen, deren erste ist

$$y_1 = \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

deren andere die Amplituden $\alpha_2, \alpha_3 \cdots$ haben und deren Anfangspunkte von dem der ersten um $d_2, d_3 \cdots$ entfernt sind, so sind deren Gleichungen

$$y_2 = \alpha_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_2}{\lambda}\right)$$

$$y_3 = \alpha_3 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_3}{\lambda}\right)$$

$$y_n = \alpha_n \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_n}{\lambda}\right).$$

Die resultierende Bewegung ist dann

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots y_n =$$

$$\left\{\alpha_1 + \alpha_2 \cos 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \cos 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \cdots \alpha_n \cos 2\pi \frac{d_n}{\lambda}\right\} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) -$$

$$\left\{\alpha_2 \sin 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \sin 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \cdots \alpha_n \sin 2\pi \frac{d_n}{\lambda}\right\} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Nun ist

$$-\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right),$$

sodafs die abgeleitete Gleichung für Y uns zeigt, dafs wir die durch das Zusammenwirken beliebig vieler schwingender Bewegungen entstehende Resultierende als die Resultierende zweier Wellen darstellen können, welche die Phasendifferenz einer viertel Wellenlänge haben, und deren Amplituden sind

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 \cos 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \cos 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \cdots \alpha_n \cos 2\pi \frac{d_n}{\lambda}$$

$$B = \quad \alpha_2 \sin 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \sin 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \cdots \alpha_n \sin 2\pi \frac{d_n}{\lambda}.$$

Für die resultierende Amplitude und Phase erhalten wir dann

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \operatorname{tang} 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{B}{A}.$$

Wir erhalten also stets eine schwingende Bewegung, welche mit jener der einzelnen gleiche Schwingungsdauer, somit auch gleiche Wellenlänge hat, deren Amplitude R und Phase D wir berechnen können, wenn wir die Werte von $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$ sowie von $d_2, d_3 \cdots$ kennen. Die resultierende Bewegung ist dann gegeben durch die Gleichung

$$Y = R \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + D}{\lambda}\right).$$

§ 129.

Interferenz von Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen; Bildung stehender Wellen. Wenn in einer unbegrenzten Punktreihe an einer Stelle eine schwingende Bewegung erregt wird, so pflanzt dieselbe sich nach beiden Seiten fort. Wenn deshalb an zwei Stellen der Ausgangspunkt einer solchen Bewegung vorhanden ist, so pflanzen sich zwischen diesen beiden Stellen die Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen fort. Die im vorigen Paragraphen entwickelten Interferenzgesetze geben uns auch für diesen Fall die resultierende Bewegung als Summe der in jedem Augenblicke vorhandenen Teilbewegung. Es ergibt sich daraus in gewissen Fällen eine Bewegung dieser Strecke der Punktreihe von besonderer Art, deren Beschaffenheit wir hier ableiten wollen, da wir sie später sehr oft zu betrachten haben. Wir nehmen deshalb hier nur den einfachsten Fall.

Es seien c und c' zwei um a von einander entfernte Punkte, in den gleichzeitig eine schwingende Bewegung derselben Schwingungsdauer somit auch derselben Well länge λ und der gleichen Amp tude α beginne. Zur Zeit t w der Abstand eines von c um entfernten Punktes p von der Gleichgewichtslage gegeben durch

Fig. 206.

$$y_1 = \alpha \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Infolge der von c' nach p kommenden Bewegung wird der Abstand Punktes von der Gleichgewichtslage, y_2, gegeben sein durch

$$y_2 = \alpha \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right),$$

wenn wir den Abstand $pc' = x'$ setzen. Für alle Punkte zwischen c u ist nun

$$x + x' = a, \quad x' = a - x,$$

somit

$$y_2 = \alpha \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a-x}{\lambda}\right).$$

Der resultierende Abstand ist somit

$$y = y_1 + y_2 = \alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a-x}{\lambda}\right)$$

Nach der bekannten trigonometrischen Formel

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q)$$

können wir schreiben

$$y = 2\alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda}\right) \cdot \cos \pi \frac{a-2x}{\lambda}$$

oder auch, da das Vorzeichen des Cosinus nicht mit demjenigen des B sich ändert,

$$y = 2 \cos \pi \frac{2x-a}{\lambda} \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda}\right).$$

In diesem Ausdrucke für y ist x nicht mehr in der frühern Weise verbunden; es hängt deshalb die Phase der Bewegung nicht mehr, wi der nach einer Richtung fortschreitenden Bewegung von der Lage der Pu in der Reihe ab. Die für die verschiedenen Punkte zu verschiedenen Z vorhandenen Bewegungszustände hängen von dem die Zeit enthalte Faktor in der Gleichung für y ab, dieser ist aber für alle Werte von x gleiche. Die neben einander liegenden Punkte der Reihe nehmen also nach und nach dieselbe Phase an, sondern ihre Phase ist in derselben dieselbe, sie passieren alle zu derselben Zeit die Gleichgewichtslage un finden sich ebenso alle gleichzeitig an dem Ende ihrer Bahn.

Der Koefficient

$$2\alpha \cdot \cos \pi \frac{2x-a}{\lambda}$$

bestimmt die Amplitude der Bewegung; er zeigt, dafs diese für die verschiedenen Punkte sehr verschieden sein kann. Für gewisse Werte von x ist dieser Koefficient gleich Null, diese Punkte verlassen also ihre Gleichgewichtslage niemals. An der einen Seite der ruhenden Punkte ist der Wert dieses Faktors positiv, an der andern negativ; die ruhenden Punkte bilden also die Grenze zwischen solchen Strecken der Punktreihe, in deren einer die Punkte alle an der einen, in deren anderer die Punkte an der andern Seite der Gleichgewichtslage sich befinden. Die Punkte jeder zwischen zwei ruhenden Punkten liegenden Strecke sind also immer in derselben Phase, die Punkte zweier benachbarter Strecken in entgegengesetzter Phase. Die Punkte einer Strecke vollführen somit gleichzeitig und in gleicher Phase ihre Schwingungen mit um so kleinerer Amplitude, je näher sie den ruhenden Punkten liegen. Man nennt deshalb die schwingende Bewegung eine stehende und die zwischen zwei ruhenden Punkten enthaltene Strecke eine stehende Welle.

Um den Zustand der Reihe näher zu untersuchen, nehmen wir an, es sei

$$a = n\lambda.$$

Es wird dann

$$y = 2\alpha \cos \pi \left(\frac{2x}{\lambda} - n\right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{n}{2}\right)$$

oder

$$y = 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Für die Zeiten $t = nT$ und ebenso für die Zeiten $t = (2n + 1)\frac{T}{2}$ wird dieser Ausdruck für alle Punkte gleich Null, es passieren also die Punkte in diesem Momente die Gleichgewichtslage. Die Geschwindigkeit der Bewegung ist

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

somit für den Moment $t = nT$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda};$$

dieselbe ist für alle Punkte, die zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\lambda}{4}$ liegen, positiv, zwischen $x = \frac{\lambda}{4}$ und $x = 3\frac{\lambda}{4}$ negativ, zwischen $x = 3\frac{\lambda}{4}$ und $x = 5\frac{\lambda}{4}$ positiv u. s. f. Auf der ersten Strecke bewegen sich die Punkte nach der einen, auf der zweiten nach der andern Seite; für die Punkte $x = \frac{\lambda}{4}$, $3\frac{\lambda}{4}$, $5\frac{\lambda}{4} \cdots$; die um eine halbe Wellenlänge von einander entfernt sind, ist die Geschwindigkeit gleich 0, sie verlassen die Gleichgewichtslage nicht. Es sind dies somit die stets ruhenden Punkte, deren Abstand von einander demnach eine halbe Wellenlänge ist.

Wächst die Zeit t, so entfernen sich alle Punkte von der Gleichgewichtslage und sie haben zur Zeit $t = (4n + 1)\frac{T}{4}$ den gröfsten Abstand

von der Gleichgewichtslage erreicht. Für diese Zeit ist

$$y = 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda},$$

somit für

$$x = \quad 0, \quad \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{\lambda}{2}, \quad 3\frac{\lambda}{4}, \quad 4\frac{\lambda}{4}, \quad 5\frac{\lambda}{4} \cdots\cdot$$

$$y = 2\alpha, \quad 0, -2\alpha, \qquad 0, +2\alpha, \qquad 0 \cdots\cdot$$

Also auch hier sehen wir wieder, dafs die Länge einer stehenden Welle eine halbe Wellenlänge ist.

Wächst die Zeit, so kehren alle Punkte zur Gleichgewichtslage zurück, erreichen sie zur Zeit $(2n+1)\frac{T}{2}$, überschreiten sie nach der andern Seite hin und erreichen dort ihre äufserste Lage zur Zeit $t = (4n+3)\frac{T}{4}$, denn dann ist

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = \sin (4n+3)\frac{\pi}{2} = -1.$$

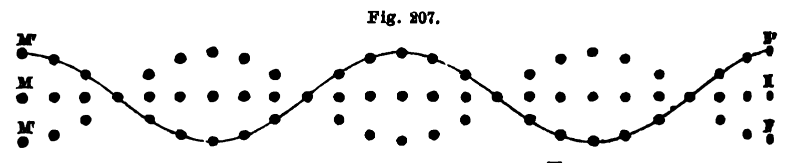
Die Abstände y werden somit für

$$x = \qquad 0, \quad \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{\lambda}{2}, \quad 3\frac{\lambda}{4}, \qquad \lambda, \quad 5\frac{\lambda}{4} \cdots\cdot$$

$$y = -2\alpha, \quad 0, \quad 2\alpha, \qquad 0, -2\alpha, \qquad 0 \cdots\cdot$$

Die Punkte der Reihe, welche sich immerfort in der Gleichgewichtslage befinden, nennt man die Schwingungsknoten, und es ist ersichtlich, dafs diese deshalb immer in Ruhe sind, weil stets gleichzeitig durch sie nach entgegengesetzten Richtungen ein Wellenberg und ein Wellenthal hindurchgeht. Die mitten zwischen den Schwingungsknoten liegenden Punkte sind Schwingungsmaxima, dort treffen immer gleichzeitig zwei Wellenberge oder Thäler zusammen. Die Gestalt der Punktreihe ist demnach (Fig. 207) zur Zeit $t = 2n\frac{T}{2}$

Fig. 207.



eine gerade Linie MN, zur Zeit $t = (4n+1)\frac{T}{4}$, wenn wir annehmen, dafs die Bewegung eine transversale sei, die punktierte Wellenlinie $M'N'$, zur Zeit $(2n+1)\frac{T}{2}$ wieder die gerade Linie MN, und zur Zeit $t = (4n+3)\frac{T}{4}$ die ausgezogene Wellenlinie $M''N''$.

Durch die Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung fortschreitender Wellenbewegungen teilt sich somit die Punktreihe in lauter Strecken von der Länge einer halben Wellenlänge, in deren jeder alle Punkte in derselben Phase der Oscillation sind, von denen aber die Punkte der abwechselnden Strecken in entgegengesetzter Phase der Bewegung sich befinden. Die Schwingungsdauer einer solchen stehenden Schwingung ist gleich der Oscillationsdauer der beiden Wellenbewegungen, deren Resultierende die stehende Schwingung darstellt.

§ 130.

Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen, deren Schwinagen nicht gleich gerichtet sind; elliptische Schwingungen. Wir ›en im Bisherigen den besondern Fall der Zusammensetzung der Wellenvegungen betrachtet, in dem die Vibrationen alle gleich gerichtet sind. können nun ebenso gut in einer Punktreihe sich zwei Bewegungen tpflanzen, deren Richtungen nicht zusammenfallen, eine Wellenbewegung ıgitudinaler Schwingungen und eine transversalér Schwingungen, oder ei zur Fortpflanzungsrichtung der Bewegung senkrechte Schwingungen, lche jedoch irgend einen Winkel mit einander bilden.

Wie wir im § 128 sahen, erhalten wir in diesem Falle die aus dem sammenwirken der beiden Bewegungen resultierende Kraft durch den tz vom Parallelogramm der Kräfte; in jedem Augenblicke wird uns die agonale des aus den beschleunigenden Kräften der Teilbewegungen konuierten Parallelogramms der Gröfse und Richtung nach die resultierende aft geben und somit die Geschwindigkeit und die Bahn des bewegten nktes.

Nehmen wir an, dafs die beiden Wellenbewegungen gleiche Oscillansdauer und somit gleiche Wellenlängen besitzen, so mufs die resulrende Bewegung ebenfalls die gleiche Oscillationsdauer haben; die Bahn, lche die Punkte beschreiben, kann aber weder mit der einen noch mit r andern Bewegung zusammenfallen, sie mufs jedoch notwendig in diebe Ebene fallen, welche durch die Richtung der Bewegungen in den ızelnen Wellen gelegt wird. Um die Gestalt der Bahn zu erhalten, wird am bequemsten sein, von dem mathematischen Ausdrucke für die Begung des Punktes infolge jeder einzelnen Bewegung auszugehen und das ıaltene Resultat dann näher zu betrachten.

Zugleich ist klar, dafs wir die Bahn nur eines Punktes zu bestimmen ben, und dafs diejenigen aller übrigen Punkte der Reihe damit übereinmmen. Denn da der Voraussetzung nach jede der Teilbewegungen sich t gleicher Geschwindigkeit in der Punktreihe fortpflanzt, so sind die hnen aller Punkte dieselben.

Nennen wir den Abstand eines Punktes der Reihe, welcher vom Anıgspunkte der Bewegung um x entfernt ist, von seiner Gleichgewichts-ge zur Zeit t, y, so haben wir

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1).$$

Infolge der zweiten Bewegung, wenn sie allein wirkte, würde der nkt in einer andern Richtung sich von der Gleichgewichtslage entfernen, der Abstand von der Gleichgewichtslage zur Zeit t gleich z; nehmen r ferner an, der Anfangspunkt dieser Bewegung sei von dem der ersten ı a entfernt, die Bewegung habe aber auch dort im Anfange der Zeit t gonnen, so haben wir für z den Ausdruck

$$z = \beta \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-a}{\lambda}\right) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Entwickeln wir aus diesen beiden Ausdrücken für ı z eine Gleichung zwischen y und z, so gibt uns die

gehörigen Abstände in der einen und in der andern Richtung, oder den Ort des Punktes in jedem Augenblicke, wenn wir den Abstand des Punktes nach der einen Richtung aus einer der obigen Gleichungen bestimmen. Diese Gleichung gibt uns somit die Bahn des bewegten Punktes.

Aus den beiden obigen Gleichungen erhalten wir unmittelbar die beiden folgenden

$$\frac{y}{\alpha} = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$\frac{z}{\beta} = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} + \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\sin 2\pi\frac{a}{\lambda} \cdot (4)$$

Multiplicieren wir die Gleichung (3) mit $\cos 2\pi\frac{a}{\lambda}$, so wird

$$\frac{y}{\alpha}\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} \quad \ldots \ldots (5)$$

und subtrahieren wir jetzt die Gleichung (5) von (4), so erhalten wir

$$\frac{z}{\beta} - \frac{y}{\alpha}\cdot\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} = \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\sin 2\pi\frac{a}{\lambda} \quad \ldots (6)$$

Quadrieren wir die Gleichung (6) und addieren zugleich

$$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 \sin^2 2\pi\frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\sin^2 2\pi\frac{a}{\lambda},$$

so erhalten wir

$$\left(\frac{z}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2\left\{\sin^2 2\pi\frac{a}{\lambda} + \cos^2 2\pi\frac{a}{\lambda}\right\} - 2\frac{z}{\beta}\cdot\frac{y}{\alpha}\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} =$$

$$= \sin^2 2\pi\frac{a}{\lambda}\left\{\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \cos^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right\}.$$

oder

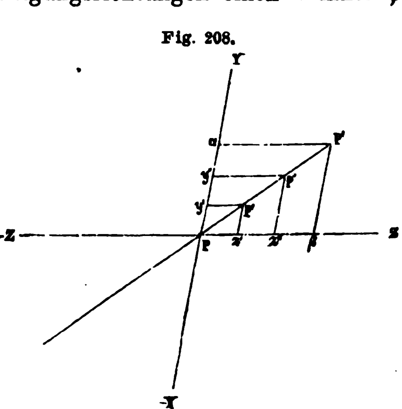
$$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 - 2\frac{y}{\alpha}\cdot\frac{z}{\beta}\cos 2\pi\frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi\frac{a}{\lambda} \cdot \ldots (7)$$

Die Gleichung (7) gibt uns den Abstand des Punktes von der Gleichgewichtslage parallel der Richtung der ersten Bewegung für jeden Wert, den der Abstand des Punktes parallel der zweiten Bewegung erhalten kann. Die analytische Geometrie zeigt, dafs alle Punkte, deren zusammengehörige Abstände parallel zweien festen Richtungen, von einem festen Punkte durch die Gleichung (7) dargestellt werden, auf einer bestimmten krummen Linie, der Ellipse liegen, deren Mittelpunkt eben jener feste Punkt ist, von welchem die Abstände y und z gerechnet sind. Wenn sich zwei Wellenbewegungen in einer Punktreihe fortpflanzen, in denen die Schwingungen verschieden gerichtet sind, so bewegen sich demnach die Punkte in Ellipsen um ihre Gleichgewichtslage.

In unseren Ausdruck (7) für die Bahn der Punkte geht auch die Phasendifferenz ein, und je nach dem verschiedenen Werte von a kann die Beziehung zwischen y und z immer eine andere werden; man erhält je nach

erte von a für ein bestimmtes z einen immer andern Wert von y. rfüllen alle diese Werte die Bedingung, dafs sie einer Gleichung r Form (7) genügen, die Bahnen der Punkte sind daher immer ı, aber die Lage und Gestalt der Ellipsen ist je nach dem Werte eine andere. Untersuchen wir die Gestalt der Ellipsen für einige von a.

ıtzen wir voraus, dafs die Schwingungsrichtungen einen Winkel φ ıander bilden, und dafs die ıg der positiven Abstände z)8) des Punktes P, der um x m Anfangspunkte der Bewe- ıtfernt ist, von der Ruhelage, echts hin, und die Richtung itiven y nach oben gerechnet d. h. dafs die Bewegung in : Phase in beiden Teilbewe- ist, wenn der Punkt sich zu- ıach rechts und oben, in ent- esetzter, wenn er sich zu- ıach rechts und unten bewegt. : Phasendifferenz der beiden ıierenden Bewegungen gleich 0, ıer geraden Anzahl von halben Wellenlängen, so ist



$$\cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = 1; \quad \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0,$$

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{2yz}{\alpha\beta} + \frac{z^2}{\beta^2} = 0,$$

$$\frac{y}{\alpha} - \frac{z}{\beta} = 0,$$

$$\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

ı diesem Falle stehen also stets die zusammengehörigen Werte von z in dem konstanten Verhältnisse der Amplituden $\alpha : \beta$. Bestimmen nnach die den Zeiten t', t'', T entsprechenden Abstände z', z'', β und von z', z'', β mit Py parallel $z'p'$, $z''p''$, $\beta P'$ so, dafs

$$z'p' : z'P = z''p'' : z''P = \beta P' : \beta P = \alpha : \beta,$$

l die Längen $z'p'$, $z''p''$ etc. die zu diesen Werten von z gehörigen von y, und die Punkte p', p'', P gehören der Bahn des Punktes ıs der Lehre von der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt aber, dafs die P, p', p'', P' auf einer geraden Linie liegen; die Bahn des Punktes nnach eine gerade Linie, welche durch die Gleichgewichtslage des s P geht, deren Richtung zwischen die Richtungen der Teilbe- ;en fällt.

ür die Amplitude PP' der resultierenden Bewegung erhalten wir em Satze vom Parallelogramm der Kräfte

$$PP' = \sqrt{P\beta^2 + P'\beta^2 - 2P\beta \cdot P'\beta \cdot \cos P\beta P'},$$

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cdot \cos\varphi};$$

für den Winkel, welchen die Bahn des Punktes mit z bildet, wenn wir ihn mit ψ bezeichnen, erhalten wir aus der Proportion

$$PP' : P'\beta = \sin P\beta P' : \sin P'P\beta,$$

$$\sin \psi = \frac{\alpha}{A} \cdot \sin \varphi.$$

Gröfse und Richtung der resultierenden Amplitude hängt somit von der Gröfse der Teilamplituden ab und von dem Winkel, welchen die Teilbewegungen mit einander bilden. Die resultierende Amplitude erhält den gröfsten Wert für $\varphi = 0$

$$A = \alpha + \beta.$$

Die Bewegungsrichtung aller drei Bewegungen ist dieselbe, und die resultierende Amplitude ist die Summe der Teilamplituden.

Wir hätten in diesem Falle, um die Bahn des Punktes zu erkennen, nicht nötig gehabt, die Gleichung (7) zu entwickeln, da dieses Resultat sich unmittelbar aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt, denn ist $a = 0$, oder $2n \cdot \frac{\lambda}{2}$, so wird

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

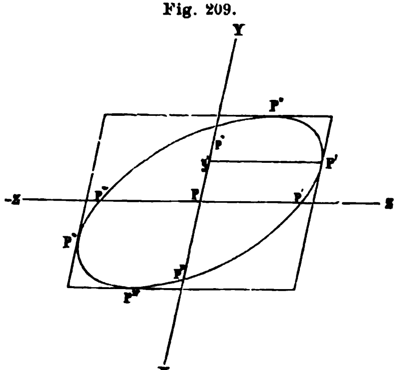
$$z = \beta \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

und daraus

$$\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ist die Phasendifferenz nicht gleich Null, oder ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, so wird die Bahn des Punktes eine Ellipse. Die Bewegungen beginnen dann zu verschiedenen Zeiten, und wachsen nicht wie im vorigen Falle gleichmäfsig; bald nimmt y rascher, bald z rascher zu, ja es kann y selbst abnehmen, wenn z wächst. Ist a kleiner als $\frac{1}{4}\lambda$, so hat (Fig. 209) der Punkt P bereits einen Teil seines Weges in der Richtung der z zurückgelegt, wenn die Bewegung nach y beginnt, er befindet sich in p', denn ist $y = 0$,

Fig. 209.



so gibt Gleichung (2) oder Gleichung (7)

$$z = \beta \cdot \sin 2\pi \frac{a}{\lambda}$$

und ist a z. B. $= \frac{3}{16}\lambda$, so wird

$$z = \beta \cdot \sin 67^0{,}5 = 0{,}923\ \beta.$$

Während jetzt der Punkt in der Richtung nach z den letzten Teil seines Weges zurücklegt, bewegt er sich aber schon in der Richtung y, er

:hreibt daher den Weg $p'P'$. Er ist in P' angekommen, hat also in der
htung z seinen gröfsten Abstand erreicht, wenn nach Gleichung (7)

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + 1 - 2\frac{y}{\alpha} \cdot \cos 2\pi\frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi\frac{a}{\lambda},$$

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - 2\frac{y}{\alpha} \cdot \cos 2\pi\frac{a}{\lambda} + \cos^2 2\pi\frac{a}{\lambda} = 0,$$

$$y = y' = \alpha \cdot \cos 2\pi\frac{a}{\lambda},$$

o bei dem von uns angenommenen Werte $a = \frac{3}{16}\lambda$, $y = \alpha \cdot \cos 67^0{,}5$,
ır gleich $0{,}382\,\alpha$ ist. Während dann der Punkt in der Richtung der y
h weiter von der Gleichgewichtslage entfernt, kehrt er in der Richtung z
ıon wieder zurück, er beschreibt den Weg $P'P''$ und ist in P'' angelangt,
$y = \alpha$ wird, wenn sich der Punkt in der Richtung der z schon wieder
auf

$$z = \beta \cdot \cos 2\pi\frac{a}{\lambda} = 0{,}382\,\beta$$

m Anfangspunkte genähert hat.

Von da ab nehmen y und z gleichzeitig ab, z aber, da der Punkt in
ıser Richtung der Ruhelage näher ist, rascher als y; der Punkt bewegt
h, bis $z = 0$ wird, nach p'', wo $y = 0{,}923\,\alpha$ ist. Weiter bewegt sich
r Punkt dann in der Richtung der z nach der negativen Seite bis p''',
ihrend der Abstand y bis zur 0 abnimmt u. s. f., so dafs der Punkt sich
er p''', P''', P^{IV}, p^{IV} wieder nach p' bewegt, wenn y wieder gleich 0
worden ist. Dauern die Impulse nach beiden Richtungen fort, so legt
r Punkt in der folgenden Zeit dieselbe Bahn zurück, die, wie Gleichung (7)
ıs zeigt, eine Ellipse ist.

Ist $a = \frac{1}{4}\lambda$, so befindet sich der bewegte Punkt nach der Richtung
r z in seinem äufsersten Abstand von der Gleichgewichtslage und beginnt
ine zurückgehende Bewegung, wenn er in der Richtung der y seine Be-
ɔgung beginnt. Während er dann in der Richtung der z zur Ruhelage
rückkehrt, erreicht er nach y seinen gröfsten Abstand oder für $z = 0$
$y = \alpha$. Wird dann $z = -\beta$, so wird $y = 0$, und wird z wiederum 0,
wird $y = -\alpha$, so dafs also die zusammengehörigen Werte von y und
für diese vier Stellungen sind

$$y = o,\quad y = \alpha,\quad y = 0,\quad y = -\alpha,\quad y = o$$
$$z = \beta,\quad z = 0,\quad z = -\beta,\quad z = 0,\quad z = \beta.$$

Die Ellipse geht demnach in diesem Falle durch die Endpunkte der
ɔilamplituden, ihre Lage und Gestalt ist anders als in dem vorigen Falle,
ɔer die Bewegung des Punktes erfolgt in demselben Sinne wie vorher.
s geht dies auch aus der Form hervor, welche die Gleichung der Bahn
ınn annimmt,

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1.$$

Die Schwingungsrichtungen bestimmen dann ein Paar konj
ırchmesser der Ellipse.

Wenn im besondern in diesem Falle die beiden Amplitu

und die Bewegungsrichtungen zu einander senkrecht sind, so wird die] des Punktes ein Kreis. Denn in dem Falle wird unsere Gleichung der]

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^2} = 1,$$

$$y^2 + z^2 = \alpha^2.$$

Da nun die beiden Richtungen x und y zu einander senkrecht sin bedeutet α den Abstand des Punktes von dem festen Punkte, von den die Richtungen y und z gerechnet sind.

Die Punkte der Bahn liegen also alle auf einer Linie, die dadurc stimmt ist, dafs der Abstand aller ihrer Punkte von einem festen Pı eine konstante Gröfse und zwar gleich α ist; das ist aber bekanntlic Eigenschaft des Kreises.

Die Gleichungen (1) und (2) geben auch dieses unmittelbar, dafs die Gleichung (7) zu Hülfe genommen wird, denn wenn $\alpha = \frac{1}{4}$, werden sie

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$z = \alpha \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

und daraus

$$y^2 + z^2 = \alpha^2.$$

Wenn die Phasendifferenz gröfser ist, ist die Bahn, bis $a =$ wird, wieder in allen Fällen eine Ellipse, deren Lage und Gestalt le nach dem Bisherigen zu erhalten ist.

Ist $a = \frac{1}{2}\lambda$ geworden, so liefern die Gleichungen (1) und (2) ((7) als zusammengehörige Werte y und z

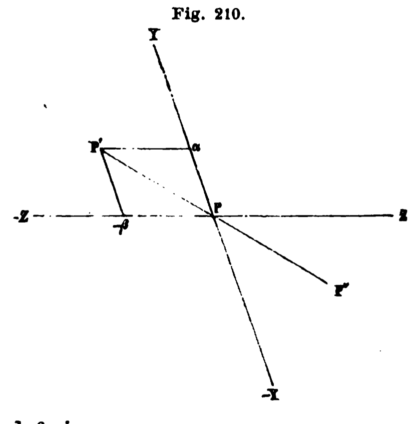


Fig. 210.

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} z.$$

Die Gestalt der Bahn ist wieder eine gerade Linie, welche doch anders liegt, wie in dem F wo $a = o$ war. Sie liegt jetzt (Fig. 2 in dem Winkel, den die Richt der negativen z mit derjenigen positiven y bildet. Denn jetzt ginnt der Punkt P zugleich sich ı der Richtung der negativen z und positiven y zu bewegen, und zwa dafs immer

$$\frac{y}{\alpha} = -\frac{z}{\beta}$$

ist; er bewegt sich demnach von P nach P', dann über P nach P'' u. in der Linie P' P'' hin und her, so lange die beiden Impulse dauern.

Bei einem noch gröfsern Werte von a geht die Bahn wieder in Ellipse über, in welcher jedoch der Punkt jetzt sich in entgegengesel

htung bewegt als vorher. Betrachten wir den Fall, wo $a = \frac{11}{16}\lambda$ ist. nn der Punkt P (Fig. 211) seine Bewegung nach der Richtung y beint, wenn also

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0,$$

$$z = \beta \cdot \sin \tfrac{11}{8}\pi = -0{,}923\,\beta.$$

r Punkt P befindet sich in p'.

Während nun z bis $-\beta$ wächst, bewegt sich der Punkt zugleich in r Richtung der positiven y, bis

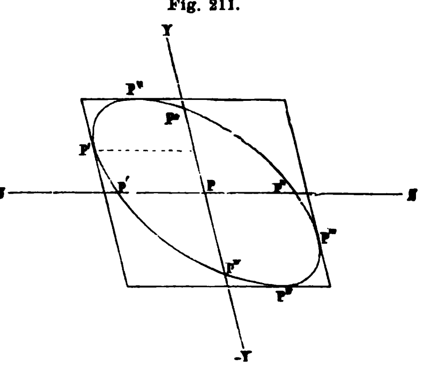


Fig. 211.

$$= -\alpha \cdot \cos \tfrac{11}{8}\pi = 0{,}382\,\alpha$$

. Der Punkt bewegt sich von p' ch P'.

Während sich dann weiter der stand y vergröfsert, nähert sich r Punkt in der Richtung z wieder r Ruhelage. Ist $y = \alpha$, so ist $= \beta \cdot \cos \frac{11}{8}\pi = -0{,}382\,\beta$, der nkt befindet sich in P'', hat also den eg $P'P''$ durchlaufen. Im weitern rlaufe nähert sich der Punkt angs sowohl in der Richtung der y als z der Gleichgewichtslage, bis er in p''. Dann entfernt er sich in der Richtung der positiven z, während er sich in r Richtung y dem Ausgangspunkte der Bewegung noch nähert; er bewegt h nach p''', P''' u. s. f., so dafs der Punkt die Bahnellipse in der Richtung , P'', P''', P^{IV} durchläuft, also in entgegengesetzter Richtung wie Fig. 209, die Phasendifferenz gleich $\frac{3}{16}\lambda$ war.

Zwischen der Phasendifferenz $\frac{1}{2}\lambda$ und λ durchläuft der Punkt die jesmalige Bahnellipse, die nach Lage und Gestalt für jeden Wert von a rschieden ist, immer in der zuletzt betrachteten Richtung. Die Gestalt r Ellipse nimmt dabei dieselben Änderungen an, wie in der vorhin bechteten Periode der Phasendifferenzen, sie wird anfangs bis $a = \frac{3\lambda}{4}$ gelbter und von da ab bis $a = \lambda$ wieder flacher, bis sie für den letzten ert der Phasendifferenz wieder eine gerade Linie wird, welche ebenso gt, wie in dem Falle, wo $a = 0$ war.

Im Falle also die komponierenden Bewegungen gleiche Perioden haben, d die Bahnen der einzelnen Punkte der Reihe Ellipsen, und zwar für e Punkte dieselben Ellipsen. Die Verschiedenheit in den gleichzeitigen wegungszuständen der einzelnen Punkte der Reihe besteht darin, dafs an verschiedenen Punkten der Ellipse sich befinden und dort mit verhiedener Geschwindigkeit sich bewegen.

Die Gestalt, welche die Punktreihe infolge der Bewegung der Punkte nimmt, ist verschieden je nach der Richtung, in der die komponierenden wegungen erfolgen. Ist die eine Bewegung longitudinal, die andere nsversal, so beschreiben die Punkte Ellipsen, deren Ebenen die Richtung, der die Bewegung sich fortpflanzt, in sich aufnehmen. Die Punktre

wird also eine ähnliche Gestalt haben, wie bei einer transversalen Wellenbewegung. Sei z. B. eine Punktreihe zugleich in longitudinale und transversale Schwingungen versetzt; die longitudinale Bewegung sei der transversalen um ein viertel Wellenlänge voraus und die Amplituden haben gleiche Gröfse, so stellt Fig. 212 die gegenseitige Lage der Punkte in einer

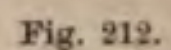
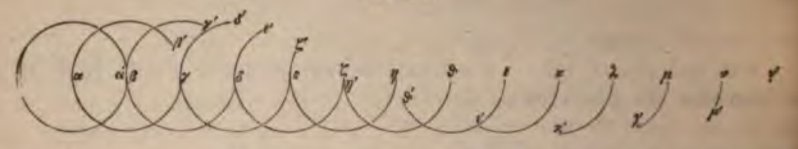


Fig. 212.



Wellenlänge dar. $\alpha, \beta, \gamma \cdots \nu$ ist die Lage der Punkte in der Ruhelage. Der Punkt α ist im Begriffe, eine neue Bewegung in transversaler Richtung zu beginnen, in longitudinaler hat er das erste Viertel seiner Oscillation zurückgelegt; er befindet sich in α'. Der Punkt δ hat in longitudinaler Richtung gerade eine Oscillation vollendet, dagegen befindet er sich in transversaler erst am Ende des dritten Viertels einer Oscillation, in seinem gröfsten Abstande nach negativer Richtung. Für den Punkt η' ist, um unsere vorige Bezeichnung beizubehalten, $y = 0$, $z = -\beta$, für $\varkappa$ ist $y = \alpha$, $z = o$ und für ν wieder $y = o$ und $z = \beta$. Die einzelnen Kreisbogen zeigen die Bahnen der Punkte an, welche von $t = \frac{1}{4}\, T$ an, in welchem Momente die transversale Bewegung der Punkte ihren Anfang nahm, durchlaufen sind.

Sind beide Bewegungen transversal, so stehen die Ebenen der elliptischen Bahnen auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht, die Reihenfolge der Bahnebenen bildet einen elliptischen Cylinder, dessen Axe die Punktreihe in der Ruhelage ist. Eine auf dem Cylinder gezogene Schraubenlinie, deren Höhe gleich ist der Länge der Welle, nimmt, wie man leicht übersieht, die Punkte in den verschiedenen Phasen auf.

§ 131.

Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge. Wir haben im Bisherigen die Zusammensetzung der Schwingungen in ihrem einfachsten Falle betrachtet, unter der Voraussetzung nämlich, dafs die Schwingungen sämtlich dieselbe Periode, dieselbe Schwingungsdauer und somit auch dieselbe Wellenlänge haben. Es fragt sich nun, ob sich in einer Punktreihe gleichzeitig Schwingungen fortpflanzen und zu einer resultierenden Schwingung zusammensetzen können, welche eine verschiedene Schwingungsdauer besitzen, und welches die resultierende Bewegung dann sein wird.

Die Möglichkeit der gleichzeitigen Fortpflanzung von Bewegungen verschiedener Periode ergibt sich unmittelbar aus unserer Ableitung der schwingenden Bewegung in einer Punktreihe im § 126. Wir fanden dort, dafs die Beschleunigung eines Punktes in dem Abstande x von dem Ausgangspunkte der Bewegung gegeben ist durch die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

rin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung in der Reihe leutet.

Es können demnach alle die schwingenden Bewegungen in der Punktbe gleichzeitig bestehen und sich ausbreiten, welche diesem Beschleunigungssetze entsprechen.

Wenn wir voraussetzen, dafs in dem Ausgangspunkte der Bewegung, o für $x = 0$, dieselbe gegeben sei durch

$$y = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

erkannten wir, dafs obige Gleichung für die fortgepflanzte Bewegung, o für die eines Punktes, der um x vom Anfangspunkt entfernt ist, auf Gleichung führt

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Setzen wir dagegen jetzt voraus, dafs der Ausgangspunkt eine ganze ihe von Impulsen erhalte von verschiedener Periode, so ist seine Begung gegeben durch die Summe

$$Y = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T_1} + 2b \sin 2\pi \frac{t + \tau_2}{T_2} + \cdots\cdot 2p \sin 2\pi \frac{t + \tau_n}{T_n},$$

rin $T_1 T_2 \cdot\cdot T_n$ die Schwingungsdauern der verschiedenen Bewegungen d $\tau_2 \cdot\cdot \tau_n$ die Zeiten bedeuten, um welche die zweite, dritte, $n$te Begung später oder früher beginnt als die erste. Wir werden im nächsten pitel zeigen, wie wir imstande sind, dem Ausgangspunkte der Bewegung se solche zusammengesetzte Bewegung zu erteilen.

Hat der Ausgangspunkt, für den $x = 0$ ist, diese Bewegung, so erbt sich ganz in derselben Weise wie für die einfache Schwingung, dafs Bewegung eines um x von dem Ausgangspunkte entfernten Punktes die wegung haben mufs

$$= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right) + b \sin 2\pi \left(\frac{t + \tau_2}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2}\right) + \cdots p \sin 2\pi \left(\frac{t + \tau_n}{T_n} - \frac{x}{\lambda_n}\right),$$

nn wir mit $\lambda_1, \lambda_2 \cdot\cdot \lambda_n$ die Wellenlängen der einzelnen Bewegungen bezeichnen, also setzen

$$\lambda_1 = cT_1, \quad \lambda_2 = cT_2 \cdots \lambda_n = c \cdot T_n.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung für die resultierende Bewegung läfst ch auch sehr leicht noch nachträglich zeigen, indem man aus derselben der schon mehrfach durchgeführten Weise die Quotienten $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ rechnet, man findet, dafs aus derselben sich ergibt

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Schon die Form der Gleichung für die aus dem Zusammenwirken ehrerer Schwingungen verschiedener Periode resultierende Bewegung gibt erkennen, dafs dieselbe keine einfach periodische ist, bei der das Begliche sich ebenso weit und ebenso lange an der einen Seite der

gewichtslage bewegt, als an der andern. Denn es läfst sich kein Wert von T und λ angeben, der für alle Werte von t und x den Abstand Y durch eine einfache Gleichung von der Form

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

mit einem von x und t unabhängigen Werte der Amplitude A wiedergeben liefse. Die Bewegung ist vielmehr eine zusammengesetzt periodische, indem jeder Punkt, während der durch das erste Glied der den Wert von Y gebenden Summe dargestellten hin und her gehenden Bewegung noch nach anderen Perioden bewegt wird. Infolge dessen bewegt sich der Punkt bald rascher bald langsamer nach der einen Seite als nach der andern, bald ist die Amplitude nach der einen Seite gröfser bald kleiner als nach der andern, je nach der Gröfse der Perioden und der Amplituden der komponierenden Schwingungen. Ein allgemeines Gesetz dieser kompliciert periodischen Bewegungen läfst sich aufser dem angegebenen nicht aufstellen; wir wollen nur, um ein Bild derselben zu bekommen, einige Fälle derselben betrachten, und zwar den einfachsten Fall, dafs sich zwei Wellen in der Punktreihe fortpflanzen, deren Schwingungsdauern und Wellenlängen sich wie 1 : 2 verhalten. In dem Falle wird, wenn wir die gröfsere der beiden Schwingungsdauern mit T und die gröfsere Wellenlänge mit λ bezeichnen, und gleichzeitig $\tau = 0$ setzen, also annehmen, beide Bewegungen begönnen zu gleicher Zeit, der Ausdruck für Y

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x}{\frac{1}{2}\lambda}\right)$$

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \cdot \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Entwickeln wir die beiden Sinus, so wird

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} - a \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

$$+ b \cdot \sin 4\pi \frac{t}{T} \cdot \cos 4\pi \frac{x}{\lambda} - b \cdot \cos 4\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 4\pi \frac{x}{\lambda},$$

und fixieren wir den Moment, in welchem $t = nT$ ist, somit $\sin 2n\pi = \sin 4n\pi = 0$, $\cos 2n\pi = \cos 4n\pi = 1$, so erhalten wir

$$Y = -a \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} - b \cdot \sin 4\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Hiermit werden dann die Werte von Y für

$$\begin{array}{llll}
x = \frac{1}{8}\lambda \cdot\cdot & Y = -a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} & - b \\
\frac{2}{8}\lambda \cdot\cdot & \quad -a & \pm 0 \\
\frac{3}{8}\lambda \cdot\cdot & \quad -a\sqrt{\frac{1}{2}} & + b \\
\frac{4}{8}\lambda \cdot\cdot & \quad \pm 0 & \pm 0 \\
\frac{5}{8}\lambda \cdot\cdot & \quad +a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} & - b \\
\frac{6}{8}\lambda \cdot\cdot & \quad +a & \pm 0 \\
\frac{7}{8}\lambda \cdot\cdot & \quad +a\sqrt{\frac{1}{2}} & + b \\
\frac{8}{8}\lambda \cdot\cdot & \quad \pm 0 & \pm 0.
\end{array}$$

Fig. 213 zeigt die Wellenform, welche diesen Werten von Y ent-icht, und zwar für $b = 2a$; $b = a$; $b = \frac{1}{2}a$.

Die punktierten Linien deuten die einzelnen Wellen an, die aus-ogenen geben die resultierenden Wellen. Die Figuren zeigen, dafs die wegung eine doppelperiodische ist, und dafs je nach dem Verhältnis der plituden die Art der Bewegung eine sehr verschiedene sein kann. Man n sie im allgemeinen dahin charakterisieren, dafs die Bewegung mit der fsten Amplitude der resultierenden Bewegung ihre Periode als charakte-isch aufdrückt, und dafs dann durch die übrigen Bewegungen innerhalb ser Perioden wieder periodische Verschiedenheiten auftreten. So wird n die Welle (Fig. 213a) als eine solche von der Periode $\frac{\lambda}{2}$ betrachten, welcher durch die zweite Bewegung innerhalb $2 \cdot \frac{\lambda}{2}$ jedesmal der erste llenberg und das letzte Wellenthal verstärkt erscheinen, während die

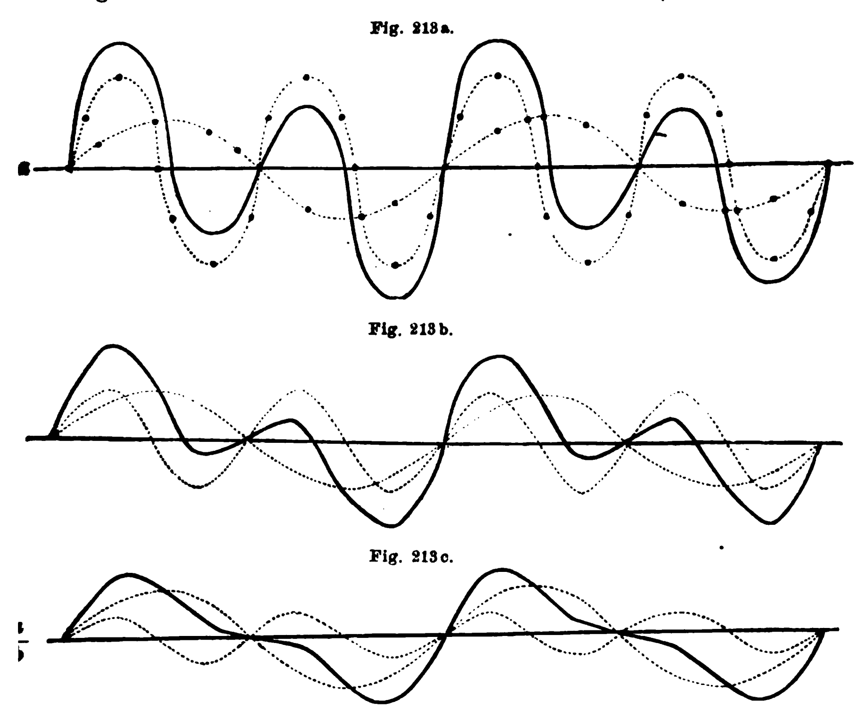


Fig. 213a.

Fig. 213b.

Fig. 213c.

lle (Fig. 213c) entschieden als schwingende Bewegung von der Periode rscheint, welche von der einfachen Schwingung sich dadurch unter-idet, dafs der schwingende Punkt mit grofser Geschwindigkeit sich nach positiven Seite von seiner Gleichgewichtslage entfernt, dann aber sehr langsamer sich derselben wieder nähert und sich über dieselbe hinaus zu seinem gröfsten Abstande an der negativen Seite bewegt.

In derselben Weise setzen sich die Bewegungen zusammen, wenn die ponierenden Wellen in weniger einfachem Verhältnis stehen; in jedem le kann man in der angegebenen Weise die resultierende Bewegung dieren.

Mit einer Verschiebung der Phase der einen der komponierenden We ändert sich die resultierende Welle ebenfalls, wenn auch im übrigen komponierenden Bewegungen ganz ungeändert bleiben. Die oben für resultierende Bewegung hingeschriebene Gleichung läfst das auch sofort kennen; wird die zweite Bewegung um ein viertel Wellenlänge verscho so wird der Ausdruck für Y

$$Y = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + b \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x}{\frac{1}{2}\lambda} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - b \cdot \cos 4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

wird die zweite Bewegung um eine halbe Wellenlänge verschoben, so

$$Y = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - b \cdot \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Darnach sind die Werte von Y für diese beiden Fälle folgende, w wir wieder den Moment $t = nT$ fixieren,

x	Phasendifferenz $= \frac{1}{8}\lambda$		$= \frac{1}{4}\lambda$	
$x = \frac{1}{8}\lambda \cdot\cdot$	$Y = -a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	± 0	$-a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	$+b$
$\frac{2}{8}\lambda \cdot\cdot$	$-a$	$+b$	$-a$	± 0
$\frac{3}{8}\lambda \cdot\cdot$	$-a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	± 0	$-a\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-b$
$\frac{4}{8}\lambda \cdot\cdot$	0	$-b$	0	± 0
$\frac{5}{8}\lambda \cdot\cdot$	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	± 0	$+a\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+b$
$\frac{6}{8}\lambda \cdot\cdot$	$+a$	$+b$	$+a$	± 0
$\frac{7}{8}\lambda \cdot\cdot$	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	± 0	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	$-b$
$\frac{8}{8}\lambda \cdot\cdot$	± 0	$+b$	± 0	$\pm 0.$

Die Figuren 214a und 214b stellen diese Bewegung dar, erstere die Differenz $\frac{1}{8}\lambda$, letztere für $\frac{1}{4}\lambda$, unter der Annahme, dafs $b =$ Die Zeichnungen zeigen also, wie sich die Fig. 213c dargestellte Beweg durch eine Verschiebung der einen Bewegung ändert.

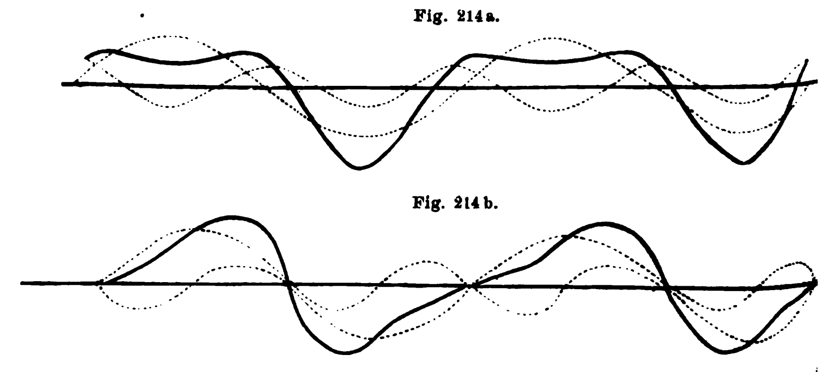


Fig. 214a.

Fig. 214b.

Wie man sieht, ist Fig. 214b gewissermafsen das Umgekehrte Fig. 213c, die Punkte der Reihe bewegen sich sehr langsam nach o dagegen sehr rasch nach unten, während bei einer Verschiebung um

viertel Wellenlänge der kleinern Bewegung die Form der Schwingung eine ganz andere wird; der schwingende Punkt bewegt sich aus der Gleichgewichtslage mit grofser Schnelligkeit zu seiner einen äufsersten Lage, bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit von dort zurück bis zu einer ersten gröfsten Ausweichung nach der andern Seite, kehrt langsam bis zu einem gewissen Abstande von der Gleichgewichtslage zurück, entfernt sich wieder bis zu einem dem vorherigen gleichen Abstande und schwingt dann mit grofser Schnelligkeit wieder bis zu dem äufsersten Abstande an der andern Seite der Gleichgewichtslage.

In ganz gleicher Weise würde man verfahren, um die Wellenformen zu erhalten, wenn drei oder mehr Schwingungen verschiedener Wellenlängen sich in der Punktreihe ausbreiten, die Form der Wellen wird dann immer komplicierter, indem jede einzelne Bewegung in der resultierenden als bestimmte Periode auftritt. Wir werden später derartig komplicierte Schwingungen kennen lernen.

Ebenso wie gleich gerichtete Schwingungen verschiedener Wellenlänge können auch verschieden gerichtete Schwingungen verschiedener Wellenlänge sich zusammensetzen. Die resultierende Bewegung unterscheidet sich dann in doppelter Weise von den im vorigen Paragraphen erhaltenen, indem einmal die von den Punkten der Reihe beschriebenen Kurven nicht mehr Ellipsen, sondern kompliciertere Linien sind und ferner indem im allgemeinen die von den einzelnen Punkten nach einander und die von den auf einander folgenden Punkten der Reihe gleichzeitig beschriebenen Kurven verschieden sind. Dafs letzteres der Fall ist, ergibt sich daraus, dafs bei gleichzeitiger Ausbreitung von Schwingungen verschiedener Periode die einzelnen Punkte von den komponierenden Wellen nicht immer in derselben Phase getroffen werden. Denken wir uns z. B. in einer Punktreihe zwei zu einander senkrechte transversale Schwingungen fortgepflanzt, deren Phase nur sehr wenig verschieden ist, so dafs durch den Unterschied der Phase der Charakter der Kurven nicht alteriert wird, dafs dieselben Ellipsen bleiben; nehmen wir z. B. an, die Schwingungsdauern der Punkte verhalten sich wie 100 : 101 und die beiden Bewegungen beginnen gleichzeitig. Ist die Amplitude beider Bewegungen gleich, so wird die erste Schwingung im Anfangspunkte eine lineare sein, welche mit jeder der komponierenden einen Winkel von 45° bildet. Bei der zweiten Schwingung ist die eine der andern aber schon 0,01 Schwingung voraus, die Bahn des Punktes wird schon elliptisch, und nach 19 Schwingungen ist die Phasendifferenz der Schwingungen gleich $\frac{3}{16}$ Oscillation, die Bahn des Punktes wird eine Ellipse wie Fig. 209. Nach 25 Schwingungen ist die Phasendifferenz $\frac{1}{4}$ Oscillation, die Bahn wird ein Kreis, nach 50 Oscillationen ist sie $\frac{1}{2}$ Oscillation, die Bahn wird wieder eine Linie, welche zu der ersten Schwingung senkrecht steht; kurz man sieht, dafs nach 100 Schwingungen der Punkt nach und nach alle die Bahnen durchlaufen hat, welche wir im vorigen Paragraphen besprochen haben. Alle diese Bahnen, welche der erste Punkt nach einander durchläuft, sehen wir dann in den ersten 100 Wellenlängen gleichzeitig neben einander. Denn jeder Punkt durchläuft nach einander dieselben Bahnen wie der erste Punkt. Macht nun der erste Punkt der 100. Welle die erste Schwingung, so findet in der 75. Welle die 25. Schwingung statt, diese schwingt also geradeso wie der Anfangspunkt bei der 25. Schwingung etc.

In einem Falle tritt diese Verschiedenheit der Schwingungen nicht ei
Stehen die Schwingungen in einem einfachen rationalen Verhältnis, al
etwa 1 : 2 oder 1 : 3, 2 : 3 etc., so sind die Bahnen jedes Punktes d
Reihe immer dieselben. Wir wollen auch hier nur den einfachsten Fall b
trachten, um zu zeigen, in welcher Weise die Frage nach der resultierend
Bewegung zu behandeln ist, da wir an einer andern Stelle nochmals a
diesen Punkt zurückkommen werden. Wir denken uns in einer Punktrei
zwei zu einander senkrechte Bewegungen sich fortpflanzen, deren Welle
längen sich verhalten wie 1 : 2. Die Gleichung der einen Bewegung sei

$$y = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \cdots\cdots (1)$$

jene der zweiten hierzu senkrechten

$$z = b \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x-d}{\frac{1}{2}\lambda}\right),$$

oder was dasselbe ist

$$z = b \cdot \sin 4\pi\left(\frac{t}{Y} - \frac{x-d}{\lambda}\right) \quad \cdots\cdots (2)$$

worin d die Phasendifferenz der komponierenden Bewegungen bedeutet.

Gleichung (2) können wir schreiben

$$\frac{z}{b} = \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\cos 4\pi\frac{d}{\lambda} + \cos 4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\cdot\sin 4\pi\frac{d}{\lambda}$$

und weiter, indem wir sinus und cosinus des doppelten Bogens durch si
und cosinus des einfachen Bogens ausdrücken,

$$\frac{z}{b} = 2\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\cdot\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\cdot\cos 4\pi\frac{d}{\lambda}$$
$$+\left(\cos^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\sin 4\pi\frac{d}{\lambda} \quad (3)$$

Nun ist

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{y}{a}; \quad \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}};$$

setzen wir diese Werte in die Gleichung (3) ein, so erhalten wir
Gleichung zwischen y und z

$$\frac{z}{b} = 2\frac{y\cdot\sqrt{a^2-y^2}}{a^2}\cdot\cos 4\pi\frac{d}{\lambda} + \left(1 - 2\frac{y^2}{a^2}\right)\cdot\sin 4\pi\frac{d}{\lambda}$$

Dieser Ausdruck liefert uns für jedes y das zugehörige z, und
sieht, wie der Wert von z sich gleichzeitig mit der Phasendifferenz d än

Nehmen wir an, die Wellen haben denselben Anfangspunkt, so ist
diesen Fall $d = 0$, damit wird das zweite Glied auf der rechten Seite =
und es wird, wenn wir noch $a = b$ setzen,

$$z = \pm 2\cdot\frac{y}{a}\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Die hierdurch dargestellte Kurve zeigt Fig. 215 α. Der schwingende unkt bewegt sich vom Anfangspunkte aus gleichzeitig nach y und z, aber scher nach z als nach y, denn es ist $z = a$, wenn $y = a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$. Indem y um von $a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ bis a wächst, nimmt z von a bis 0 ab; nimmt y dann ieder bis $a \sqrt{\frac{1}{2}}$ ab, so wächst z negativ wieder bis a und wird wieder it y gleich 0. Diese Hälfte der Kurve besteht also aus zwei kongruenten ücken. Ganz ebenso ist die andere Hälfte der Kurve für die negativen erte von y beschaffen.

Ist die zweite Bewegung der ersten um den achten Teil ihrer Schwingung raus, so haben wir, da wir mit λ die Wellenlänge der Schwingungen r gröfsern Periode bezeichnet haben, für d einzusetzen $\frac{1}{16}\lambda$. Damit wird e Gleichung der resultierenden Kurve, indem wir für $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ren Wert einsetzen,

$$z = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{2y}{a} \sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot a \cdot \left(1 - 2\frac{y^2}{a^2}\right).$$

Fig. 215.

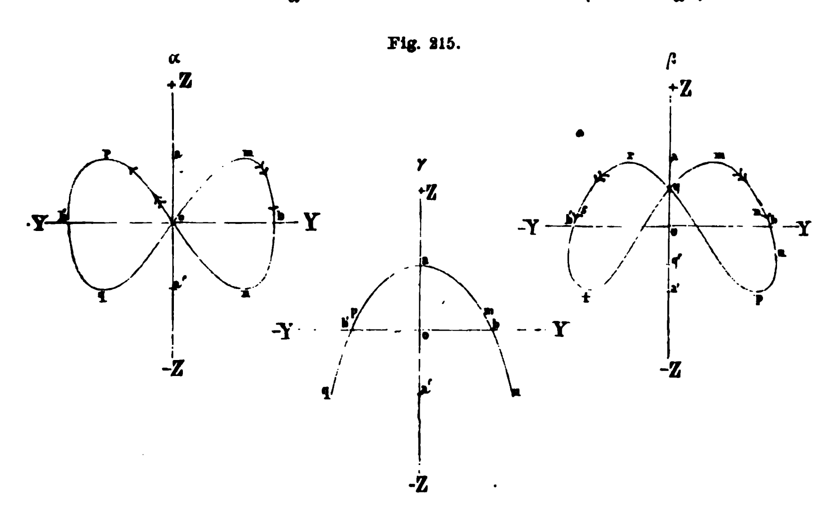


Fig. 215 β zeigt die durch diese Gleichung dargestellte Kurve; wir erlten der Kurve entsprechend aus der Gleichung die Werte

$z = a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ für $y = 0$

$z = a$ „ $y = \pm a \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}} = \pm 0{,}382\,68\,a$

$z = 0$ „ $y = \pm \frac{1}{2} a \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} = \pm 0{,}923\,85\,a$ und $\pm 0{,}382\,68\,a$

$z = -a\sqrt{\frac{1}{2}}$ „ $y = \pm a$

$z = -a$ „ $y = \pm \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}} = 0{,}756\,98\,a.$

Wie man sieht, unterscheidet sich diese Kurve von der vorigen nur dadurch, dafs der Schnittpunkt der einzelnen Kurvenäste nach der Seite der positiven z verschoben ist, und die Kurve in ihren beiden Hälften mehr abgeflacht ist. Je mehr die zweite Bewegung der ersten voraus ist, um so weiter rückt der Schnittpunkt nach oben, bis er für ein Vorauseilen um $\frac{1}{4}$ Schwingung in den Wert $z = a$ fällt, wo dann gleichzeitig die Kurve die Gestalt Fig. 215γ annimmt, der Punkt bewegt sich in der Linie qa hin und her. Die Gleichung der Kurve erhalten wir, wenn wir in Gleichung (4) $d = \frac{1}{8}\lambda$ setzen

$$z = a\left(1 - 2\frac{y^2}{a^2}\right).$$

Darnach ist

$$z = a \quad \text{für } y = 0$$
$$z = 0 \quad \text{„} \quad y = \pm a \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$z = -a \quad \text{„} \quad y = \pm a,$$

wie es auch obige Kurve zeigt.

Nimmt die Phasendifferenz der Bewegungen weiter zu, so tritt zunächst wieder die Kurve Fig. 215β auf; sie behält diese Gestalt, jedoch so, dafs der Punkt q immer näher an 0 heranrückt, bis die zweite Bewegung der ersten um $\frac{1}{2}$ Schwingung voraus, d also $\frac{1}{4}\lambda$ wird. Der Unterschied gegen vorhin ist nur der, dafs der Punkt die Kurve in entgegengesetzter Richtung durchläuft. Ist $d = \frac{1}{4}\lambda$, so tritt wieder die Kurve Fig. 215α auf, welche von dem Punkte aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird wie vorher, als $d = 0$ war.

Bei noch weiterer Zunahme der Phasendifferenz tritt wieder die Kurve Fig. 215β auf, aber in umgekehrter Lage, wir erhalten z. B. die Kurve für $d = \frac{5}{16}\lambda$, wenn wir uns Fig. 215β und für $d = \frac{3}{8}\lambda$, wenn wir uns Fig. 215γ einfach auf den Kopf gestellt denken.

Sind die Schwingungsverhältnisse der beiden Bewegungen nicht genau 1 : 2, sondern etwa 50 : 99, so durchläuft jeder Punkt nach und nach die soeben abgeleiteten Bahnen, und ebenso sehen wir dann in der Punktreihe innerhalb 50 λ alle die Kurven neben einander.

Sind die Verhältnisse der Schwingungsdauern weniger einfach, so werden die Kurven verwickelter, ihre Bestimmung gelingt indes immer auf dem angedeuteten Wege.

§ 132.

Schwingungen eines Systems von Punkten. Wenn in einem im Raum verteilten System von Punkten das Gleichgewicht eines Punktes gestört wird, so mufs auch das aller übrigen gestört werden, wenn wir voraussetzen, dafs auch hier, wie in den in den vorigen Paragraphen betrachteten Punktreihen, das Punktsystem durch anziehende und abstofsende Kräfte, welche zwischen den einzelnen Punkten thätig sind, im Gleichgewicht gehalten wird. Man kann jedes System von Punkten, welche irgendwie im Raume verteilt sind, als aus Punktreihen zusammengesetzt betrachten, die man erhält, wenn man durch irgend einen Punkt des Raumes nach allen möglichen Richtungen gerade Linien legt. Diese Linien laufen

on dem Punkte aus, wie die Radien einer Kugel von dem Mittel-unkte, und jeder dieser unendlich vielen Radien stellt eine Punktreihe ar. Wird der erste Punkt in eine oscillierende Bewegung versetzt, so ufs sich diese in allen den Punktreihen nach den bisherigen Gesetzen rtpflanzen, da der Punkt allen Reihen gleichzeitig angehört.

Je nach der Art und Weise, wie die Punkte im Raum verteilt sind, ann die Fortpflanzung der Bewegung im Systeme verschieden sein. Wie ir sahen, hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Be-egung nur ab von dem Quotienten $\sqrt{\frac{e}{d}}$, der Elasticität der Punktreihe nd ihrer Dichtigkeit. Sind nun die Punkte in dem Systeme so verteilt, afs nach den einzelnen Richtungen hin auf der ganzen Länge der Radien ieser Quotient denselben Wert hat, wie wir es bei Betrachtung der Punkt-eihen voraussetzen, so nennt man das System ein homogenes. In einem olchen System pflanzt sich eine Wellenbewegung nach jeder Richtung hin it konstanter Geschwindigkeit fort, auf der ganzen Länge jedes Radius t die Wellenlänge dieselbe. Die schwingende Bewegung in einem solchen ysteme können wir unmittelbar mit Hülfe unserer Entwickelungen über ie Schwingungen von Punktreihen erhalten.

Behalten auf den einzelnen Radien in verschiedenen Entfernungen vom ittelpunkte Elasticität und Dichtigkeit der Punktreihen nicht denselben ert, ändert sich die Elasticität allein oder die Dichtigkeit, oder ändern ch beide in einem verschiedenen Verhältnisse, so ist das Punktsystem ein cht homogenes oder ein heterogenes.

In einem solchen System pflanzt sich die Bewegung in verschiedenen ntfernungen nicht mit gleicher Geschwindigkeit fort, die Wellenlängen nd nicht auf der ganzen Länge der Radien gleich, sondern ändern sich berall dort, wo auf denselben eine Änderung der Elasticität oder Dichtig-eit eintritt, denn überall dort findet eine Änderung des Quotienten $\sqrt{\frac{e}{d}}$ statt.

Die homogenen Punktsysteme können entweder isotrop oder anisotrop ein. Isotrope Punktsysteme sind solche, bei denen für sämtliche Schwin-ungen der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ derselbe ist, also nicht nur auf jedem Radius es Systems für sich betrachtet, sondern auch auf allen verschiedenen Ra-ien, einerlei nach welcher Richtung auf demselben die Schwingungen er-lgen. Gleichartige Schwingungen, also auf allen Radien longitudinale, der auf allen Radien transversale, pflanzen sich nach allen Richtungen mit erselben Geschwindigkeit fort. Ein derartiges Punktsystem würden wir . B. erhalten, wenn wir nach drei zu einander senkrechten Richtungen des aumes die Punkte in ganz gleichen Abständen verteilt denken und an-ehmen, dafs überall in gleichen Abständen die Punkte mit gleichen Kräften uf einander wirken. Die Punkte würden also auf Ecken von Würfeln egen, welche im ganzen System gleiche Seiten haben.

Ist der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ nicht nach allen Richtungen hin derselbe, so ennt man das System ein anisotropes oder heterotropes, es ist das der all, wenn die Dichtigkeit der verschiedenen Punktreihen oder die Elasti-

cität derselben verschieden ist, wenn also die Punkte in einer Richtung sich näher liegen oder mit stärkerer Kraft in ihrer Gleichgewichtslage gehalten werden als in einer andern, oder auch, wenn in einer und derselben Reihe der Wert von e verschieden ist, je nach der Richtung, nach welcher der Punkt aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist. In jeder Punktreihe pflanzt sich dann eine gegebene Schwingung mit konstanter Geschwindigkeit fort, welche aber von Punktreihe zu Punktreihe verschieden ist.

Betrachten wir die Fortpflanzung der Wellenbewegung in isotropen Mitteln etwas genauer und nehmen wir an, die Schwingungen haben überall in Bezug auf die Punktreihen die gleiche Richtung.

Bezeichnen wir wie früher die Oscillationsdauer der schwingenden Bewegung mit T und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung mit c, so hat sich nach Verlauf der Zeit T die schwingende Bewegung allen Punkten einer Kugel mitgeteilt, welche mit dem Radius $R = c \cdot T$ um den Anfangspunkt α der Bewegung beschrieben wird, da sich in diesem Systeme die schwingende Bewegung nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt. Die auf der Kugelfläche befindlichen Punkte beginnen gerade ihre schwingende Bewegung, während der Punkt α eine ganze Schwingung vollbracht hat, und die Punkte, welche die einzelnen Radien der Kugel bilden, sich in den verschiedensten Oscillationsphasen befinden, diejenigen, welche um $\frac{cT}{4}$ von α entfernt sind, haben $\frac{3}{4}$ ihrer Schwingung vollbracht, die um $\frac{cT}{2}$ entfernten die Hälfte u. s. f. Man ersieht, wie alle Punkte, welche auf einer um α beschriebenen Kugel liegen, in der gleichen Phase sich befinden.

Der Bewegungszustand, der innerhalb der Kugel, die mit dem Radius $R = cT$ beschrieben war, am Ende der Zeit T stattfindet, pflanzt sich in der folgenden Zeit T in der Richtung der Radien weiter fort, so daß am Ende der Zeit $2T$ alle Punkte einer Kugel vom Radius $2cT$ an der Bewegung teilnehmen. Die Punkte, die auf der Fläche dieser Kugel liegen, sind im Begriffe, ihre schwingende Bewegung zu beginnen, und die Punkte auf der Kugel vom Radius cT haben ihre erste Oscillation zurückgelegt. Die Punkte, welche in der von diesen beiden Kugeln eingeschlossenen Schale sich befinden, haben alle einen gröfseren oder kleineren Teil einer Oscillation zurückgelegt; sie befinden sich in derselben Phase, wie die entsprechend liegenden Punkte innerhalb der Kugel vom Radius cT zur Zeit T. Die von α um $\frac{5}{4}\,cT$ entfernten Punkte haben $\frac{3}{4}$, die um $\frac{3}{2}\,cT$ entfernten $\frac{1}{2}$ Undulation zurückgelegt.

Die Punkte innerhalb der Kugel vom Radius cT befinden sich, wenn die Erregung im Mittelpunkt der Bewegung fortdauert, in denselben Oscillationsphasen wie zur Zeit T, jetzt aber bei Zurücklegung ihrer zweiten Oscillation.

In der folgenden Zeit T pflanzt sich der Bewegungszustand der Kugelschale, die zwischen den Kugeln vom Radius $2cT$ und cT erhalten ist, in der Richtung der Radien auf die Punkte fort, welche weniger als $3cT$ von dem Punkte α entfernt sind; eine Kugel vom Radius $3cT$ ist die Grenze der Bewegung. Dort beginnen die Punkte ihre erste Oscillation, während sie auf der Kugelfläche, welche zur Zeit $2T$ die Grenze der Bewegung

ar, ihre zweite Oscillation beginnen; alle zwischen diesen Kugeln befindhen Punkte haben gröfsere oder kleinere Teile ihrer Oscillation vollführt, nach ihren Abständen vom Anfangspunkte oder von der Kugel, die in r vorigen Zeit die Grenze der Bewegung bildete.

Man sieht, wie nach und nach der Raum rings um den Punkt α sich eine Reihe von Kugelschalen teilt, deren Dicke jedesmal gleich cT ist, id in denen die gleichweit von der Grenze der Schalen entfernten Punkte den gleichen Phasen der Oscillation sich befinden. Jeder Radius, den ir von dem Punkte α nach der äufsersten Grenze der Bewegung ziehen, it sich ebenso in eine Anzahl Wellenlängen geteilt, wie wir es früher für e einzelnen Punktreihen gesehen haben. Deshalb nennt man auch hier e Dicke der einzelnen Kugelschalen, welche durch Kugeln vom Radius cT und $(n-1)\,cT$ begrenzt werden, die Wellenlänge, und diese Kugelhalen selbst Wellen.

Es geht demnach aus dem Gesagten hervor, dafs in einem isotropen unktsystem die schwingende Bewegung sich in kugelförmigen Wellen rtpflanzt.

Hört nach einiger Zeit die schwingende Bewegung des Punktes α auf, gelangen dadurch auch die auf α folgenden Punkte auf allen einzelnen adien zur Ruhe, da die schwingende Bewegung des Punktes α es ist, elche die Bewegung der folgenden Punkte veranlafst, indem er bei seiner ewegung die folgenden Punkte nach sich zieht. Dadurch entsteht neben r äufsern Grenze der Wellenbewegung eine innere, an der die Bewegung r Punkte aufhört.

Diese innere Grenze mufs ebenso eine Kugel sein, deren Mittelpunkt α t und deren Radius stetig mit der Zeit t gerade so wächst, wie der Radius r äufsern Grenze. Daraus folgt, dafs von der Zeit an, wo α aufhört sich bewegen, eine Kugelschale die sämtlichen bewegten Punkte umfafst, ren Dicke gleich ist ct, wenn wir mit t die Zeit bezeichnen, während elcher der Punkt α sich bewegte. Zur Zeit t' werden die Grenzen dieser ugelschalen die beiden Kugeln vom Radius ct' und $c\,(t'-t)$ sein, erstere e äufsere, letztere die innere. Mit wachsender Zeit erweitert sich diese hale immer mehr, aber die Dicke derselben ist immer

$$ct' - c\,(t' - t) = ct,$$

so konstant.

In nicht isotropen Systemen kann eine Wellenbewegung sich auch cht in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, dort hängt der Abstand, bis zu elchem sich in den verschiedenen Richtungen die Bewegung in gleichen iten überträgt, ab von der Dichtigkeit der einzelnen Radien sowie von r Elasticität dieser Reihen. Um demnach die Grenzen der Bewegung in esem Falle zu erhalten, müssen wir das Gesetz kennen, nach welchem h die Eigenschaften der Punktreihen ändern. Wir werden später, in der hre vom Lichte, die Fortpflanzung von schwingenden Bewegungen in lchen Systemen zu betrachten haben.

Die nicht homogenen Punktsysteme können wir als eine Verbindung einander grenzender homogener Punktsysteme ansehen. Die Fortpflanzung schwingenden Bewegungen in denselben können wir demnach auf die rtpflanzung der Bewegung in homogenen Punktsystemen zurückführen,

nur ist es notwendig, die Änderungen zu untersuchen, welche die sc
gende Bewegung erfährt beim Übergange aus einem homogenen Syst
ein anderes ebenfalls homogenes System.

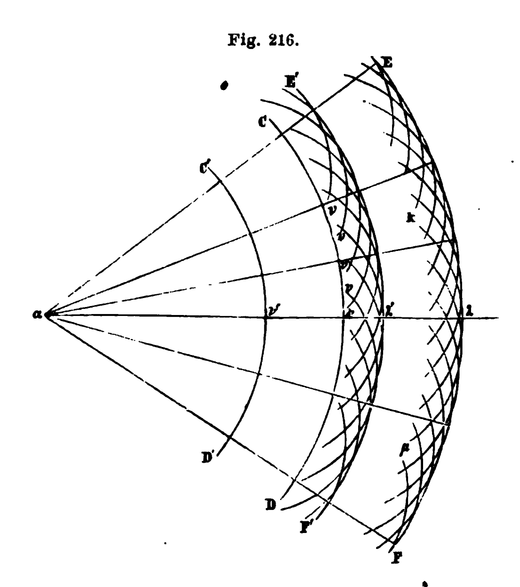
§ 133.

Huyghenssches Princip. Man kann sich von der Fortpfla
einer Wellenbewegung noch eine etwas andere Vorstellung bilden, v
zuerst von Huyghens angewandt ist und die auf dem von uns in
bereits zum Teil ausgesprochenen und angewandten Princip der Koe
kleiner Bewegungen beruht. Dieses Princip läfst sich vollständig s
sprechen: Ein Punkt eines Systemes, der durch mehrere Impulse
wird, vollführt eine Bewegung, die sich als Resultante nach dem Satz
Parallelogramm der Kräfte bestimmen läfst. Wenn durch die Bew
dieses Punktes auch benachbarte Punkte des Systemes bewegt werde
Bewegung der letztern aber nur Folge ist einer der komponierend
wegungen des zuerst bewegten Punktes, so bewegen sich dieselben
so, als besäfse der ursprünglich bewegte Punkt nur diese Teilbeweg

Wenn nun in einem Punktsystem eine Wellenbewegung vorhan
und die Bewegung bis zu einer gewissen Fläche fortgeschritten ist,
die Bewegung irgend eines nicht in dieser Fläche liegenden Punkt
Systems die Resultante aller jener Teilbewegungen, welche die verschi
Punkte der Welle zu ihm hinsenden.

Sei CD (Fig. 216) die äufsere, $C'D'$ die innere Grenze
Welle, welche von dem Punkte α ausgegangen ist. Wir könne
Punkte, welche zwisch
Grenzen CD und $C'D'$
als neue Wellenmittel
betrachten, von dene
sich eine schwingend
wegung nach allen Richt
hin fortpflanzt, gerad
vom Punkte α aus.

Fig. 216.



Diese von den ein
Punkten ausgehenden
sind bei der Vorausse
dafs das System ein iso
ist, ebenso kugelförmig
die Flächen, deren I
schnitte CD und $C'D'$

Von dem Punkte
sich z. B. die Bewegung
rend einer Zeit t auf di
dem Radius $v\lambda = c \cdot$
schriebene Kugel fortgep
haben, deren Mittelpun
Punkt v ist. Gleiches gilt für alle Punkte der Kugelfläche CD, von
gehen nach allen Richtungen Bewegungen aus in der Form von k
förmigen Wellen, deren Radien gleich $c \cdot t$ sind.

Die äufsere Grenze, bis zu der sich auf diese Weise die Wellenbewegung rtgepflanzt hat, wird die Fläche sein, welche alle diese einzelnen Kugeln berührt, welche also alle diese Kugeln einhüllt. Diese Fläche ist ber offenbar eine Kugel EF, welche den Punkt α zum Mittelpunkt hat, nd deren Radius gleich ist $\alpha\nu + c \cdot t = \alpha\lambda$. Denn die von α am weitesten ntfernten Punkte der einzelnen Kugeln sind diejenigen, wo deren Radien $\nu\lambda$ it dem Radius $\alpha\nu$ gerade Linien bilden; diese liegen aber auf einer Kugelfläche, deren Radius gleich $\alpha\lambda$ ist.

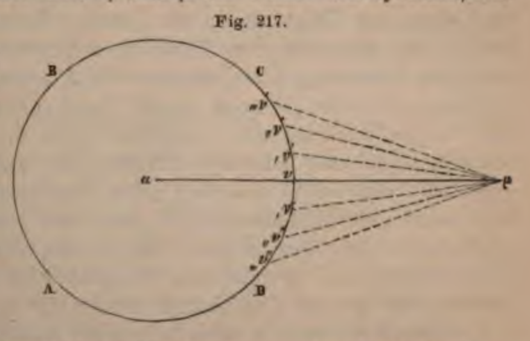
Gleiches gilt auch von den Bewegungen aller übrigen zwischen CD nd $C'D'$ liegenden Punkte, auch von diesen gehen Bewegungen nach llen Richtungen aus, und der Schwingungszustand der auf irgend einer wischen CD und $C'D'$ liegenden Kugelfläche befindlichen Punkte hat sich o auf eine um $c \cdot t$ von α weiter entfernte Kugelfläche übertragen. Die nnere Grenze der Welle ist demnach die Kugelfläche $E'F'$, welche mit em Radius $\alpha\nu' + \nu'\lambda'$ um α beschrieben ist, da diese Kugelfläche alle ene einzelnen Kugeln berührt, welche von allen ν' der Kugelfläche $C'D'$ it den Radien $\nu'\lambda'$ beschrieben werden.

Wir erhalten somit durch Anwendung der Huyghensschen Konstruktion, ndem wir jeden Punkt einer Welle als Bewegungsmittelpunkt ansehen, von em aus sich die Bewegung weiter fortpflanzt, ganz dieselbe Wellenfläche, ls wenn wir von dem bewegenden Mittelpunkte α aus in der Richtung der adien fortgeschritten wären.

Wir haben jedoch nicht nur zu zeigen, dafs die jedesmalige Begrenzung er Welle nach dieser Konstruktion dieselbe ist, als wenn wir eine einfache Verbreitung nach den durch den Bewegungsmittelpunkt gelegten Radien nnehmen, sondern auch nachzuweisen, dafs die Bewegung der einzelnen Punkte in diesen abgeleiteten Wellen dieselbe ist, wie nach unserer ersten Vorstellung und somit die dort stillschweigend gemachte Voraussetzung der eradlinigen Verbreitung von Wellen in einem Punktsystem zu rechtfertigen.

Sei zu dem Ende die um den Mittelpunkt α beschriebenene Kugel $ABCD$ ie Wellenfläche zu irgend einer Zeit t, und μ ein Punkt des Systems, der ine Strecke δ von dem unkte ν auf dem Radius $\alpha\nu$ ntfernt liegt. (Fig. 217.)

Fig. 217.



Der Punkt μ hat, wenn e Bewegung sich fortlanzt, nach einer gewissen eit τ zunächst eine Begung durch die von ν der Richtung des Radius sich fortpflanzende Begung. Nehmen wir an, fs der Punkt ν am Ende r Zeit t' oder im Beginne der Zeit τ seine Bewegung gerade beginnt, so t die Phase der Oscillation des Punktes μ bestimmt durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right),$$

enn wir mit a die Amplitude, mit T die Oscillationsdauer und mit λ die ellenlänge der schwingenden Bewegung bezeichnen.

Nach unserer Annahme sind alle Punkte der Wellenfläche Mittelpunkte der Bewegung, von denen sich Schwingungen nach allen Richtungen hin fortpflanzen. Zur Zeit τ ist daher von allen Punkten der Wellenfläche $ABCD$ eine Bewegung auf den Punkt μ übertragen. Da aber die Abstände der einzelnen Punkte ν' von μ unter sich sowohl als von $\nu\mu$ verschieden sind, so sind die gleichzeitig in μ ankommenden Bewegungen zu verschiedenen Zeiten von der Welle $ABCD$ ausgegangen, es folgt daraus, daſs die Phasen aller gleichzeitig auf den Punkt μ wirkenden Bewegungen unter sich sowohl als von der von ν ausgehenden Bewegung verschieden sind. Nennen wir den Abstand eines Punktes $_{\prime}\nu'$ von μ nun δ', so erhalten wir als Abstand des Punktes μ von der Gleichgewichtslage infolge dieser Bewegung

$$y' = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{\tau}{T} - \frac{\delta'}{\lambda}\right)$$

und als Phasendifferenz der beiden Bewegungen die Differenz

$$\frac{\delta' - \delta}{\lambda}.$$

Je nach der Lage des Punktes $_{\prime}\nu'$ hat diese Differenz immer andere Werte, sie wächst stetig, je weiter der Punkt $_{\prime}\nu'$ von ν entfernt liegt, so daſs also gleichzeitig Bewegungen in allen möglichen Phasen auf den Punkt μ einwirken. Um die Resultierende aus diesen sämtlichen Bewegungen zu erhalten, denken wir uns durch Kreise, deren Mittelpunkte auf $\alpha\mu$ liegen, und die zu $\alpha\mu$ senkrecht sind, die Wellenfläche CD in eine Reihe von Zonen $_{\prime}\nu'$ $_{\prime\prime}\nu'$ $_{\prime\prime}\nu''$ $_{\prime}\nu''$ zerlegt, so zwar, daſs die Abstände der auf einander folgenden Punkte ν von μ sich immer um $\frac{1}{2}\lambda$ unterscheiden, so daſs also

$$_{\prime\prime}\nu'\mu - {_{\prime}\nu'}\mu = {_{\prime}\nu'}\mu - \nu\mu = {_{\prime\prime}\nu''}\mu - {_{\prime}\nu''}\mu = {_{\prime}\nu''}\mu - \nu\mu = \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Die sämtlichen Bewegungen, welche von den auf der zunächst um ν liegenden Zone befindlichen Punkten ausgehen, treiben zur Zeit τ den Punkt μ nach derselben Richtung, da die Phasendifferenz dieser Bewegungen kleiner als $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Die von den Punkten der zweiten Zone $_{\prime}\nu'$ $_{\prime\prime}\nu'$ $_{\prime}\nu''$ $_{\prime\prime}\nu''$ ausgehenden Bewegungen treiben den Punkt μ dagegen nach entgegengesetzter Richtung, da alle Strahlen dieser Zone gegen die entsprechend liegenden der vorigen, zunächst um ν liegenden Zone um eine halbe Wellenlänge verschoben sind. Die von der dritten Zone ausgehenden Bewegungen sind gegen die der ersten um eine ganze Wellenlänge verschoben, sie besitzen also keine Phasendifferenz gegen jene und bewegen demnach den Punkt μ wieder in demselben Sinne. Ihnen entgegen wirken aber die Strahlen der vierten Zone, welche eine Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\lambda$ mit den von den Punkten der dritten Zone herrührenden Bewegungen besitzen.

Ebenso ist es mit allen folgenden Zonen, so daſs die abwechselnden Zonen stets Bewegungen in μ erzeugen, welche eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge besitzen, welche sich also gegenseitig schwächen.

Die resultierende Bewegung in μ wird also wesentlich von der Amplitude abhängig sein, welche jede der Zonen in μ erzeugt. Diese aber hängt von zwei Umständen ab, einmal nämlich von der Anzahl der in jeder Zone schwingenden Punkte, und dann von der Neigung der in jeder Zone statt-

ıdenden Schwingungen gegen die in μ durch den Punkt ν des Radius regte Schwingung. Denn betrachten wir nur transversale Schwingungen, kann z. B. von der sechsten Zone her nur die Komponente in Betracht mmen, welche zu $\nu\mu$ senkrecht ist. Zur Berechnung der Resultierenden üfsten wir also die Summe der von allen Zonen kommenden Schwingungen lden, jede multipliciert mit dem Cosinus des Neigungswinkels, den sie it der Schwingung bei ν bildet. In dieser Form würde die Lösung des roblems die gröfste Schwierigkeit bieten. Glücklicherweise kann man das roblem auch anders anfassen, indem man nur die Wirkungen der unmittelar benachbarten Zonen vergleicht, also die der zweiten mit jenen der sten und dritten, die der vierten mit jeden der dritten und fünften. Da e Neigungen der unittelbar benachbarn Zonen nur äufserst enig verschieden sind, können wir bei dieır Betrachtungsweise e Verschiedenheit rselben vernachlässen und die von jeder ne in μ erregte Begung der Gröfse der ne, der Anzahl der ı ihr schwingenden Punkte, proportional setzen. Wir haben deshalb nur ie Gröfse der einzelnen Zonen zu berechnen; sei zu dem Ende MN der urchschnitt durch ein Stück der primären Welle, welche nach μ ihre chwingungen sendet, und seien $\nu_1\,\nu_2$, $\nu_2\,\nu_3$ die Durchschnitte durch zwei nachbarte Zonen, so dafs die Abstände ihrer Grenzen von μ sich um $\frac{\lambda}{2}$ nterscheiden, so dafs also

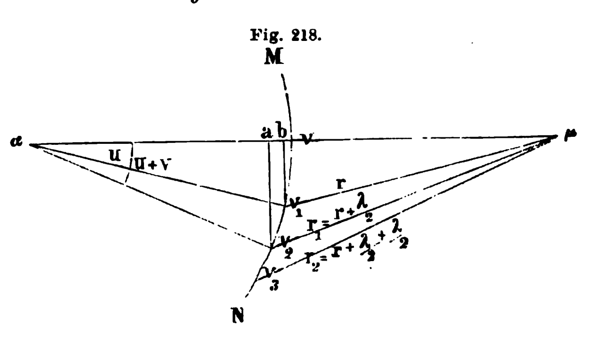


Fig. 218.

$$r_1 = r + \frac{\lambda}{2},\; r_2 = r_1 + \frac{\lambda}{2}$$

ist. Denken wir uns den Durchschnitt um $a\mu$ als Axe rotiert, so beschreibt r Bogen MN das betreffende Stück der primären Welle, und der Bogen ν_2 die zwischen r und $r + \frac{\lambda}{2}$ liegende Zone. Um die Gröfse derselben erhalten, denken wir uns bei ν_1 ein unendlich kleines Stück des Schnittes, sen Länge im Bogenmafs wir mit du bezeichnen, dessen Länge in Linienfs also $a \cdot du$ ist, wenn wir den Radius der primären Welle mit a behnen. Der Abstand dieses Elementes von der Drehungsaxe ist $\nu_1 b$, die öfse der von demselben beschriebenen Zone somit gleich $2\pi \cdot \nu_1 b \cdot a \cdot du$. tzen wir jetzt den Winkel $\nu_1\, a\, \mu$ gleich u, so ist $\nu_1 b = a \cdot \sin u$ und mit die Gröfse der von dem Element du beschriebenen Zone $2\pi a^2 \sin u\, du$. des Element du des Durchschnittes $\nu_1\,\nu_2$ beschreibt eine solche Zone, und Summe aller dieser Elementarzonen ist die gesuchte Zone. Die einn Elementarzonen erhalten wir, wenn wir in dem eben abgeleiteten lrucke nach und nach für u alle Werte einsetzen von $u = \nu_1\, a\, \mu = u$ $= \nu_2\, a\, \mu = u + v$, wenn wir den Winkel $\nu_1\, a\, \nu_2 = v$ setzen. Wir n diese Summe schreiben, wenn wir die Gröfse der Zone gleich Z_n setzen

$$Z_n = \int_u^{u+v} 2\pi a^2 \cdot \sin u \, du = 2\pi a^2 \int_u^{u+v} \sin u \, du$$

und erhalten dann in oft gemachter Anwendung der Regeln der mathe
matischen Einleitung

$$Z_n = 2\pi a^2 \{\cos u - \cos(u+v)\}.$$

Setzen wir den Abstand der primären Welle von μ gleich b, al
$\alpha\mu = a + b$, so ist nach einem bekannten Satze der Trigonometrie

$$r^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b) \cdot \cos u$$

$$\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b) \cdot \cos(u+v)$$

$$\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - r^2 = r\lambda + \frac{\lambda^2}{4} = 2a(a+b)\{\cos u - \cos(u+v)\}$$

$$\cos u - \cos(u+v) = \frac{1}{2a(a+b)}\left(r\lambda + \frac{\lambda^2}{4}\right),$$

so dafs schliefslich die gesuchte Gröfse der Zone wird

$$Z_n = \frac{\pi a}{a+b}\left(r\lambda + \frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Die Gröfse der folgenden Zone erhalten wir aus diesem Ausdru
sofort, indem wir für r einsetzen $r_1 = r + \frac{\lambda}{2}$, dieselbe wird damit

$$Z_{n+1} = \frac{\pi a}{a+b}\left(r\lambda + 3\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

und die Gröfse der auf diese folgenden Zone, wenn wir zu r nochmals
addieren, also

$$Z_{n+2} = \frac{\pi a}{a+b}\left(r\lambda + 5\frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Wir sehen also, dafs die Gröfsen der auf einander folgenden Zo
nicht gleich sind, dafs aber

$$Z_{n+1} = \tfrac{1}{2}(Z_n + Z_{n+2}),$$

oder die Gröfse jeder einzelnen Zone ist genau gleich der halben Sum
der vorhergehenden und der nachfolgenden Zone. Mit diesem Satze
unsere Aufgabe gelöst, denn es folgt nach der vorhin gemachten Bemerku
dafs die Wirkung der zweiten Zone durch die halbe erste und halbe dri
die der vierten durch die halbe dritte und halbe fünfte Zone aufgehol
wird, und so fort über die ganze primäre Welle, soweit von derselben B
wegung nach μ kommt. Es bleibt somit nur die von der halben unmitt
bar um ν liegenden Zone ausgehende Bewegung übrig; die Bewegung (
Punktes μ ist also ganz dieselbe, als wenn nur in der Richtung $\alpha\nu\mu$ (
Bewegung sich fortgepflanzt hätte, also in der Richtung des durch α und
gelegten Radius.

Wir gelangen demnach durch die Huyghenssche Konstruktion ganz
denselben Resultaten wie nach der im vorigen Paragraphen dargelegt

nschauung über die Fortpflanzung der Wellenbewegung; wir werden daher
spätern Fällen sowohl die eine als die andere Anschauungsweise an-
enden können.

§ 134.

**Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen; Re-
exion der Wellen.** Ein nicht homogenes Punktsystem können wir, wie
ereits erwähnt, als aus homogenen Punktsystemen zusammengesetzt an-
ehen. In den einzelnen Teilen des Systems wird daher die Fortpflanzung
er Wellenbewegung denselben Gesetzen folgen, wie in einem homogenen
ystem. Die Bewegung wird sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzen,
enn die einzelnen Systeme isotrop sind, in anders geformten, wenn sie
nisotrop sind. Um demnach die Fortpflanzung der Wellen in nicht homo-
enen Systemen vollständig zu bestimmen, haben wir nur die Erscheinungen
u untersuchen, welche beim Übergange einer Wellenbewegung aus dem
inen Punktsysteme in ein anderes sich darbieten.

Wenn eine Wellenbewegung sich in einem homogenen Mittel, das
eifst in einem von gleichförmiger Dichte und Elasticität fortpflanzt, so
ann sie niemals zurückkehren, vielmehr läfst sie beim Übergange auf neue
chichten die vorhergehenden in absoluter Ruhe zurück. Ebenso wie eine
ugel, wenn sie auf eine zweite von gleicher Masse stöfst, an diese ihre
anze Geschwindigkeit abgibt und nach dem Stofse in Ruhe zurückbleibt,
o überträgt auch jeder schwingende Punkt auf den ihm an Gröfse genau
leichen folgenden seine ganze Geschwindigkeit. In der Ruhelage an-
ekommen, verläfst er dieselbe daher nicht mehr, wenn nicht ein neuer
mpuls von dem bewegenden Mittelpunkt her ihn trifft. Die Wellen-
ewegung schreitet daher in einem homogenen Punktsystem einfach voran,
hne je zurückzukehren.

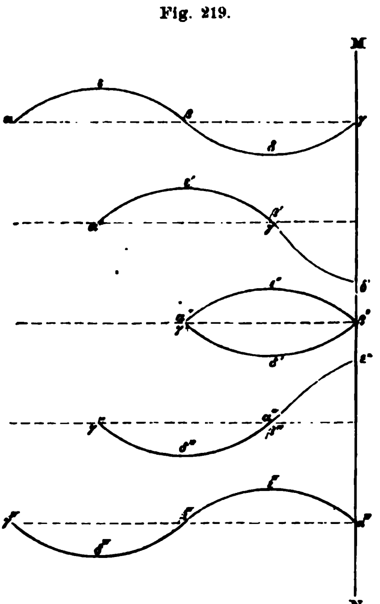
Anders jedoch, wenn eine Wellenbewegung die Grenze zweier ver-
chiedener Punktsysteme trifft. Wenn eine Kugel auf eine zweite stöfst,
elche mehr oder weniger Masse als die erste besitzt, so bleibt sie in
eiden Fällen nach dem Stofse noch in Bewegung. Hat die zweite Kugel
ehr Masse als die erste, so wird die erste Kugel zurückgeworfen, die ge-
offene Kugel bewegt sich vorwärts, die stofsende ihrer frühern Bewegung
ntgegen zurück. Hat die zweite Kugel eine geringere Masse, so fährt die
tofsende Kugel fort, sich in gleichem Sinne wie vorhin zu bewegen. So
uſs es auch bei der Wellenbewegung sein, wo die Bewegung der einzelnen
unkte Folge der Einwirkung der benachbarten Punkte ist. Kommt eine
ewegung an der Grenze zweier Mittel an, so wird die Bewegung in das
weite Mittel übergehen und dort eine Wellenbewegung erzeugen, die sich
ach den für dieses System gültigen Gesetzen fortpflanzt. Zugleich bleiben
ber auch die in der letzten Schicht des ersten Mittels liegenden Punkte in
ewegung.

Ist das zweite System weniger dicht, so werden die in der Grenzschicht
genden Punkte einfach ihre Bewegung fortsetzen, nur wird die Amplitude
r folgenden Bewegung kleiner sein. Dadurch werden diese
ttelpunkte neuer Wellen, welche sich rückwärts im ersten Sy
eiten, und da die Bewegungen der Mittelpunkte dieser ne
nde so erfolgen, als wären sie Folge neuer Impulse von ank

Wellen, so müssen auch die von der Grenze zurückkehrenden Welle fach die Fortsetzung der ankommenden Wellen sein, d. h. die Phas Schwingungen in den zurückkehrenden Wellen sind in irgend eine stande von der Grenze ganz dieselben, als wenn sich die Bewegung ir ursprünglichen Richtung um eine gleiche Strecke weiter fortgepflanzt

Stelle $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 219) eine an der Grenze zweier Mittel, von das zweite Mittel weniger dicht ist als das erste, ankommende Wel Der Punkt γ wird infolge der einfallenden Welle bewegt und nach dulation sich in δ' befinden. Da derselbe aber an die weiter lie Punkte des zweiten Mittels nur einen Teil seiner Geschwindigkeit so behält er einen Teil der an ihn übertragenen Bewegung bei. Die nun dasselbe, als wenn er seine ganze Bewegung abgäbe, zugleic einen neuen Impuls in derselben tung, in der er sich bewegt, e hätte, deshalb pflanzt sich in dem A blicke, wo sich der Punkt γ bewe nach unten gerichtete Bewegung Wellenthal, auch nach rückwärt Da sich nun die Bewegung in der reihe nach rückwärts mit derselb schwindigkeit fortpflanzt, mit d ankommt, ist die reflektierte Bew nach $\frac{1}{4}$ Undulationszeit bis γ' geschritten, so dafs die vordere des reflektierten Thales und die des ankommenden Thales in $\beta'\delta$ $\gamma'\delta'$ zusammenfallen; die Tiefe der Grenze entstehenden Welle ist also die Summe der Tiefen d kommenden und des reflektierten Weiter nach $\frac{1}{4}$ Schwingungsdaue wieder in seiner Ruhelage angek in β'', und der Wellenberg $\alpha\varepsilon\beta$ an die Grenze $\alpha''\varepsilon''\beta''$ vorgesc Das reflektierte Thal hat sich abe falls um $\frac{1}{2}$ Wellenlänge nach rückwärts fortgepflanzt und befind in $\gamma''\delta''\beta''$. An der Grenze wird daher für einen Augenblick die Bew gestört, indem durch Interferenz der ankommenden und reflectierten die zwischen α'' und β'' befindlichen Punkte nur durch die Differe entgegengesetzten Impulse bewegt wird.

Fig. 219.



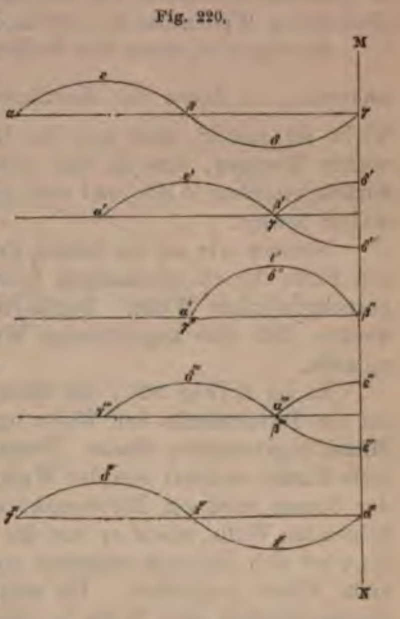
Nach einer weitern $\frac{1}{4}$ Schwingungszeit ist das reflektierte Th $\gamma'''\delta'''\beta'''$ fortgeschritten, der in der Grenze befindliche Punkt hat i des eingetroffenen Wellenberges sich nach der entgegengesetzten nach ε''' bewegt. Wieder aber hat sich die Bewegung dieses Punk die rückwärts liegenden übertragen, da er wegen der geringern Dich des zweiten Mittels nicht einen so grofsen Teil seiner Geschwindigk die folgenden Punkte abgegeben hat. Die Höhe des Wellenberges a Grenze ist daher viel bedeutender als diejenige in den fortschreit Wellen, und von der Grenze aus pflanzt sich dem vorher reflektierten

ein Wellenberg fort. Nach einer weitern $\frac{1}{4}$ Undulation befindet s reflektierte Thal in $\gamma^{IV}\,\delta^{IV}\,\beta^{IV}$ und ihm folgend der vollständig rte Berg $\beta^{IV}\,\varepsilon^{IV}\,\alpha^{IV}$.

rade also wie in der ankommenden Wellenbewegung das Wellenthal ellenberge vorausgeht, so auch im reflektierten, die Bewegung ist in ektierten Welle dieselbe, wie wenn sie ungestört, nur mit kleinerer ide fortgeschritten wäre. Gerade wie das Wellenthal fortschreitend nächsten Strecke der Punktreihe ein Wellenthal und der Wellenberg Vellenberg erzeugt, so erzeugt auch bei der Reflexion das ankom- Wellenthal ein rückkehrendes Wellenthal und der ankommende berg einen zurückkehrenden Berg.

nders verhält es sich, wenn das zweite Mittel eine gröfsere Dichtig- itzt. Die bei der longitudinalen Schwingung sich gegen das zweite bewegenden Punkte werden zurückgestofsen, und die sich von der entfernenden zurückgezogen, in Falle also wird die ankommende ng in die entgegengesetzte ver- ; so auch bei der transversalen ng; die sich in dem einen oder Sinne von der Gleichgewichtslage nden Punkte werden von den en Punkten des zweiten Mittels zurückgezogen, als wenn die en Schichten gleiche Dichtigkeit Die Wirkung des dichtern Mittels dieselbe, als wenn die in der befindlichen Punkte, weil ihre ng gehemmt wird, einen ihrer ng entgegengesetzten Impuls er- hätten. Dadurch werden sie nkte einer neuen, in dem Augen- vo die erste ankommt, beginnen- vegung, welche der Richtung nach kommenden entgegengesetzt ist. er ankommenden entgegengesetzte ng pflanzt sich in dem ersten stem rückwärts fort.

Fig. 220.



ellt demnach $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 220) eine an der Grenze zweier Mittel, weites rechts von MN dichter ist, ankommende Welle dar, so wird ommende Wellenthal als Wellenberg reflektiert; nach der Zeit von ingung ist daher die Stellung der zwischen β' und der Grenze ge- Punkte durch die Differenz der ankommenden und reflektierten bestimmt, das Wellenthal hat eine viel kleinere Tiefe, als es bei derter Fortpflanzung der Bewegung haben würde. Nach einer fol- $\frac{1}{4}$ Schwingungszeit ist der aus dem ankommenden Thal reflektierte die Stellung $\gamma''\delta''\beta''$ fortgepflanzt, und ebenso ist der Wellen- γ bis $\alpha''\varepsilon''\beta''$ vorgerückt, an der Wand bildet sich ein aus beiden resultierender stärkerer Wellenberg. In der folgenden Zeit rückt der rte Berg nach $\gamma'''\delta'''\beta'''$, der ankommende ist zur Hälfte in $\alpha'''\varepsilon'''$,

zur Hälfte als Thal reflektiert $\beta''' \varepsilon'''$, an der Wand besteht ein Berg von geringerer Höhe. Nach weiterm Verlauf einer $\frac{1}{4}$ Undulationszeit ist schließlich der aus dem Wellenthal reflektierte Wellenberg nach $\gamma^{IV} \delta^{IV} \beta^{IV}$ vorgerückt und der zuletzt an der Grenze angekommene Wellenberg ist als Wellenthal reflektiert und hat die Lage $\beta^{IV} \varepsilon^{IV} \alpha^{IV}$.

Während also bei der ankommenden Bewegung das Wellenthal dem Wellenberge vorausging, geht in der reflektierten umgekehrt der Wellenberg dem Wellenthale voraus. Die reflektierte Bewegung hat also mit der ankommenden entgegengesetzte Phasen; bei ungestörter Fortpflanzung wäre das ankommende Thal in der nächsten Strecke wieder Anlaſs zur Bildung eines Thales geworden, hier hat es einen Berg hervorgerufen. Durch die Reflexion ist also der reflektierte Strahl gegen den einfallenden um eine halbe Wellenlänge verschoben.

Die in beiden Fällen reflektierten Bewegungen sind demnach ebenfalls in gleichen Abständen von der Grenze in entgegengesetzter Phase, wo in dem ersten Wellenthal ist, ist in dem zweiten Wellenberg und umgekehrt.

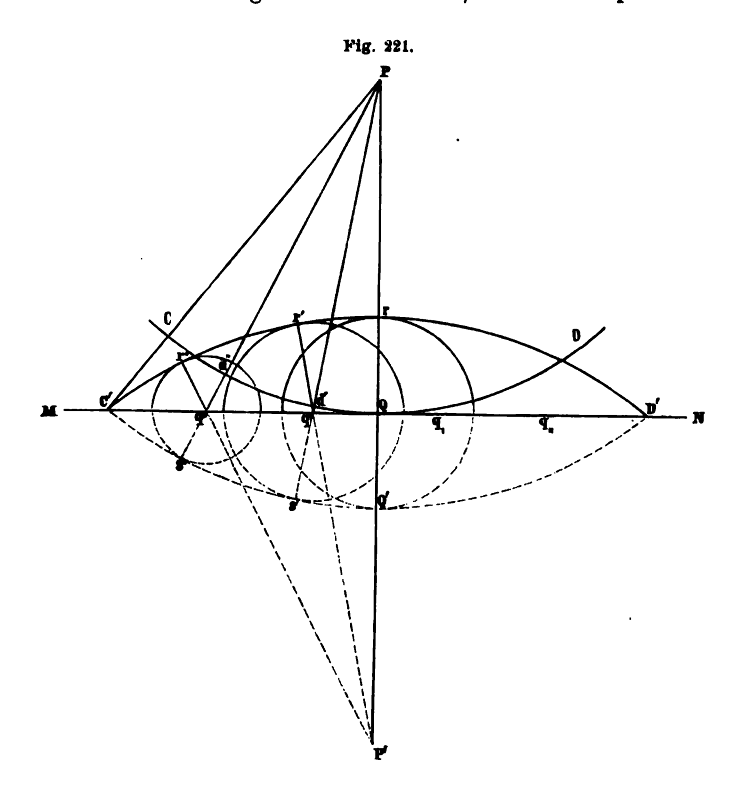
Es folgt also, wenn eine Wellenbewegung an der Grenze zweier Systeme ankommt, in denen der Koefficient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ verschiedene Werte hat, so bewirkt sie immer, daſs von der Grenzstelle aus sich zwei Wellensysteme weiter bewegen, eine in das erste Mittel zurück, eine reflektierte oder zurückgeworfene Welle, und eine zweite, welche in dem zweiten Mittel sich weiter bewegt.

Nehmen wir an, die beiden Punktsysteme seien isotrop, so erhält man mit Hülfe der Huyghensschen Konstruktion leicht die fortschreitende und zurückgeworfene Welle. Beginnen wir mit der letztern und setzen wir voraus, daſs eine kugelförmige Welle an der ebenen Grenze zweier Mittel antreffe.

Es sei P (Fig. 221) der Mittelpunkt der Welle im ersten Mittel, CD sei ein Durchschnitt der Welle und MN ein Durchschnitt der das erste Mittel begrenzenden Ebene. Ferner sei PQ senkrecht zu MN, also Q der erste Punkt, welcher von der Wellenbewegung getroffen wird. Jeder Punkt der Grenze wird ein Mittelpunkt einer neuen in das erste Mittel zurückkehrenden Welle, sowie er von der ankommenden Bewegung getroffen wird. Es wird sich demnach zunächst von dem Punkte Q eine Bewegung in das erste Mittel ausbreiten. Da nun, wie wir sahen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle in einem elastischen Punktsystem nur abhängt von dem Quotienten $\sqrt{\frac{e}{d}}$, so verbreitet sich die zurückgeworfene Welle mit eben derselben Geschwindigkeit, mit welcher sich die einfallende Welle verbreitet; in der Zeit also, in welcher von den Punkten D oder C, [illegible] denen wir der Symmetrie halber annehmen, daſs sie gleichweit von Q [illegible] fernt sind, sich die schwingende Bewegung bis D' oder C' fortgepflanzt hat, wo also von diesen Punkten aus die Wellenbewegung reflektiert zu werden beginnt, pflanzt sich von Q aus die Bewegung bis zu einer Halbkugel [illegible] deren Radius $Qr = CC'$ ist. Die neben Q liegenden Punkte der Grenzschicht q', q'', $q_{,}$, $q_{,,}$ werden immer später von der Wellenbewegung [illegible] troffen, und zwar so viel später, als die Bewegung der ankommenden W[illegible] braucht, um die Strecke $d'q'$, $d''q''$ zu durchlaufen. In derselben [illegible]

in welcher sich die Bewegung von Q bis zu einer Halbkugel vom
Qr fortpflanzt, verbreitet sie sich von q' bis zu einer Halbkugel
adius $q'r' = Qr - q'd'$ von q'' bis zu einer Halbkugel vom Radius
$= Qr - q''d''$ und so von allen übrigen Punkten bis zu einer Halb-
deren Radius um die Länge kleiner ist als Qr, welche die Wellen-
ıng noch hat durchlaufen müssen, um den betreffenden Punkt in
gungen zu versetzen.
ie Grenze, bis zu der sich demnach die Wellenbewegung in dem
Mittel rückwärts ausgebreitet hat, ist die Fläche, welche alle diese
ən Kugeln berührend umhüllt. Es ist leicht ersichtlich, daſs diese
$C'r''r'rD'$ eine Kugelfläche sein muſs, deren Mittelpunkt P' ebenso

Fig. 221.



nter MN liegt, als der Punkt P, von welchem die ankommende
ıusging, vor MN liegt. Denn denken wir uns, daſs die Welle un-
rt hätte fortschreiten können, so geben die andern Hälften der
s um Q, q', q'' ··· beschriebenen Kugeln, nach der Huyghensschen
ıktion, die Wellenfläche $C'Q'D$, bis zu der sich die Bewegung in
ən Zeit fortgepflanzt hätte, in der sie in der Richtung PC sich bis
rtpflanzte. Die diese Kugeln nach der einen Seite einhüllende Fläche
·, wie wir sahen, eine Kugel vom Radius $PC' = PQ' = PD'$. Die
welche diese Kugeln von der andern Seite einhüllt, muſs daher eine
von demselben Radius sein, die ihre Konvexität jedoch nach der

entgegengesetzten Seite richtet, deren Mittelpunkt also in P' liegt, so dafs $PQ' = P'r$, oder da $Qr = QQ'$, $P'Q = PQ$ ist.

Von einer ebenen Grenze zweier Punktsysteme wird demnach eine ankommende Welle gerade so reflektiert, als ginge sie von einem Mittelpunkte aus, welcher ebenso weit hinter dieser Grenze, wie der Mittelpunkt der ankommenden Welle vor der Grenze liegt.

Dieser Satz läfst sich in etwas anderer Form aussprechen, in welcher er in manchen Fällen leichter angewandt wird.

Aus der Gleichheit $P'Q = PQ$ folgt, dafs die Dreiecke $P'C'Q$ und $PC'Q$, $P'q''Q$ und $Pq''Q$, $P'q'Q$ und $Pq'Q$ etc. sich decken und daraus, dafs die Winkel

$$P'q''Q = Pq''Q,$$
$$P'q'Q = Pq'Q \text{ etc.},$$

oder da die Winkel $P'q''Q = r''q''C'$ und $P'q'Q = r'q'C'$ sind als Scheitelwinkel, dafs die Winkel

$$Pq''Q = r''q''C',$$
$$Pq'Q = r'q'C',$$

oder die Winkel, unter welchen die Radien der ankommenden und reflektierten Welle die Grenzfläche schneiden, einander gleich sind. Nach unserer ersten Anschauung von der Art der Fortpflanzung der Wellenbewegung in einem Punktsystem waren die Radien der Wellenfläche die einzelnen Punktreihen, in welchen sich die Bewegung fortpflanzte. Nennen wir mit Rücksicht darauf die Radien die Wellenstrahlen, so können wir obigen Satz auch so aussprechen, dafs bei der Reflexion einer Wellenbewegung die reflektierten Strahlen und die ankommenden mit der reflektierenden Fläche gleiche Winkel bilden.

Man bezeichnet gewöhnlich die Vertikale, welche in dem Punkte der Trennungsfläche beider Mittel errichtet wird, als das Einfallslot und den Winkel, welchen der ankommende Wellenstrahl mit demselben bildet, als Einfallswinkel, den hingegen, welchen der reflektierte Strahl mit ihm einschliefst, als Reflexionswinkel.

Sind nun die Winkel, welche der ankommende und der reflektierte Strahl mit der reflektierenden Fläche einschliefsen, einander gleich, so sind es auch diejenigen, welche sie mit dem Einfallslote bilden, woraus dann folgt, dafs eine Wellenbewegung so reflektiert wird, dafs der einfallende und reflektierte Strahl mit dem Einfallslot in einer Ebene liegen, und dafs der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist.

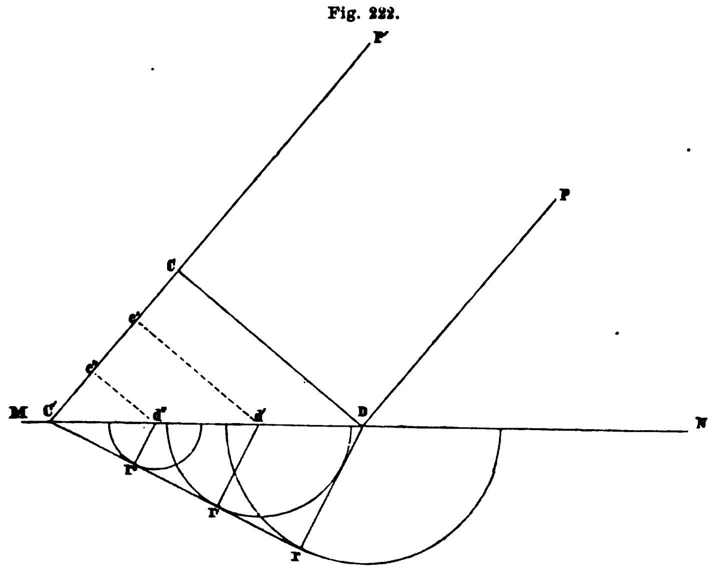
Diese Form unseres Satzes ist besonders bequem, um die Gesetze der Reflexion an krummen Flächen zu erhalten. Wir können diese als eine stetige Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, deren Normalen nicht wie bei einer Ebene einander parallel, sondern immer anders gerichtet sind. Für jede noch so kleine Ebene gilt unser Reflexionsgesetz; kennt man daher das Gesetz, nach welchem die Normalen der auf einander folgenden kleinen Ebenen geneigt sind, so hat man darin zugleich an allen Punkten die Richtung, nach welcher ein einfallender Strahl und somit eine ankommende Wellenbewegung reflektiert wird.

Ist z. B. die Grenze zweier Mittel eine Kugelfläche, so fallen die in dem Punkte der Fläche errichteten Senkrechten mit den Radien der Kugel usammen. Eine an der Grenze ankommende Wellenbewegung wird daher o zurückgeworfen, dafs die an jedem einzelnen Punkte reflektierten Strahlen nd die ankommenden mit den Radien der Grenzfläche gleiche Winkel ilden. Kommt die Wellenbewegung aus dem Mittelpunkte der Kugel, also der Richtung der Radien an, so wird jeder Strahl nach dem Mittelpunkte urückgeworfen, die Bewegung kehrt in den Mittelpunkt der Kugel zurück.

§ 135.

Brechung der Wellen. Von der Grenze zweier Punktsysteme pflanzt ich, wie wir sahen, aufser in das erste System zurück, auch eine Wellenewegung in das zweite System fort. Jeder Punkt der Grenzschicht wird, obald als die ankommende Bewegung ihn trifft, Mittelpunkt einer Welle, ie sich in das zweite System fortpflanzt, mit einer andern Geschwindigkeit doch, als sich die Bewegung in dem ersten Systeme fortpflanzte. Ist das weite System dichter als das erste, d. h. ist der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ kleiner für s zweite System als für das erste, so pflanzt sich die Bewegung im zweiten ittel langsamer, ist derselbe gröfser, so pflanzt sich dieselbe rascher fort.

Fig. 222.



Sei CD (Fig. 222) ein sehr kleines Stück einer Wellenfläche, welches dem ersten System sich in der Richtung PD gegen die Grenze MN der Mittel bewegt. Nehmen wir ferner an, dafs der Mittelpunkt der kommenden Welle, von der CD ein Stück ist, so weit entfernt sei, dafs CD als eine zur Ebene NDP senkrechte Ebene und die Wellenstrahlen und $P'C$ als parallel ansehen können. In dem Augenblicke, in welchem Wellenstück CD bei D die Grenze MN berührt, verbreitet sich von D eine Welle in dem zweiten Systeme.

Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem ersten System v u dem zweiten v', so verhalten sich die Strecken, durch welche sich die W bewegung in gleichen Zeiten fortpflanzt, wie v zu v'.

Der Radius Dr der Kugel, über welche sich die Wellenbewegu zweiten Mittel ausbreitet, während dieselbe im ersten sich von C l fortpflanzt, ist daher

$$Dr = CC' \cdot \frac{v'}{v} \cdot$$

Von den zwischen D und C' gelegenen Punkten verbreiten sich falls Wellenbewegungen in das zweite Mittel, aber um so später, : selbst von der fortschreitenden Wellenbewegung getroffen werden. irgend einem Punkte d' beginnt sich die Bewegung erst zu verbreiten die Bewegung im ersten Mittel bis $c'd'$ fortgeschritten ist. Hat si Bewegung im ersten Mittel bis C' fortgepflanzt, so hat sich von d' di im zweiten Mittel über eine Kugel ausgebreitet, deren Radius ϱ glei

$$\varrho = c'C' \cdot \frac{v'}{v} \cdot$$

Diese Grenze, bis zu der sich die Bewegung im zweiten Mitte gepflanzt hat, wenn sie im ersten Punktsystem bis C' fortgeschritt ist dann die Fläche, welche alle Kugeln, die um die verschiedenen Pu beschrieben sind, berührt.

Diese Fläche erhalten wir, wenn wir durch C' eine Tange den um D beschriebenen Halbkreis ziehen und durch diese eine zur $C'Dr$ senkrechte Ebene legen. Denn diese Ebene berührt nicht n um D mit dem Radius Dr beschriebene Kugel, sondern auch sämtlic den betreffenden Radien um die Punkte d beschriebenen Kugeln. ziehen wir von d' aus $d'r'$ senkrecht zu $C'r$, so sind die Dreiecke und $C'r'd'$ ähnlich, somit

$$d'r' : Dr = C'd' : C'D.$$

Ebenso sind aber auch die Dreiecke CDC' und $c'd'C'$ ähnlic somit

$$C'd' : C'D = c'C' : CC'.$$

Da nun ferner

$$Dr = CC' \cdot \frac{v'}{v},$$

so ist

$$d'r' : CC' \cdot \frac{v'}{v} = c'C' : CC',$$

oder

$$d'r' = C'c' \cdot \frac{v'}{v},$$

das heifst die von d' auf $C'r$ herabgelassene Senkrechte ist der Radi Kugel, die mit dem Radius ϱ um d' beschrieben ist, oder $C'r$ ist Ta an dem Durchschnitt der Kugel mit der Ebene NDP und somit die Cr gelegte Ebene Tangentialebene an die um d' beschriebene Kugel. E gilt es für alle um die Punkte d' beschriebenen Kugeln.

Bezeichnen wir nun die Winkel CDC' und $DC'r$, welche die ankommende und die in das zweite System übergegangene Welle mit der Grenzfläche bilden, mit φ und φ', so haben wir

$$\sin \varphi = \frac{CC'}{C'D},$$

$$\sin \varphi' = \frac{Dr}{C'D} = \frac{\frac{v'}{v} \cdot CC'}{C'D},$$

und daraus

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \frac{v}{v'}.$$

Der Winkel, welchen die in das zweite Mittel übergegangene Welle mit der Grenzebene bildet, ist also ein anderer als derjenige, welchen die ankommende Welle mit der Grenzfläche bildet, oder was dasselbe ist, die in das zweite Mittel übergegangenen Wellenstrahlen bilden mit dem Einfallslote andere Winkel als die ankommenden Strahlen. Da aber das Verhältnis $\frac{v}{v'}$ für zwei Mittel konstant ist, so folgt, daſs die ankommende Welle unter einem Winkel ankommen kann, unter welchem sie will, sie bewegt sich stets unter einem solchen Winkel gegen die Grenzebene weiter, daſs das Verhältnis der Sinus des Winkels, unter welchem sie ankommt, und des Winkels, unter dem sie weiter geht, konstant ist. Zugleich sieht man, daſs der einfallende und gebrochene Wellenstrahl und das Einfallslot in derselben Ebene liegen.

Jede an der Grenzebene ankommende kugelförmige Welle können wir als eine Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, die alle verschieden gegen die Grenzfläche geneigt sind, deren Neigung gegen die Grenzfläche aber bestimmt wird durch den Winkel, welche die zu ihnen gehörenden Wellenstrahlen, die einzelnen Radien, mit dem Einfallslot bilden. Mit Hülfe des obigen Satzes ist es leicht, die fortgepflanzte Welle im zweiten Punktsystem zu konstruieren.

Wir erhalten als unmittelbare Folge aus unserem Satze, daſs beim Übergange einer Wellenbewegung aus einem Punktsystem in ein zweites, für welches der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ kleiner ist als für das erste, der Winkel, welchen der in das zweite Mittel übergegangene Strahl mit dem Einfallslote bildet, kleiner ist als der Winkel, welchen der ankommende Wellenstrahl mit demselben einschlieſst. Ist dagegen dieser Quotient gröſser für das zweite als für das erste Mittel, so ist der Winkel, welchen der in das zweite Mittel übergegangene Strahl mit dem Einfallslote bildet, gröſser. Beim Übergange einer Wellenbewegung aus einem Mittel in ein zweites werden daher die einzelnen Wellenstrahlen stets gebrochen; beim Übergange in ein Mittel von gröſserer Dichtigkeit werden sie zum Einfallslote hingebrochen, beim Übergange in ein Mittel von geringerer Dichtigkeit werden die Strahlen vom Einfallslote fortgebrochen.

Jede krumme Fläche können wir, wie schon bemerkt wurde, als eine Reihenfolge unendlich kleiner Ebenen betrachten, welche in steter Folge

gegen einander geneigt sind. Für krumme Begrenzungen zweier Mittel mufs daher das Brechungsgesetz dasselbe sein; um den Weg der einzelnen Strahlen zu bestimmen, mufs man aber das Gesetz kennen, nach welchem die einzelnen, unendlich kleinen Ebenen oder deren Einfallslote gegen einander geneigt sind[1]).

Zweites Kapitel.

Von der Wellenbewegung fester Körper.

§ 136.

Schwingende Bewegung einzelner Teile fester Körper infolge der Elasticität. Die im vorigen Kapitel aus den früher erkannten Gesetzen über die Wirkung von Kräften theoretisch abgeleiteten Bewegungserscheinungen können wir in der mannigfachsten Weise in den Körpern hervorbringen. Alle Körper bestehen nach den Entwickelungen des § 46 aus kleinen Teilen, welche durch anziehende und abstofsende zwischen ihnen thätige Kräfte entweder allein wie bei den festen Körpern oder mit Hülfe äufserer Kräfte wie bei den flüssigen und gasförmigen Körpern im Gleichgewicht gehalten werden.

Durch eine Änderung der auf die Körper wirkenden Kräfte wird stets auch eine Änderung dieses Gleichgewichtszustandes herbeigeführt,

[1]) Die in diesem Kapitel vorgetragenen Sätze finden sich vorzugsweise in den Abhandlungen von *Fresnel* und andern über die Undulationstheorie des Lichtes zuerst in ähnlicher Form entwickelt. Es gilt das besonders von der Ableitung der Gleichungen für die schwingende Bewegung § 123 bis § 130. Dieselben befinden sich in:

Fresnel, Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mémoires de l'Acad. de France Tome V. Poggend. Ann. Bd. XXX. Oeuvres complètes. T. I.

Die Sätze über Interferenz der Wellen § 128 in derselben Abhandlung von *Fresnel*, und *Schwerd*, die Beugungserscheinungen des Lichtes. Mannheim 1835.

Die stehenden Wellen durch Interferenz entgegengesetzter Wellenzüge leitet Fresnel ähnlich ab in seiner Abhandlung über die Doppelbrechung des Lichtes: Mémoires de l'Acad. de France. Tome VII. Poggend. Ann. XXIII. Oeuvres complètes. T. II. p. 479 ff.

Auf die elliptischen Schwingungen machte zuerst aufmerksam Fresnel in seiner Abhandlung über Reflexion des polarisierten Lichtes: Annales de chim. et de phys. XLVI. Poggend. Ann. XXII. *Airy*, Über die Doppelbrechung im Bergkrystall im 4. Bande der Transactions of the Cambridge Philosophical society. Poggend. Ann. XXIII. Die von uns gegebene Ableitung ist im wesentlichen die von *Neumann* in der Abhandlung über die Reflexion an Metallen. Poggend. Ann. XXVI. Man sehe darüber auch *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig, 1853. Die Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge ist besonders von *Lissajous* studiert und für akustische Zwecke nutzbar gemacht. Annales de chim. et de phys. 3. Sér. t. LI.

Die Fortpflanzung der Wellen in Punktsystemen und das Huyghenssche Princip ist zuerst von *Huyghens* in seinem Werke Traité de la lumière, Leiden 1690, entwickelt, ebenso die Ableitung des Reflexions- und Refraktions-Gesetzes. Vollständiger von Fresnel in der erwähnten Abhandlung über die Beugung des Lichtes und in einem Zusatz derselben: Erklärung der Refraktion des Lichtes, nach der Undulationstheorie. Auf den Unterschied der Reflexion an dichtern und dünnern Systemen machte zuerst *Thomas Young* aufmerksam. On the theory of light and colours. Philosoph. Transact of the Royal Society for 1802.

treten Gestaltsänderungen der festen Körper oder Bewegungen in den ssigen oder gasförmigen Körpern hervor, welche wir in dem zweiten Abhnitte ausführlich betrachtet haben.

Beschränken wir uns zunächst auf die festen Körper, so sahen wir, e Stäbe durch angehängte Gewichte verlängert, oder durch Druck verrzt wurden, wie durch Drehung um eine im Innern derselben liegende te die einzelnen Schichten der Stäbe gegen einander verschoben wurden, er wie durch Biegung denselben eine andere Gestalt gegeben werden nnte.

Zugleich sahen wir aber stets bei der Änderung des Gleichgewichtsstandes eines Körpers eine Reaktion auftreten, die uns zeigte, dafs inlge dieser Änderung eine gewisse Spannung zwischen den Molekülen s Körpers auftritt, durch welche sie sich bestreben, in die Gleichgewichtsge zurückzukehren. Diese Rückkehr trat ein, wenn die Änderung in den rkenden Kräften aufhörte; überschritt die Verlängerung oder Verkürzung es Stabes infolge der angebrachten Gewichte nicht die Elasticitätsgrenze, kehrte der Stab nach Abnahme der Gewichte zu seiner ursprünglichen nge zurück, war die Biegung nicht so stark, dafs die Teilchen eine neue eichgewichtslage angenommen hatten, so nahm der Stab seine ursprünghe Gestalt wieder an.

Vorzüglich bei dieser Rückkehr in den Gleichgewichtszustand treten n aber Bewegungen auf, welche wir damals, wo wir unser Augenmerk r auf den endlichen Zustand der Körper richteten, aufser Acht liefsen, ren Natur zu erkennen uns aber nach dem Vorigen leicht ist.

Wenn wir einen Stab von gegebener Länge und gegebenem Querschnitt rch ein Gewicht verlängerten, so ergab der Versuch, dafs seine Verngerung proportional war der wirksamen Kraft. Diese Verlängerung war r endliche Zustand, in welchen der Körper durch die dauernde Wirkung r Kraft übergeführt wurde, er trat ein, wenn die durch die Entfernung r Teile von einander auftretende Elasticitätskraft dem ziehenden Gewichte eich wurde. Die Verlängerung ist eine Entfernung der einzelnen Schichten s Stabes von einander, deshalb sind die Entfernungen den Verlängerungen oportional, das heifst, bei doppelter, dreifacher, überhaupt n-facher Verngerung des Stabes haben sich auch die einzelnen Schichten des Stabes n die doppelte, dreifache, überhaupt n-fache Gröfse von einander, oder as dasselbe ist, von ihrer Gleichgewichtslage entfernt.

Da nun die Verlängerungen des Stabes den spannenden Gewichten prortional sind, und da bei dem endlichen Zustande die Kräfte, mit denen e einzelnen Schichten sich rückwärts anziehen, den spannenden Gewichten Gröfse genau gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind, so lgt, dafs die Kraft, mit der irgend eine Schicht des Stabes, wenn sie fserhalb der Gleichgewichtslage sich befindet, gegen diese hingezogen rd, dem Abstande derselben von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Bei der Rückkehr jeder Schicht in ihre Gleichgewichtslage ist daher Bewegung derselben eine beschleunigte, in derselben angekommen, bet sie eine gewisse Geschwindigkeit, vermöge welcher sie sich über die ichgewichtslage hinaus bewegt. Wenn sie dieselbe überschritten hat, ken aber die Kräfte in entgegengesetztem Sinne auf sie ein und verhten so allmählich die der Schicht vorher erteilte Geschwindigkeit.

Dann aber tritt, da jetzt wieder dieselben Elasticitätskräfte auf die Schicht einwirken, eine rückgängige Bewegung ein, bei der sich dasselbe wiederholt; die Schicht erhält also eine schwingende Bewegung. Da das Gesetz, nach welchem die wirkenden Kräfte mit der Entfernung der Schicht von der Gleichgewichtslage sich ändern, dasselbe ist, welches wir der Ableitung der schwingenden Bewegung von Punkten zu Grunde legten, so können wir die dort erhaltenen Resultate unmittelbar auf die so entstehenden Schwingungen der festen Körper übertragen.

Ganz das Gleiche gilt von den Bewegungen, welche ein Körper, der durch Biegung oder Torsion aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, bei der Rückkehr in dieselbe vollführt; auch in diesem Falle ist die Biegung und Torsion der wirkenden Kraft, also die bei der Biegung oder Torsion auftretende elastische Kraft dem Abstande der einzelnen Teile von der Gleichgewichtslage proportional. Bei der Rückkehr in dieselbe mufs demnach der Körper schwingende Bewegungen vollführen, welche den vorhin entwickelten Gesetzen folgen.

§ 137.

Longitudinale Schwingungen der Stäbe. Wenn man einen Stab in seiner Mitte oder an einem oder beiden Enden festhält und ihn an einem Ende rasch mit einem Hammer schlägt, oder seiner Länge nach mit der Hand, nachdem sie mit etwas Kolophonium eingerieben ist, oder mit einem nassen Tuche stark reibt, so geraten die Teile des Stabes in longitudinale Schwingungen, das heifst sie bewegen sich in der Richtung der Längsaxe des Stabes hin und her. Bei dieser Bewegung ändert der Stab seine äufsere Gestalt nicht merklich, sondern es bilden sich in seinem Innern nur abwechselnde Verdichtungen und Verdünnungen, die sich in der § 125 dargestellten Weise durch den Stab verbreiten, in einem begrenzten Stabe an der Grenze reflektiert werden und dadurch zu stehenden Schwingungen des Stabes Anlafs geben.

Die longitudinalen Schwingungen eines Stabes sind nicht unmittelbar sichtbar, indes hat Savart[1]) sie auf folgende Weise sichtbar gemacht. Er befestigte Glas- oder Metallstäbe von verschiedenen Dimensionen auf einer 80 Kilogramm schweren Bleimasse. Ein Sphärometer mit horizontaler Schraube wurde mit dem einen Ende des Stabes zur Berührung gebracht und die Stellung der Schraube abgelesen, dann wurde die Schraube zurückgedreht und der Stab in Schwingungen versetzt. Darauf wurde die Schraube dem Stabe wieder vorsichtig genähert und bei einer bestimmten Stellung zeigte sich, dafs die Schraube von dem Stabe in bestimmten Zwischenräumen gestofsen wurde, ein Beweis, dafs der Stab sich in seiner Längsrichtung abwechselnd ausdehnte und zusammenzog.

Es bedarf übrigens nicht einmal solcher Methoden, um die longitudinalen Schwingungen wahrnehmbar zu machen; sie sind am deutlichsten zu erkennen durch den Ton, welchen sie hervorbringen. Diesen können wir jedoch erst im nächsten Abschnitte betrachten, in welchem wir auch die meisten der sofort abzuleitenden Gesetze experimentell nachweisen werden.

[1]) *Savart* in Annales de chim. et phys. LXV. p. 337.

Über die Fortpflanzung der Bewegung in einem unbegrenzten Stabe haben wir hier nichts hinzuzufügen, sie muſs nach den Gesetzen erfolgen, welche wir § 126 ff. ganz allgemein über die Fortpflanzung schwingender Bewegungen in Punktreihen abgeleitet haben. Zwar haben wir es hier nicht mit einfachen Punktreihen zu thun, indes kann man die dort abgeleiteten Gesetze deshalb einfach übertragen, weil alle Punkte einer zur Längsaxe parallelen Schicht dieselbe Bewegung haben, wir also die Stäbe als ein Bündel paralleler Punktreihen betrachten können.

Auch für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in einem solchen Stabe muſs der § 127 entwickelte Ausdruck gelten

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}} \cdot$$

Setzen wir für e, die Elasticität, den Elasticitätsmodulus E der betreffenden Substanz und für d die Masse der Längeneinheit des Stabes von der Einheit des Querschnittes ein, auf welche sich auch der Elasticitätskoefficient bezieht, so ist nach unserer Ableitung des § 126 die konstante Gröſse $= C\sqrt{a} = 1$ zu setzen, da die dort von uns mit e bezeichnete Gröſse, die bei longitudinaler Bewegung der Punkte der Reihe geweckte Elasticität, den Elasticitätskoefficienten des betreffenden Materials bedeutet. Für einen Stab vom Querschnitt q wird demnach[1])

$$c = \sqrt{\frac{Eq}{dq}} = \sqrt{\frac{E}{d}} \cdot$$

Da somit aus dem Ausdruck für die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Querschnitt verschwindet, so folgt, daſs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Schwingungen von dem Querschnitte der Stäbe, in denen sie stattfinden, unabhängig ist.

Daſs in der That die rechte Seite der Gleichung eine Geschwindigkeit darstellt, ergibt sich auch aus der Bestimmung der Dimension des Ausdruckes. Wir haben für die Elasticitätskoefficienten nach S. 553

$$E = z_1 \left(ML^{-1}T^{-2}\right),$$

für die Dichtigkeit

$$d = z_2 \left(ML^{-3}\right),$$

somit

$$\frac{E}{d} = z \left(L^2 T^{-2}\right),$$

oder die Quadratwurzel des Ausdruckes ist eine Geschwindigkeit.

Man findet häufig den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Schwingungen in etwas anderer Form. Setzen wir für E seinen Wert nach § 48 indes in den Krafteinheiten des absoluten Maſses, so ist

$$E = g\,\frac{P}{q\delta},$$

wenn P das an den Stab vom Querschnitte q gehängte Gewicht bedeutet, welches demselben die in Bruchteilen der ursprünglichen Länge ausgedrückte

[1]) Man sehe auch *Poisson* in Mémoires de l'Acad. Royale de France VIII. p. 444.

Verlängerung δ erteilt. Nehmen wir an, das Gewicht P sei das eines Stabes des gleichen Materials vom Querschnitt q und der Länge l, so ist

$$P = q d l,$$

somit

$$E = g \frac{qd}{q\delta} l = g \frac{d}{\delta} l,$$

und

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}} = \sqrt{\frac{gl}{\delta}}.$$

Setzen wir schliefslich die Länge l gleich der Längeneinheit, und bezeichnen mit δ_1 die Verlängerung des Stabes durch ein Gewicht P, welches gleich dem eines Stabes von dem gleichen Material, dem gleichen Querschnitt q und der Längeneinheit ist, so ist

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta_1}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in einem Stabe ist demnach gleich dem Quotienten aus der Quadratwurzel, aus der Beschleunigung bei dem freien Fall und der Quadratwurzel aus der in Bruchteilen der Stablänge gegebenen Verlängerung, welche er durch das Gewicht eines Stabes gleichen Materials, gleichen Querschnitts und der Einheit der Länge erfährt. Letztere Verlängerung können wir auch als jene bezeichnen, welche ein Stab von der Länge eins durch ein seinem eigenen gleiches Gewicht erfährt.

Wir werden im nächsten Abschnitte in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in langen Stäben den experimentellen Beweis für die Richtigkeit dieser Ausdrücke erhalten.

§ 138.

Longitudinale Schwingungen begrenzter Stäbe. Wird an irgend einer Stelle eines begrenzten Stabes eine longitudinale Schwingung hervorgerufen, so breitet sich dieselbe durch den Stab aus bis zu den Enden desselben; an den Enden wird die Bewegung reflektiert und durchläuft dann den Stab nach entgegengesetzter Richtung. Da die Reflexion an beiden Enden des Stabes erfolgt, so pflanzen sich kurze Zeit nach Beginn der Schwingungen in dem Stabe Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen fort; es müssen sich somit in dem Stabe stehende Wellen bilden. Die Stäbe geraten also in Schwingungen, deren Dauer von der Länge und dem Material, aus welchem die Stäbe gemacht sind, abhängig ist, und aufserdem von der Art, wie die Stäbe befestigt sind. Wir wollen zunächst einen Stab betrachten, der wie ab (Fig. 223) nur in seiner Mitte leicht gehalten wird, im übrigen aber und besonders an seinen Enden frei ist. Wir nehmen an, das Ende b sei etwa durch Klopfen mit einem Hammer oder dadurch, dafs der Stab mit einem feuchten Tuche von der Mitte gegen b hin gestrichen wird, in eine schwingende

Fig. 223.

a c b

Bewegung versetzt, deren Amplitude α und deren Schwingungsdauer T sei. Die Bewegung pflanzt sich dann durch den Stab bis zu dem Ende a fort, wird dort reflektiert und kehrt in dem Stabe gegen b zurück. Da die Dichtigkeit der Luft gegenüber derjenigen des festen Körpers eine sehr kleine ist, wird die Amplitude der Bewegung bei der Reflexion so wenig geschwächt, dafs wir dieselbe auch für die gegen b zurückkehrende Bewegung gleich α setzen können. Die Reflexion geschieht ferner, da das zweite Mittel ein dünneres ist, ohne Umkehr des Vorzeichens der Schwingungen. Die stetig von b ausgehenden und die von a reflektierten Schwingungen sind es dann, welche sich in dem Stabe zu stehenden Wellen zusammensetzen.

Rechnen wir die Zeit t von dem Momente an, in welchem das Ende b eine Schwingung beginnt, so wird zur Zeit t die Bewegung einer Molekülschicht, welche von b um die Strecke x entfernt ist, durch folgende Gleichungen gegeben sein. Erstens ist der Abstand y_1 der Molekülschicht von der Gleichgewichtslage durch die bei b erregte Bewegung

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

die Bewegung, welche von b ausgeht, wird bei a reflektiert, nachdem sie die Länge l des Stabes durchlaufen hat, sie hat dann noch, um zu der betrachteten um x von b entfernten Molekülschicht zu gelangen, den Weg $l - x$ zurückzulegen. Da sie nun bei a ohne Änderung des Vorzeichens reflektiert wird, so ist der Abstand y_2 der betrachteten Schicht von der Gleichgewichtslage zur Zeit t infolge dieser Bewegung

$$y_2 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda}\right),$$

die resultierende Bewegung ist deshalb

$$Y = y_1 + y_2 = 2\alpha \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right).$$

Die Gleichung zeigt, dafs die Bewegung diejenige stehender Wellen von der Schwingungsdauer T ist. Die Anzahl der sich auf dem Stabe ausbildenden stehenden Wellen hängt ab von der Länge des Stabes und der Schwingungsdauer T. Welche stehende Wellen sich auf dem Stabe überhaupt ausbilden können, ergibt sich aus der Bedingung, dafs jedenfalls an den Enden des Stabes ein Schwingungsmaximum sein mufs, das heifst also, dafs dort die Amplitude der Bewegung jedenfalls den gröfsten Wert 2α haben mufs. Da die Amplitude der Bewegung der verschiedenen durch den Abstand x vom Ende b gegebenen Molekülschichten durch den Faktor

$$2\alpha \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda}$$

gegeben ist, so folgt, dafs

$$\cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} = \pm 1 \text{ sein mufs für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Es mufs somit

$$\cos 2\pi \frac{l}{\lambda} = \pm 1; \quad 2\pi \frac{l}{\lambda} = n\pi, \quad l = n\frac{\lambda}{2},$$

es mufs also die Länge des Stabes irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge sein. Oder es können nur solche Schwingungen in dem Stabe zu stehenden Wellen Anlafs geben, deren Oscillationsdauern so sind, dafs während einer oder zwei oder irgend einem Vielfachen einer halben Oscillationsdauer die Bewegung sich durch die ganze Länge des Stabes fortpflanzt.

Die langsamsten Schwingungen, welche der Stab annehmen kann, sind somit solche, für welche $l = \frac{1}{2}\lambda$. Da nun, wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung im Stabe ist, somit

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}},$$

zwischen λ und T die Beziehung besteht

$$\lambda = cT = T \cdot \sqrt{\frac{E}{d}},$$

so folgt für die Dauer der langsamsten Schwingungen

$$T = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{d}{E}}.$$

Die Schwingungsdauer des Stabes ist also gleich der doppelten Länge des Stabes dividiert durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Stabe; sie ist deshalb unabhängig von der Gröfse und der Form des Querschnitts, sie wird nur bedingt von der Länge, dem Elasticitätskoefficienten und dem specifischen Gewichte des Materials, aus dem der Stab besteht.

Die in einer Sekunde von dem Stab vollführte Anzahl von Schwingungen ist

$$N = \frac{1}{T} = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{d}},$$

sie ist also gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der doppelten Länge des Stabes.

Die Bewegung, welche die einzelnen Teile des Stabes vollführen, ergibt sich aus der Betrachtung der Werte y, wenn wir den Moment fixieren, in dem

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right) = 1.$$

Dann ist

$$y = 2\alpha \cos 2\pi \frac{l - x}{\lambda};$$

somit ist für

$x = 0$ $\quad x = \frac{1}{4}l = \frac{1}{8}\lambda$ $\quad x = \frac{1}{2}l = \frac{1}{4}\lambda$ $\quad x = \frac{3}{4}l = \frac{3}{8}\lambda$ $\quad x = l = \frac{\lambda}{2}$

$y = 2\alpha$ $\quad y = \alpha\sqrt{2}$ $\quad y = 0$ $\quad y = -\alpha\sqrt{2}$ $\quad y = -2\alpha$

Die Mitte des Stabes ist somit ein Knotenpunkt, der stets in Ruhe bleibt, und die beiden Hälften des Stabes schwingen jede wie eine halbe stehende Welle, so dafs die beiden Hälften stets in entgegengesetzter Weise schwingen.

Gibt man den erregten Schwingungen die halbe Dauer, so kann ebenfalls der Stab in stehende Schwingungen geraten. Es ist dann $l = \lambda$

$$T_1 = \frac{\lambda}{c} = \frac{l}{c} = \frac{2l}{2c}.$$

Die Bewegung des Stabes erhalten wir wieder, indem wir die Werte von y betrachten, wenn der von der Zeit abhängige Koefficient der Gleichung für $y = 1$ ist.

Dann wird, da jetzt $l = \lambda$ für

$$x = 0 \quad x = \tfrac{1}{4} l = \tfrac{1}{4}\lambda \quad x = \tfrac{1}{2} l = \tfrac{1}{2}\lambda \quad x = \tfrac{3}{4} l = \tfrac{3}{4}\lambda \quad x = l = \lambda$$
$$y = 2\alpha \quad y = 0 \quad y = -2\alpha \quad y = 0 \quad y = 2\alpha.$$

In dem Stabe sind somit zwei Knotenpunkte in $\frac{1}{4} l$ und $\frac{3}{4}\lambda$; das zwischen den beiden Knotenpunkten liegende Stück schwingt als eine stehende Welle, und die beiden Viertel zwischen den Knotenpunkten und den Enden als halbe stehende Wellen; diese beiden halben stehenden Wellen sind unter sich in gleicher Phase, das zwischen den Knotenpunkten liegende Stück ist in gerade entgegengesetzter Phase.

Die Schwingungsanzahl ist in diesem Falle die doppelte von vorher

$$N_1 = 2 \frac{c}{2l}.$$

Allgemein können in dem Stabe stehende Wellen existieren, deren Schwingungsdauern T_n und Schwingungszahlen N_n sind

$$T_n = \frac{2l}{n \cdot c} \quad N_n = n \frac{c}{2l},$$

worin n jede ganze Zahl sein kann. Es entstehen dann in dem Stabe n Knotenpunkte, von denen die den Enden nächsten von den Enden um $\frac{l}{2n}$ entfernt sind, und welche überhaupt im Stabe einen Abstand von $\frac{l}{n}$ besitzen. Einer Ableitung im einzelnen wird es nach dem Vorigen nicht bedürfen.

Mit denselben Schwingungszahlen kann ein Stab schwingen, wenn seine beiden Enden fest eingeklemmt sind, jedoch ist der Bewegungszustand oder die Verteilung der Bewegung in dem Stabe dann eine ganz andere. Es folgt das schon daraus, daſs in dem Falle die Enden des Stabes, da sie fest eingeklemmt sind, stets in Ruhe sein müssen. Um die Bewegung des Stabes zu erhalten, nehmen wir an, es sei an irgend einer Stelle des Stabes etwa durch Reiben eine schwingende Bewegung erzeugt, und es sei dadurch im Abstande d von dem Ende b ein Schwingungsmaximum entstanden. Wir rechnen die Zeit t von dem Beginne der Schwingungen an dieser Stelle. Von hier aus pflanzt sich die Bewegung im Stabe nach beiden Seiten fort, wird an den Grenzen a und b reflektiert und geht von beiden Enden im Stabe wieder zurück. Da die beiden Stabenden als fest vorausgesetzt werden, so geschieht die Reflexion so, wie an einem Mittel von unendlich groſser Dichtigkeit; somit tritt ein Wechsel des Vorzeichens der Bewegung oder Verlust einer halben Wellenlänge an beiden Enden ein, die reflektierte Amplitude hat aber merklich dieselbe Gröſse als die ankommende.

Die Bewegung, welche eine um x von b entfernte Molekülschicht infolge jeder der beiden zu ihr kommenden erhält, ist durch folgende beiden Gleichungen gegeben. Erstens für die an b reflektierte Bewegung

$$y_1 = -\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right);$$

zweitens für die an a reflektierte

$$y_2 = - \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l-d}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda} \right);$$

somit wird die resultierende Bewegung

$$y = y_1 + y_2 = - 2\alpha \cos 2\pi \frac{l-d-x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right).$$

Die in dem Stabe möglichen Bewegungen ergeben sich wieder aus den für
Stabenden vorhandenen Bedingungen, dafs für diese stets $y = 0$ sein m
Es mufs deshalb für $x = 0$ und für $x = l$ der Wert von y immer
sein, oder es mufs

$$\cos 2\pi \frac{l-d}{\lambda} = 0 \qquad \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = 0,$$

oder es mufs sowohl

$$2\pi \frac{l-d}{\lambda} = (2n+1) \frac{\pi}{2}; \quad l - d = (2n+1) \frac{\lambda}{4},$$

als auch

$$2\pi \frac{d}{\lambda} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \qquad d = (2n+1) \frac{\lambda}{4},$$

worin n jede ganze Zahl sein kann. Der Abstand der Stelle des St
an welchem ein Schwingungsmaximum vorhanden ist, mufs demnach
beiden Stabenden ein ungerades Vielfaches von einer viertel Wellenl
entfernt sein. Daraus folgt, dafs die Länge des Stabes selbst irgend
Anzahl von halben Wellenlängen sein mufs. Ist die Zahl derselben n
folgt wie vorhin für die Schwingungsdauer T_n und Schwingungsanzah

$$T_n = \frac{1}{n} \frac{2l}{c} \qquad N_n = n \frac{c}{2l}.$$

Die Verteilung der Bewegung im Stabe ist für die einzelnen
leicht zu erhalten. Ist $n = 1$, so ist $l = \frac{1}{2}\lambda$; $d = \frac{1}{4}\lambda$. Es wird d
wenn das von der Zeit abhängige Glied der Gleichung ± 1 ist, sein

$$x = 0 \qquad x = \tfrac{1}{4} l = \tfrac{1}{8}\lambda \qquad x = \tfrac{1}{2} l = \tfrac{1}{4}\lambda \qquad x = \tfrac{3}{4} l = \tfrac{3}{8}\lambda \qquad x =$$
$$y = 0 \qquad y = \mp \alpha \sqrt{2} \qquad y = \mp 2\alpha \qquad y = \mp \alpha \sqrt{2} \qquad y =$$

Der Stab schwingt somit als eine stehende Welle, deren Knotenpunkte
Endpunkte des Stabes sind.

Ist $n = 2$, so ist $l = \lambda$ und d entweder gleich $\frac{1}{4}\lambda$ oder $\frac{3}{4}\lambda$; set
wir $d = \frac{1}{4}\lambda$, so wird, wenn der von der Zeit abhängige Faktor gleic
ist, aus

$$y = - 2\alpha \cos 2\pi \frac{\frac{3}{4} l - x}{\lambda} = - 2\alpha \cos 2\pi \frac{\frac{3}{4}\lambda - x}{\lambda}$$

für $x = 0 \qquad x = \frac{1}{4} l = \frac{1}{4}\lambda \qquad x = \frac{1}{2} l = \frac{1}{2}\lambda \qquad x = \frac{3}{4} l = \frac{3}{4}\lambda \qquad x =$

$$y = 0 \qquad y = 2\alpha \qquad y = 0 \qquad y = -2\alpha \qquad y +$$

Der Stab erhält in der Mitte einen Knotenpunkt, jede Hälfte schwingt
eine stehende Welle.

ist $n = 3$, so zerfällt der Stab in drei stehende Wellen, die Knoten-
e liegen in $\frac{1}{3}$ der Stablänge von den Enden und von einander.
nein zerfällt der Stab in n stehende Wellen und die Knotenpunkte
$\frac{1}{n}$ Stablänge von den Enden und von einander.

)ie Schwingungszahlen werden andere, wenn wir den Stab an einem
etwa bei a fest einklemmen, dagegen das Ende b freilassen. Be-
en wir das Ende b als den Ursprung der Bewegung, so werden die
ungen für eine Molekülschicht im Abstande x von b, da die von b
ıenden Bewegungen bei a mit Wechsel des Vorzeichens reflektiert
n,

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = -\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda}\right),$$

wird die resultierende

$$y = y_1 + y_2 = 2\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right).$$

)ie in dem Stabe möglichen Bewegungen erhalten wir auch hier wieder
ən Bedingungen für die Enden des Stabes. Am Ende b, also wo
) ist, müssen die Amplituden den gröfsten Wert haben, da das Ende
t, am Ende a, wo $x = l$ ist, mufs y zu allen Zeiten gleich Null
Letzteres ist schon nach der Form der Gleichung erfüllt. Zur Be-
ung der Beziehung zwischen l und λ haben wir daher nur zu be-
, dafs

$$\sin 2\pi \frac{l}{\lambda} = \pm 1$$

$$2\pi \frac{l}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}; \quad l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}.$$

ɔs können demnach nur solche stehende Wellen in dem Stabe bestehen,
elche die Länge des Stabes eine viertel Wellenlänge oder ein un-
s Vielfaches von einer viertel Wellenlänge ist. Da auch hier die
ung besteht $\lambda = cT$, so folgt für die Schwingungsdauer und
ıgungsanzahl

$$T_n = \frac{4l}{(2n+1)c} \qquad N_n = (2n+1)\frac{c}{4l}.$$

ngsamsten Schwingungen sind jene, für welche $n = 0$, also $l = \frac{1}{4}\lambda$ ist,
hwingungsdauer ist

$$T = \frac{4l}{c}.$$

ngsamsten Schwingungen eines an einem Ende festen, an dem andern
freien Stabes haben also die doppelte Dauer, als wenn der Stab an
. Enden frei oder an beiden Enden fest ist.
n dem Falle nehmen die Werte von y, wenn der von der Ze
ɾe Faktor der Gleichung gleich 1 ist, ab von $y = 2\alpha$. wenn
s $y = 0$, wenn $x = l$ ist. Der Stab schwingt d
de Welle.

Die nächst rascheren Schwingungen sind jene, für welche $n = 1$ ist, deren Dauer ist

$$T = 3\,\frac{4l}{c}.$$

Man findet leicht, dafs dann in $\frac{1}{3}$ des Stabes vom freien Ende ein Knotenpunkt vorhanden ist, so dafs $\frac{2}{3}$ des Stabes als eine stehende Welle und das letzte Drittel am freien Ende als eine halbe stehende Welle schwingt.

Dann können Schwingungen im Stabe bestehen, deren Anzahl die fünffache, siebenfache etc. ist, so dafs die überhaupt möglichen Schwingungszahlen sich verhalten, wie die Reihe der ungeraden Zahlen. Bei der fünffachen Schwingungszahl entstehen in dem Stabe drei, bei der siebenfachen fünf, überhaupt bei der $(2n+1)$fachen $2n - 1$ Knotenpunkte, es entstehen n ganze und eine halbe stehende Welle. Einer Ableitung im einzelnen wird es nicht bedürfen.

Die soeben als möglich erkannten Teilungen der Stäbe bei longitudinalen Schwingungen sind ziemlich schwierig herzustellen; man kann sie dadurch hervorrufen, dafs man die vorher bestimmten Stellen festhält, indes gelingt es selten, willkürlich eine ganz bestimmte Teilung des Stabes mit vielen Knotenpunkten zu erhalten. Die Teilung tritt aber häufig auch ohne Festhalten der verschiedenen Stellen ein durch fortgesetztes Reiben des Stabes der Länge nach oder mehrfaches Schlagen an seinen Enden; wir werden im nächsten Abschnitt das an den verschiedenen Tönen erkennen, welche der Stab gibt.

Die in dem letzten Paragraphen für an beiden Enden feste Stäbe abgeleiteten Sätze gelten unmittelbar auch für zwischen zwei festen Punkten ausgespannte Saiten, da dieselben nichts anders sind, als Stäbe von sehr geringem Querschnitt.

§ 139.

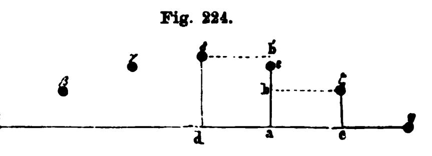
Transversale Schwingungen der Saiten. Spannt man eine dünne, möglichst vollkommen biegsame Schnur von grofser Länge aus und versetzt dieselbe durch rasches Auf- und Abbewegen des einen Endes in transversale Schwingungen, so sieht man, wie diese an der Stelle, an der man sie hervorbrachte, verschwinden, sofort aber an immer anderen Stellen derselben auftreten; sie pflanzen sich als Wellenberg und Wellenthal auf der Schnur fort, nach und nach erhalten immer andere Teile der Schnur die Gestalt einer Welle, wie wir sie in dem vorigen Kapitel bei den transversalen Schwingungen einer Punktreihe abgeleitet haben.

Die transversalen Schwingungen einer Schnur bestehen in auf- und abgehenden gegen die Längsrichtung senkrechten Bewegungen der einzelnen Punkte, sie haben demnach eine Gestaltsänderung derselben zur Folge, welche unmittelbar sichtbar ist und bei nicht zu raschen Bewegungen recht gut beobachtet werden kann.

Die Gesetze der Fortpflanzung transversaler Wellen in dünnen Schnüren oder Saiten, die an sich nicht elastisch aber durch Gewichte schwach gespannt sind, so dafs jeder Punkt eine bestimmte Ruhelage hat, müssen mit den im vorigen Kapitel abgeleiteten Gesetzen über die Fortpflanzung transversaler Wellen in Punktreihen übereinstimmen, so lange die Schnüre oder Saiten eine so geringe Dicke haben, dafs wir annehmen dürfen, alle Pun

ies Querschnittes bewegen sich ganz in gleicher Weise und die Ausgungen seien so klein, dafs wir die bei einer Ausbiegung stattfindende rlängerung vernachlässigen können. An Stelle der durch die Verschiebung Punkte in einer elastischen Punktreihe geweckten elastischen Kraft tritt fach die Spannung der Saite.

Um das zu zeigen, können wir direkt die Entwicklungen des § 126 r anwenden, welche uns die Beschleunigung eines Punktes in einer wingenden Punktreihe lieferten. Ist $\alpha\eta$ (Fig. 224) ein Stück der wingenden Saite, etwa eine halbe llenlänge, und sind α, β, γ ... achbarte Querschnitte einer an ı einen Ende befestigten, durch an dem andern Ende angehäng- Gewicht p gespannten Saite, so


Fig. 224.

d auch hier infolge der Spannung jeder einzelne Querschnitt nach beiden ten gegen die benachbarten Querschnitte hingezogen und zwar mit einer den Einheiten des absoluten Systems ausgedrückten der Spannung gp ichen Kraft. Der Querschnitt ε wird demnach einerseits gegen δ, anderers gegen ζ mit der Kraft gp hingezogen; infolge dessen suchen sich die ıkte in ihre relative Gleichgewichtslage zu ziehen, in welcher sie alle in er geraden Linie, der Ruhelage der Saite sich befinden. Die Gleichgewichtse von ε in Bezug auf ζ ist b, in Bezug auf δ ist b'. Die Kraft, mit cher der Punkt nach b getrieben wird, ist gleich der zu εb parallelen nponente der Spannung, also gleich $gp \sin \varepsilon\zeta b$; und ebenso ist die ihn h b' treibende Kraft gleich $gp \cdot \sin \varepsilon\delta b'$. Die den Punkt ε nach der ichgewichtslage, also gegen a hintreibende Kraft ist somit

$$gp(\sin \varepsilon\zeta b - \sin \varepsilon\delta b').$$

ı ist

$$\sin \varepsilon\zeta b = \frac{\varepsilon b}{\varepsilon\zeta}; \quad \sin \varepsilon\delta b' = \frac{\varepsilon b'}{\varepsilon\delta},$$

in wir, da ausdrücklich vorausgesetzt wurde, dafs wir die Verlängerung Saite vernachlässigen dürfen, $\varepsilon\zeta = \varepsilon\delta = ad$ setzen dürfen. Die den rschnitt ε gegen a treibende Kraft ist somit

$$gp \cdot \frac{\varepsilon b - \varepsilon b'}{ad}.$$

Beschleunigung wird deshalb, wenn m die Masse des Querschnittes ist,

$$\frac{gp}{m} \cdot \frac{\varepsilon b - \varepsilon b'}{ad},$$

ır auch, wenn d die Masse der Längeneinheit der Saite ist,

$$\frac{gp}{d} \cdot \frac{\varepsilon b - \varepsilon b'}{ad^2}.$$

Wir erhalten somit ganz denselben Ausdruck wie § 126, mit dem terschiede nur, dafs an Stelle der Elasticität ae, welche in der Punkthe durch die Verschiebung der Punkte geweckt wird, die Spannung gp tt. Bezeichnen wir mit α die Amplitude und mit T die Schwingungsıer der erregten Bewegung, ferner mit λ die Wellenlänge, so ergibt sich halb auch aus einer der im § 126 gemachten identisch gleichen Ent-

wicklung zur Zeit t nach Beginn der Schwingung für den Abstand y Punktes, welcher vom Ausgangspunkt der Bewegung um die Stre entfernt ist:

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Ist c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, so ist auch $\lambda = cT$ und

$$c = \sqrt{\frac{gp}{d}}.$$

Ist q der Querschnitt und s das specifische Gewicht der Saite, so ist

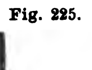
$$d = qs,$$

somit

$$c = \sqrt{\frac{p \cdot g}{q \cdot s}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung ist demnac Quadratwurzel aus dem spannenden Gewichte direkt, derjenigen aus dem schnitt der Saite und ihrem specifischen Gewichte umgekehrt proporti Die Gebrüder W. und E. H. Weber haben durch Messung der Fortpflan geschwindigkeit transversaler Wellen auf dünnen Schnüren die volle einstimmung der Theorie mit der Erfahrung nachgewiesen.

Sie wandten zu ihren Versuchen eine runde aus sehr feinem wollfaden auf Maschinen geklöppelte Schnur an, welche sehr gleich biegsam, wenig elastisch war und bei einer Länge von 16,058 52,612 Gramm wog. Dieselbe wurde dadurch horizonzal aufgespann man sie an ihrem einen Ende mit einer Schraube und mit ihrem Ende an einem Rade befestigte (Fig. 225). Das Rad hatte einen messer von über 30 Centimeter und war i sehr genau gearbeiteten Axe aufgehängt, recht frei beweglich zu machen. Die Schn bei a in einem Abstande von 14,4 Centimet der Axe der Rolle befestigt, so dafs sie na Tangente des Rades zog. Bei b war eine befestigt, an der sich ein Körbchen befan stimmt, die spannenden Gewichte aufzunehn


Fig. 225.



Die Wellen wurden 15 Centimeter von der Schnur durch einen raschen Stofs erreg man sah sie dann zu dem einen Ende der hinlaufen und als reflektierte Wellen, die Be Thäler und umgekehrt, da die Schnur bei war, also an ein dichteres Mittel grenzte, zurückkehren.

Die Zeit, welche die Welle brauchte, um die Schnur zu durch wurde mittels einer Uhr gemessen, welche noch $\frac{1}{60}$ einer Sekunde und stets die Zeit beobachtet, in welcher die vom Rade ausgehende einmal oder zweimal oder viermal zum Rade zurückkehrte.

Die Versuche ergaben erstens, dafs die Fortpflanzungsgeschwin der Wellen unabhängig ist von der Gröfse der Wellen, denn stets b

[1]) *Euler* in den Actis Petropolitanis pro 1779 Tom. I. Petrop. 1782

ie Welle dieselbe Zeit zum Durchlaufen der Schnur, mochte sie durch kurzes und schwaches Schnellen mit dem Finger oder durch ein länger uerndes und stärkeres Schlagen erzeugt werden. Im erstern Falle mufs er die Welle kürzer sein, wie es auch die Beobachtung ergab.

Ferner fanden die Gebrüder Weber, dafs die Wellen, wie es auch un-re Theorie verlangt, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen, nn um die Schnur 2, 3, 4 . . mal zu durchlaufen, brauchte die Welle auch doppelte, drei- und vierfache Zeit.

Nach diesen Versuchen machten sie genaue Messungen und fanden f das genaueste die von Euler gegebene Formel bestätigt. Die Schnur irde nach einander durch drei verschiedene Gewichte gespannt, nämlich t 610,5 — 2027,5 — 4226,4 Gramm[1]).

Es ergab sich, dafs im ersten Falle die Welle einen Raum von $33{,}244^m$ 46 Sechzigstel, im zweiten denselben Raum in 24,8 Sechzigstel und im itten Falle in 16,25 Sechzigstel Sekunden durchlief. Die Fortpflanzungs-schwindigkeiten oder die in diesen drei Fällen in einer Sekunde durch-ufenen Räume sind demnach

$$\text{im ersten Falle } c_1 = \frac{60 \cdot 33^m{,}244}{46} = 43^m{,}361,$$

$$\text{im zweiten Falle } c_2 = \frac{60 \cdot 33^m{,}244}{24{,}8} = 80^m{,}429,$$

$$\text{im dritten Falle } c_3 = \frac{60 \cdot 33^m{,}244}{16{,}25} = 122^m{,}713.$$

Um diese Zahlen mit unserer Formel zu vergleichen, haben wir in iserem Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot p}{q \cdot s}}$$

r p die betreffenden spannenden Gewichte, für $q \cdot s$ das Gewicht der ingeneinheit der Schnur und für g die Beschleunigung der Schwere, 9,808 nzusetzen.

Das Gewicht der ganzen Schnur von 16,622 Meter Länge war ,612 Gramm, daher das Gewicht der Längeneinheit

$$q \cdot s = \frac{52{,}612}{16{,}622}$$

id setzen wir die betreffenden Zahlenwerte in die Formel ein, so wird

$$c_1 = \sqrt{\frac{9{,}808 \cdot 610{,}5 \cdot 16{,}622}{52{,}612}} = 43^m{,}483,$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{9{,}808 \cdot 2027{,}5 \cdot 16{,}622}{52{,}612}} = 79^m{,}254,$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{9{,}808 \cdot 4226{,}4 \cdot 16{,}622}{52{,}612}} = 114^m{,}434.$$

---

1) Wellenlehre, auf Experimente gegründet etc. von den Brüdern *E. H.* und *W. Weber*. Leipzig 1825. p. 464 ff.

Man sieht, die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und rechneten Zahlen ist so grofs, dafs sie der schönste Beweis für die Rich keit der Theorie sowie für die Genauigkeit der Messungen ist.

Vergleichen wir den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindig der transversalen Wellen mit dem für die longitudinalen Wellen, so er sich eine merkwürdig einfache Beziehung[1]).

Für die longitudinalen Wellen hatten wir

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}}$$

oder da für longitudinale Schwingungen einfach $d = s$, wenn wir das specifische Gewicht bezeichnen,

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

für die transversalen

$$c' = \sqrt{\frac{g \cdot p}{q \cdot s}},$$

daraus ergibt sich

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{g \cdot p}{q \cdot s}} : \sqrt{\frac{E}{s}} = \sqrt{\frac{gp}{q \cdot E}}.$$

Wir sahen früher, dafs die Längenzunahme C eines Stabes vo Länge l, dem Querschnitt q, durch ein Gewicht p, wenn E der Elasti modulus ist, gleich ist

$$C = \frac{1}{E} \frac{gpl}{q},$$

demnach

$$\frac{C}{l} = \delta = \frac{gp}{qE}.$$

Es folgt also

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\delta}$$

oder das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transver und derjenigen der longitudinalen Wellen in einem durch Spannung e schen fadenförmigen Körper ist gleich der Quadratwurzel aus der längerung, welche die Längeneinheit des Körpers durch das spannende wicht erfährt, vorausgesetzt, dafs durch dasselbe die Elasticitätsgrenze überschritten wird.

§ 140.

Stehende Schwingungen von fadenförmigen durch Spann elastischen Körpern. Wenn man eine gespannte Saite in irgend e Weise, etwa durch Zupfen an einer Stelle in Schwingungen versetzt, pflanzen sich diese Schwingungen bis an die Enden fort, werden dort, die Enden der Saiten stets fest sein müssen, mit Umkehr des Vorzeic reflektiert und pflanzen sich dann in der Saite rückwärts fort. Die entgegenkommenden Schwingungen müssen stehende Wellen liefern, de Schwingungsdauer von der Gröfse der Spannung, der Länge und Di der Saite und dem specifischen Gewichte des Materials abhängig ist.

---

[1]) *Poisson*, Mémoires de l'Académie de France. Tome VIII. p. 422 und

Die in der Saite möglichen Schwingungen und deren Dauer ergeben ch ganz genau in derselben Weise, wie wir die Schwingungen longitudinal hwingender Stäbe erhielten, welche an beiden Enden fest sind. Wir gegen durch eine der im § 138 für den Fall der festen Enden durchführten wörtlich gleiche Entwicklung zu dem Resultate, dafs in einer spannten Saite alle jene Schwingungen stehende Wellen veranlassen nnen, für welche die Länge der Saite irgend ein Vielfaches einer halben ellenlänge ist. Da, wenn T die Schwingungsdauer, c die Fortpflanzungsschwindigkeit und λ die Wellenlänge der Bewegung ist,

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

folgt, da l immer gleich $n \frac{\lambda}{2}$, somit

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

, worin n jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe sein kann, dafs die möghen Schwingungsdauern gegeben sind durch

$$T = \frac{2\lambda}{nc}.$$

Die Schwingungszahlen, welche gleich dem reciproken Werte der hwingungsdauern sind, werden deshalb

$$N = n \frac{c}{2l}.$$

Die langsamsten Schwingungen sind jene, für welche n gleich 1 ist, bei nen schwingt die ganze Saite als eine stehende Welle zwischen den festen dpunkten hin und her. Die Schwingungsdauer ist dann

$$T = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{q \cdot s}{g \cdot p}}.$$

Dieselbe ist somit der Länge der Saite und der Quadratwurzel aus dem erschnitte und dem specifischen Gewichte der Saite direkt, der Quadratrzel aus der Spannung derselben umgekehrt proportional. Nehmen wir, meistens der Fall ist, an, dafs die Saite einen kreisförmigen Quernitt vom Radius r hat, so ist $q = r^2\pi$, und wir können setzen

$$T = 2lr\sqrt{\frac{\pi \cdot s}{g \cdot p}},$$

r die Schwingungsdauer der Saite ist ihrem Durchmesser direkt protional.

Dieses aus der Theorie sich ergebende Resultat ist von den Gedern Weber[1]) experimentell geprüft worden durch direkte Messung der wingungsdauer der Schnur, welche ihnen zu den im vorigen Paragraphen hnten Versuchen gedient hatte. Der Ausdruck für die langsamsten wingungen

$$T = \frac{2l}{c}$$

[1]) Wellenlehre, auf Experimente gegründet von *E. H.* und *W. Weber*. 1825. p. 466.

zeigt, dafs die Schwingungsdauer gleich der Zeit ist, in welcher die fortschreitende Bewegung, aus welcher die stehende Schwingung entstanden ist, die doppelte Länge der Schnur durchlaufen würde.

Diese Zeit war in den Weberschen Versuchen resp. 46 — 24,8 — 16,25 Tertien (Sechzigstel Sekunden). In dem ersten der drei Fälle, in welchem die Schnur mit 610,5 Gramm gespannt war, erhielten sie als Schwingungsdauer

$$T = 46{,}375 \text{ Tertien} = 0{,}773 \text{ Sekunden}$$

als Mittel aus vielen Versuchen; eine Zahl, welche sich nicht um ein Hundertstel des beobachteten Wertes von dem aus der Theorie folgenden unterscheidet.

Eine weitere experimentelle Bestätigung dieses Satzes werden uns besonders für kürzere und stärker gespannte Saiten im nächsten Abschnitt die durch die Schwingungen der Saiten entstehenden Töne liefern.

Ist n gröfser als 1, so teilt sich die Saite in mehrere für sich schwingende durch ruhende Knotenpunkte von einander getrennte Teile. Ist $n = 2$, so entsteht ein Knotenpunkt in der Mitte und jede Hälfte der Saite schwingt für sich; ist $n = 3$, so entstehen zwei Knotenpunkte, die je $\frac{1}{3}$ der Saitenlänge von einander entfernt sind.

Man kann die Teilung der Saite bei transversalen Schwingungen leicht hervorrufen und beobachten.

Man unterstützt die Saite ab (Fig. 226) in einem Punkte c, so dafs die Länge bc gleich $\frac{1}{n}$ der Länge der Saite ist, z. B. $\frac{1}{4}$, und hängt dann auf die Saite eine Anzahl sogenannter Reiterchen, kleiner leichter Häkchen von Papier. Streicht man dann die Saite in der Nähe von b oder zupft man sie irgendwo zwischen b und c, so werden die Reiterchen überall von der Saite abgeworfen, nur an den Stellen der Schwingungsknoten bei d und e bleiben sie hängen, ohne eine bedeutende Bewegung zu zeigen.

Fig. 226.



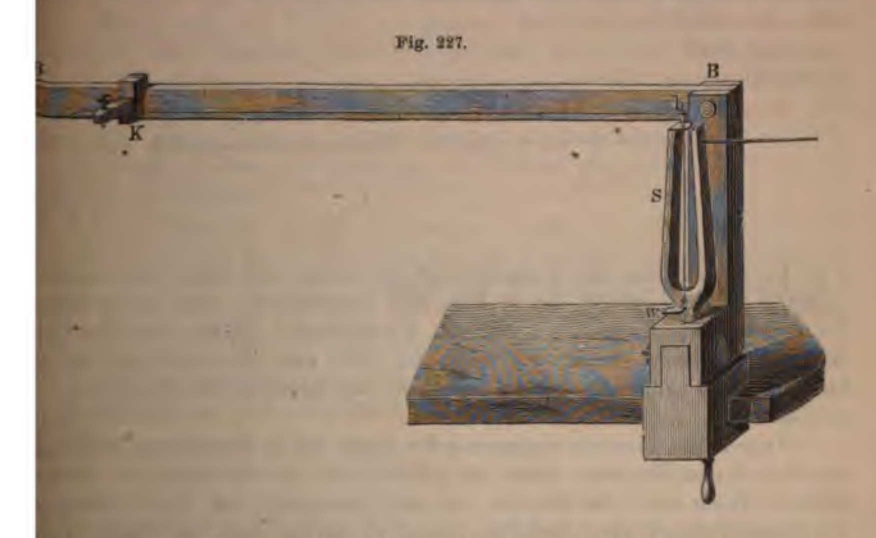
Es folgt daraus, dafs die Saite sich in eine Anzahl für sich schwingender Stücke, ae, ed, dc, cb geteilt hat, welche durch nicht bewegte Punkte, die Schwingungsknoten, getrennt sind. Wendet man möglichst biegsame Fäden bei diesen Versuchen an, so findet man die Lage der Knoten, also die Teilung der Saite genau der Theorie entsprechend, man findet immer $n - 1$ Knotenpunkte, welche um $\frac{1}{n}$ der Saitenlänge von den Enden der Saite und von einander entfernt sind.

Der in Fig. 226 dargestellte Versuch ist auch deshalb interessant, weil er zeigt, dafs bei einer gespannten Saite der Knotenpunkt die Quelle der Bewegung für dieselbe werden kann. Der Punkt c (Fig 226) ist durch einen Steg unterstützt, und trotzdem pflanzt sich die Bewegung durch ihn hindurch auf den andern Teil der Saite fort. Man sieht leicht, dafs diese Ausbreitung der Bewegung über c hinaus durch die periodischen longitudinalen Impulse veranlafst wird, die der Punkt c infolge der Bewegung des Stückes bc erfährt.

Die Teilung der Saiten und die Entstehung der stehenden Wellen aus r Interferenz der fortgepflanzten und reflektierten Wellen läfst sich sehr ibsch durch eine von Melde[1]) zuerst benutzte Versuchsanordnung zeigen, elche Fig. 227 darstellt. Auf einem Fufsbrett ist vertikal eine gebogene ahllamelle, eine sogenannte Stimmgabel S (Fig. 227) aufgestellt. Die ne Zinke der Gabel trägt ein kleines Hütchen h, durch welches ein Seidenden gezogen ist, welcher an dem in der Biegung der Gabel befestigten irbel w befestigt ist. Das Hütchen h befindet sich vertikal über dem Stiele r Gabel, so dafs, wenn die Gabel um den Stiel gedreht wird, das in dem itchen befindliche Ende des Fadens sich in der Drehungsaxe befindet. as andere Ende des Fadens ist an dem auf dem Holzstabe BB befindchen Schieber K befestigt. Der Holzstab BB wird von dem hinter der timmgabel befindlichen Brette getragen; derselbe ist dort auf eine Axe setzt, so dafs er in vertikaler Ebene drehbar, in jeder Neigung gegen den orizont festgeklemmt werden kann.

Ist der Faden am Stabe horizontal ausgespannt, und ist die Stimmbel, wie es die Figur zeigt, so aufgestellt, dafs die beiden Zinken in der rch den Faden gelegten Vertikalebene sich befinden, so sieht man bei

Fig. 227.

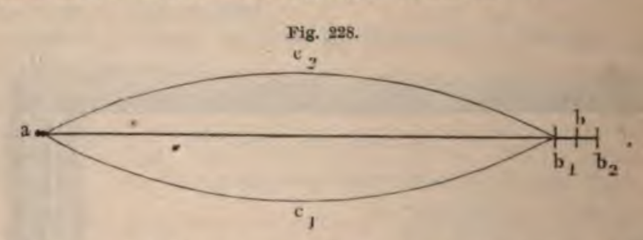


er bestimmten Spannung des Fadens denselben in der Form einer stehen- Welle schwingen, wenn man die Zinken der Gabel in Schwingung vert. Die Schwingungen der Gabel kann man entweder dadurch hervoren, dafs man in der Nähe ihres obern Endes die Gabel mit einem linbogen in einer dem gespannten Faden parallelen Richtung streicht, r dafs man, in der Weise, wie wir es später bei dem Vokalapparate Helmholtz beschreiben werden, die Zinken zwischen die Arme eines ktromagnetes stellt, der in rascher Folge periodisch magnetisiert wird. Bildung dieser stehenden Schwingung ergibt sich am einfachsten folgender-

[1]) *Melde*, Poggend. Ann. Bd. CIX und CXI.

mafsen. Ist Fig. 228 ab der Faden, welcher bei b an der Stimmgabel befestigt ist, so bewegt sich, wenn die Gabel schwingt, der Befestigungspunkt b zwischen b_2 und b_1 hin und her. Wenn sich der Punkt nach b_1 bewegt hat, ist der Abstand ab_1 kleiner als die Länge des Fadens, der Faden ist nicht mehr gespannt und die Teile des Fadens sinken durch ihr Gewicht hinab. Das Hinabsinken beginnt bei b, und bei einer gewissen Spannung des Fadens wird es sich bis a fortgepflanzt haben, wenn b bis b_1 gekommen ist. Geht nun b zurück bis b_2, so verlängert sich der Abstand ab und der Faden nähert sich, indem die Teile desselben nach und nach emporgezogen werden, wieder der geraden Linie, die er bei der angenommenen Spannung des Fadens erreicht, wenn b in b_2 angekommen ist. Geht nun der Befestigungspunkt das zweite Mal von b_2 nach b, so mufs der dann nicht mehr gespannte Faden sich krümmen, aber, da seine Teilchen mit einer gewissen Geschwindigkeit in die Gleichgewichtslage eintraten, jetzt nach oben hin, und der Faden nimmt bei der vorausgesetzten Spannung die Lage ac_2b_1 an, wenn der Befestigungspunkt sich bis b_1 bewegt hat. Geht b_1 dann wieder bis b_2 zurück, so kommt der Faden wieder in die Lage ab_2. Es ergibt sich somit, dafs der Faden eine ganze Schwingung macht, wenn die Gabel zwei Schwingungen vollführt.

Fig. 228.



Die Entstehung der schwingenden Bewegung der Saite bei dieser Anordnung ist ganz analog der in Fig. 226 dargestellten, denn auch hier ist der Punkt b für diese Bewegung ein Knotenpunkt, gerade wie der durch den Steg gestützte Punkt der Saite Fig. 226, und wie dort sind es auch hier die longitudinalen Impulse, welche die schwingende Bewegung veranlassen.

Vermindert man die Spannung der Saite auf $\frac{1}{4}$ derjenigen, welche sie bei dem ersten Versuche hatte, so pflanzt sich die Bewegung in ihr nur halb so rasch fort; da die nur von der Bewegung der Gabel abhängige Schwingungsdauer aber dieselbe bleibt, so zerlegt sich die Saite in zwei schwingende Abteilungen, welche durch einen Knotenpunkt in der Mitte von einander getrennt sind. Die Amplituden der Schwingungen sind bei diesen Versuchen so grofs, dafs die Teilung der Saite in ihre Abteilungen weithin sichtbar ist.

Vermindert man die Spannung auf $\frac{1}{9}$ der anfänglichen, so pflanzt sich die durch die erste Schwingung der Gabel erzeugte Halbwelle nur durch $\frac{1}{3}$ der Saite fort, und der Faden zerlegt sich infolge der Interferenz der von b ausgehenden und von a reflektierten Schwingungen in drei stehende Wellen, deren jede $\frac{1}{3}$ der Fadenlänge hat.

Bei hinreichend langen Fäden kann man die Teilung derselben noch beträchtlich weiter treiben.

Da die Anzahl der tehenden Wellen in einem solchen Faden der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung umgekehrt proportional ist, so kann man durch Anwendung verschiedener Fäden von ungleichem Querschnitt und verschieden dichtem Material die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Schwingungen unmittelbar anschaulich machen.

Eine derartige Bildung der stehenden Wellen tritt nicht nur ein, wenn die Ebene der Gabelzinken der durch den Faden gelegten Vertikalebene parallel ist, sondern auch wenn die Gabel zu dieser Ebene senkrecht steht. Die Schwingungen der Gabel, die dann senkrecht zur Längsrichtung des Fadens geschehen, übertragen sich dann unmittelbar als Transversalschwingungen auf den Faden; bei der Kleinheit der Exkursionen der Gabel gegenüber denen des Fadens verhält sich aber auch dann das an der Gabel befestigte Ende im allgemeinen wie ein Knotenpunkt. Bei gleicher Spannung des Fadens ist aber in diesem Falle die Anzahl der stehenden Wellen immer die doppelte von der bei der vorhin besprochenen Befestigungsweise. Der Grund hierfür liegt darin, dafs jetzt die Schwingungen der Saite jener der Gabel isochron sind, indem jede Schwingung der Gabel eine Schwingung des Fadens veranlafst, während, wie wir vorhin sahen, bei der andern Befestigungsweise zwei Schwingungen der Gabel erforderlich waren, um eine ganze Schwingung des Fadens zu geben. Ist demnach bei beiden Befestigungen die Spannung des Fadens und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe, so mufs bei der zweiten Stellung der Gabel die Wellenlänge halb so grofs, die Zahl der Wellen also doppelt so grofs sein als bei der ersten. Damit bei der zweiten Stellung dieselbe Anzahl von Wellen entstehe, mufs die Spannung des Fadens viermal so grofs sein als in der ersten Stellung.

Am Schlusse des vorigen Paragraphen erwähnten wir die zuerst von Poisson angegebene Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und der transversalen Schwingungen der gespannten Saiten; dieselbe Beziehung mufs, wie sich unmittelbar ergibt, zwischen den transversalen und longitudinalen Schwingungszahlen bestehen.

Die Schwingungszahl einer longitudinal schwingenden, an ihren beiden Enden befestigten Saite ist allgemein

$$N = \frac{n}{2} \frac{c}{l},$$

für die transversalen Schwingungen

$$N' = \frac{n}{2} \frac{c'}{l}.$$

Es folgt daraus

$$\frac{N'}{N} = \frac{c'}{c} = \sqrt{\delta},$$

wo wie vorhin δ das Verhältnis der Verlängerung der schwingenden Saite infolge des spannenden Gewichtes p zur Länge der Saite, oder die Ausdehnung eines Stückes der Saite von der Längeneinheit durch das spannende Gewicht bedeutet.

Dieses von der Theorie geforderte Resultat ist durch einen Versuch

von Cagniard Latour, den Poisson in seinem Mémoire sur les mouvem des corps élastiques mitteilt, bestätigt worden[1]).

Eine Saite von 14,8 Meter Länge wurde einmal in longitudinale, e mal in transversale Schwingungen versetzt, und die Schwingungszahlen b stimmt. Es fand sich

$$\frac{N'}{N} = 0{,}059\,3.$$

Die Verlängerung δ der Längeneinheit der Saite ist gleich dem Q tienten aus der Verlängerung der ganzen Saite α und der Länge l derselb wir erhalten demnach

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{\frac{\alpha}{l}},$$

$$\alpha = l\left(\frac{N'}{N}\right)^2 = 14^{\mathrm{m}},8 \cdot 0{,}003\,513 = 0^{\mathrm{m}},052.$$

Aus dem Verhältnis der longitudinalen und transversalen Schwingun berechnet sich somit die Verlängerung der Saite zu $0^{\mathrm{m}},052$ infolge spannenden Gewichtes. Die Messung Cagniard Latours ergab

$$\alpha = 0^{\mathrm{m}},05,$$

eine Zahl, welche sich nur um $\frac{1}{25}$ von der berechneten unterscheidet.

§ 141.

Einfluſs der Steifigkeit der Saiten. Wenn man die Versuche üb die Lage der Schwingungsknoten und die Schwingungzahlen der Sait mit groſser Sorgfalt anstellt, so findet man besonders bei Metallsait merkliche Abweichungen des Resultates von der Theorie. Diese Abweichung werden um so gröſser, je kürzer und dicker die Saiten werden. Der Gru dieser Abweichungen ist leicht einzusehen, er liegt besonders darin, da die Saiten nicht, wie es bei den theoretischen Entwickelungen vorausgesetz wurde, absolut biegsam sind und nur durch die spannenden Gewichte Elast cität erhalten haben, sondern daſs sie selbst an sich schon steif sind. I wird also durch die gegenseitige Anziehung der einzelnen Moleküle dies schon eine gewisse Gleichgewichtslage gegeben.

---

[1]) *Poisson*, Mémoires de l'Acad. royale de France. Tome VIII. p. 436. A der Stelle dieser Abhandlung, wo dieser Versuch mitgeteilt ist, hat sich ei Verwirrung eingeschlichen, da anfänglich $\frac{N'}{N} = \frac{7}{188}$ und $\frac{\alpha}{l} = \sqrt{\frac{N'}{N}}$ gesetzt i Die erste Zahl ist fehlerhaft, da sie auf ein ganz anderes Resultat führt, u die Gleichung für $\frac{\alpha}{l}$ ist, wie man sieht, falsch. Da die Gleichung nicht z der Angabe für $\frac{N'}{N}$ auf $\alpha = 0{,}052$ führt, so habe ich letztere von Poisson f das berechnete α angegebene Zahl als richtig genommen und daraus $\frac{N'}{N}$ b rechnet. Das so berechnete Verhältnis ist $\frac{7}{118}$.

Es ist nun leicht ersichtlich, daſs die eigene Steifheit der Saiten gerade so wirkt, als wäre die Saite absolut unelastisch, aber durch ein stärkeres Gewicht gespannt als das angehängte und in Rechnung gezogene. Die Schwingungszahlen werden daher gröſser sein als die aus der Theorie abgeleiteten.

Dieses Resultat haben auch die Versuche N. Savarts[1]) ergeben, der es sich zur Aufgabe gestellt hatte, das Gesetz aufzusuchen, nach welchem die Schwingungszahlen durch die eigene Steifheit der Saiten sich ändern.

N. Savart befestigte die Saiten an einem festen eisernen Schraubstock, nachdem er sie in Klemmen eingeklemmt hatte, die mit Blei gefüttert waren. Durch ein angehängtes Gewicht P, welches nach und nach geändert wurde, wurde die Saite gespannt und nun von der Saite ein Stück von $80^{mm},5$ Länge mittels zwei weitern Schraubstöcken an seinen beiden Enden ganz fest eingelegt.

Die Schwingungszahlen der Saite von unveränderlicher Länge bei verschiedenen spannenden Gewichten wurden mittels der beobachteten Töne, welche durch die Schwingungen entstanden, bestimmt, und zugleieh nach der Formel

$$n = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{g \cdot P}{l \cdot p}},$$

wenn wir mit $p = q \cdot l \cdot s$ das Gewicht der schwingenden Saite bezeichnen, theoretisch berechnet.

Bezeichnen wir die wirklich beobachteten Schwingungszahlen mit N, so fand N. Savart in der That, daſs N stets grösser war als n.

Er zog weiter aus seinen Versuchen den Schluſs, daſs die Differenz zwischen den Quadraten der Schwingungszahlen konstant sei, oder

$$N^2 - n^2 = C$$

sei. Die Konstante C soll nach Savart das Quadrat der Schwingungszahl sein, welche der Saite zukommt, wenn sie nur infolge ihrer eigenen Steifheit schwingt. Bezeichnen wir die Schwingungszahl in dem Falle mit n_0, so soll also

$$N^2 = n^2 + n_0^2$$

sein.

Duhamel[2]) hat es versucht, diese von Savart aus seinen Versuchen abgeleitete Regel durch eine einfache Betrachtung theoretisch zu erklären.

Bezeichnet man nämlich mit n und gP die Schwingungszahl und die Spannung einer absolut biegsamen Saite, so ist nach dem Vorigen

$$n^2 = \frac{g}{4lp} \cdot P,$$

wenn g die Beschleunigung der Schwere, l die Länge und p das Gewicht der Saite bedeutet.

Hat man nun eine wirkliche Saite von eben der Länge l und demselben Gewichte p, so hat dieselbe durch ihre Steifigkeit eine gewisse Elas-

---

1) *N. Savart*, Ann. de chim. et de phys. III. Série. T. VI; auch Poggend. Ann. Bd. LVIII.

2) *Duhamel*, Comptes rendus. Tome XIV. Poggend. Ann. Bd. LVII.

ticität, vermöge welcher sie ohne spannendes Gewicht eine Schwingungszahl n_0 hat. Der absolut biegsamen Saite können wir nun durch ein Gewicht P_0 eine Spannung erteilen, so dafs sie genau dieselbe Bewegung annimmt, welche bei der steifen Saite aus der Elasticität hervorgeht und bei der sie n_0 Schwingungen zurücklegt. In dem Falle hat man für dieselbe

$$n_0^2 = \frac{g}{4lp} \cdot P_0.$$

Fügt man nun zur Spannung P_0 der biegsamen Saite noch die Spannung P_1 hinzu, so befindet sie sich in demselben Zustande wie die steife Saite, wenn sie durch das Gewicht P_1 gespannt ist. Die Spannung der absolut biegsamen Saite ist dann aber $g(P_0 + P_1)$ und ihre Schwingungszahl N gegeben durch

$$N^2 = \frac{g}{2lp}(P_0 + P_1),$$

oder da für eine Saite von gegebener Länge und gegebenem Gewichte die Schwingungszahl bei der konstanten Spanung P_0 konstant ist,

$$N^2 = n^2 + n_0^2.$$

Ist es gleichgültig, ob eine Saite durch eigene Elasticität oder durch ein angehängtes Gewicht eine gewisse Spannung erhält, so mufs auch für die steife Saite, welche infolge ihrer eigenen Elasticität n_0 Schwingungen vollführt, die wirkliche Schwingungszahl N bei der Spannung P sein

$$N = \sqrt{n^2 + n_0^2}.$$

August Seebeck[1]) hat indes nachgewiesen, dafs die letztere Annahme Duhamels nicht strenge und nur für einen bestimmten Fall richtig ist, da dieser Satz auf eine bestimmte Gestalt der schwingenden Saite führt. Wenn man nämlich auch durch ein Gewicht P_0 der unelastischen Saite dieselbe Schwingungszahl geben kann, so läfst sich derselben doch nicht im allgemeinen in allen Teilen dieselbe Bewegung erteilen, wie die Teile der steifen Saite sie annehmen. Zur Herleitung der Savartschen Regel darf er deshalb nicht angewandt werden, weil die Saiten in dem Versuche von Savart nicht der Bedingung entsprechen, die aus dem Satze von Duhamel folgt.

Die Savartsche Regel darf daher auch nur als eine angenäherte gelten.

Seebeck gibt für die Schwingungszahlen der steifen Saiten einen andern Ausdruck, den er theoretisch ableitet und durch Versuche bestätigt. Für gewöhnliche Saiten, deren Steifheit nur sehr gering ist, wird dieser Ausdruck ziemlich einfach, nämlich

$$n = n_1\left(1 + \frac{r^2}{l} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \pi}{gP}}\right),$$

worin n_1 die Schwingungen der absolut biegsamen Saite bei der Spannung gP, r den Radius, l die Länge und E den Elasticitätskoefficienten der Saite, in den Einheiten des absoluten Mafssystems, bedeutet.

Man sieht, wie das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen sich

[1]) *A. Seebeck*, Berichte der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1846 — 47, auszügl. von Seebeck selbst. Dove, Repertorium. Bd. VIII.

ner mehr der Einheit nähert, je gröfser das spannende Gewicht wird, oder kleiner der Quotient der beiden Kräfte $\frac{E}{gP}$ ist. Es ist das zu erwarten, der Einflufs der Steifheit, also der eigenen Elasticität der Saite, um so ır zurücktreten mufs.

§ 142.

Transversalschwingungen von Stäben. Wenn man irgend einem ıtischen prismatischen oder cylindrischen Stabe eine Biegung erteilt l ihn dann sich selbst überläfst, so gelangt derselbe in stehende Schwinıgen. Auch in diesem Falle können wir die stehenden Wellen als ein ultat der mit einander interferierenden nach entgegengesetzter Richtung ı fortpflanzenden an den beiden Enden reflektierten Wellen betrachten.

Die Schwingungsdauer solcher Stäbe läfst sich demnach ebenso wie die wingungsdauer der stehenden Wellen bestimmen, oder wir haben wieder

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

im § 127. Wir haben hier indes die Gröfse k etwas anders zu beımen, da wir es hier nicht mit der Bewegung von Punktreihen, wie in bisherigen Fällen zu thun haben.

Sei ab (Fig. 229) ein Stab, der an seinem Ende b durch ein Gewicht ogen wird, so sahen wir früher im zweiten Abschnitte, dafs die Biegung, Abstand bb', abhängt von der Gröfse Gewichtes, ferner der Länge, Breite Dicke des Stabes. Setzen wir den- ıen als prismatisch voraus und setzen seine Länge gleich l, die Breite ch β und die Dicke gleich h, so war, ın wir das biegende Gewicht mit P bezeichnen[1]),

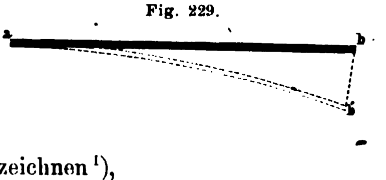


Fig. 229.

$$bb' = \frac{E}{4} \frac{gP \cdot l^3}{\beta h^3},$$

r die elastische Kraft gP, welche den gebogenen Stab in die Gleichrichtslage zurücktreibt,

$$gP = \frac{E}{4} \frac{\beta h^3}{l^3} \cdot bb',$$

rin, wie immer, E den Elasticitätskoefficienten des Stabes in den Einten des absoluten Mafssystems bedeutet.

Da die elastische Kraft der Biegung proportional ist, so folgt, dafs einmal gebogene und dann sich selbst überlassene Stab um seine ıichgewichtslage isochrone Schwingungen vollführen wird.

Nennen wir die bewegende Kraft bei einer Biegung bei = 1 ist, gp, so haben wir

$$gP = gp \cdot bb',$$

$$gp = \frac{E}{4} \frac{\beta h^3}{l^3}.$$

1) Man sehe § 53.

Dies ist somit die Kraft, welche den gebogenen Stab von der Länge l wieder in die Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, wenn das Ende b' sich im Abstande 1 von der Gleichgewichtslage befindet. Diese Kraft ist am Ende b angebracht. Um nun die Schwingungsdauer des Stabes zu erhalten, haben wir

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}},$$

wo k die beschleunigende Kraft der Bewegung bedeutet, also

$$k = \frac{gp}{m}$$

ist, wenn m die bewegte Masse bedeutet. Bezeichnen wir die Masse des Stabes mit m', so werden wir haben

$$m = f' \cdot m',$$

worin f' eine Konstante bedeutet; denn um die beschleunigende Kraft zu erhalten, müssen wir für m die im Punkte b anzubringende Masse einsetzen, welche dort die Masse des Stabes ersetzt, da die Kraft p im Punkte b angreift. Diese Masse ist aber jedenfalls derjenigen des Stabes proportional.

Für die beschleunigende Kraft der Bewegung erhalten wir somit

$$k = \frac{gp}{m} = \frac{E \cdot \beta \cdot h^3}{4 f' \cdot m' \, l^3}.$$

Bezeichnen wir das specifische Gewicht des Stabes mit s, so haben wir

$$m' = \beta \cdot h \cdot l \cdot s$$

und somit

$$k = \frac{h^2}{4 f' l^4} \cdot \frac{E}{s}$$

und daraus für die Schwingungsdauer eines solchen Stabes

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{h^2}{4 f' \cdot l^4} \cdot \frac{E}{s}}} = A \cdot \frac{l^2}{h} \cdot \sqrt{\frac{s}{E}},$$

wenn wir setzen

$$2\pi \sqrt{4 f'} = A.$$

Für die Schwingungszahlen der Stäbe erhalten wir daraus

$$N = \frac{1}{T} = A' \cdot \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Derselbe Ausdruck gilt für cylindrische Stäbe, wenn wir anstatt der Dicke h den Radius r derselben einsetzen, jedoch wird dann die Konstante A' eine andere, wie sich aus dem Ausdrucke ergibt, den wir für gP erhalten, wenn wir anstatt parallelepipedischer Stäbe cylindrische Stäbe anwenden.

Wir haben diesen Ausdruck zunächst entwickelt unter der Voraussetzung, dafs der Stab an seinem einen Ende fest sei, indes ergibt die Theorie der Elasticität, dafs er auch, mit verschiedenen Werten von A', gültig ist, im Falle beide Enden fest oder frei sind, da der Ausdruck für gP in den Fällen nur durch andere Konstanten unterscheidet.

ergibt sich daraus, dafs allgemein die Schwingungszahl elastischer m Quadrate ihrer Länge umgekehrt proportional ist, während sie e derselben oder dem Radius derselben direkt proportional, von e derselben jedoch unabhängig ist.

ade wie wir bei den longitudinalen Schwingungen nun eine Reihe n unterscheiden mufsten, je nach der Befestigungsweise des Stabes, hier wieder.

können jedoch hier nicht wie in den frühern Fällen die Schwinlen und Teilungen der Stäbe theoretisch ableiten, sondern müssen ügen, die von Euler, Poisson, Cauchy, Seebeck u. a., teils theoretisch, erimentell erhaltenen Resultate mitzuteilen. Wir unterscheiden Fälle[1]).

Ein Ende des Stabes ist frei, das andere fest, der Stab schwingt nzen Länge nach hin und her, er bildet eine halbe stehende Welle. nter Annahme eines cylindrischen Stabes

$$N = 0{,}28\,\frac{r}{l^2}\cdot\sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Beide Enden des Stabes sind fest, oder beide Enden des Stabes ; die Zahl der langsamsten Schwingungen wird in beiden Fällen:

$$N = 1{,}78\,\frac{r}{l^2}\cdot\sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Es kann ferner das eine Ende des Stabes auf eine Unterlage gelen und das andere ganz fest, in einen Schraubstock eingeklemmt oder ganz frei sein. In beiden Fällen erhält man für die lang-Schwingungen, welche der Stab vollführen kann,

$$N = 1{,}23\,\frac{r}{l^2}\cdot\sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Schliefslich können beide Enden des Stabes nur aufgelegt sein, für die langsamsten Schwingungen

$$N = 0{,}785\,\frac{r}{l^2}\cdot\sqrt{\frac{E}{s}}.$$

beck vereinigt die Ausdrücke für alle diese Fälle in folgenden[2])

$$N = \frac{\varepsilon^2\pi r}{4\,l^2}\cdot\sqrt{\frac{E}{s}},$$

nn nur ε seinen Wert von einem Falle zum andern ändert, und

,596 86, wenn ein Ende des Stabes fest, das andere frei ist,
,505 62, wenn beide Enden des Stabes fest oder frei sind,
,249 87, wenn ein Ende aufgelegt, das andere fest oder frei ist,
, wenn beide Enden des Stabes aufgelegt sind.

---

oisson, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 484 ff.
uchy, Exerc. de Math. Tome III. 270 ff.
ebeck, Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1846— Dove, Rep. Bd. VIII. p. 46.
ebeck, a. a. O.

In allen diesen Fällen können noch eine Reihe von Schwingungen auftreten, die alle häufigern Schwingungen der Stäbe entsprechen; Stäbe zerlegen sich dann in eine Reihe selbständig schwingender welche durch Knotenpunkte von einander getrennt sind.

Seebeck gibt folgende Tabelle der Werte von ε in allen vier Fä

1. Fall. Das eine Ende des Stabes ist fest, das andere frei. Reihenfolge der Schwingungszahlen ergibt sich aus den Werten

$$\varepsilon = 0{,}596\,86;\ 1{,}494\,18;\ 2{,}500\,25;\ 3{,}4999 \cdots \frac{2n-1}{2}.$$

Wie man sieht, werden die Schwingungszahlen eines gegebenen St von der Länge l und dem Redius r von der dritten an dargestellt dur

$$N = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ weichen die Schwingungszahlen hiervon indem die hiernach berechneten Zahlen für $n = 1$ zu klein, für $n =$ grofs werden.

2. Fall. Die beiden Enden des Stabes sind entweder fest oder Die Schwingungszahlen ergeben sich aus den Werten

$$\varepsilon = 1{,}505\,62;\ 2{,}499\,75;\ 3{,}500\,1;\ 4{,}500\,0 \cdots \frac{2n+1}{2}.$$

Setzen wir also für die langsamsten Schwingungen $n = 1$, so we auch hier die Schwingungszahlen eines gegebenen Stabes dargestellt d

$$N = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2,$$

jedoch ebenfalls erst von der dritten Schwingungszahl an, und zwar u genauer, je weiter man in der Ordnung der Schwingungszahlen aufst

3. Fall. Ist das eine Ende des Stabes aufgelegt, das andere ganz oder ganz frei, so ergibt sich die Reihe der Schwingungszahlen, wenn eingesetzt wird

$$\varepsilon = \frac{4n+1}{4},$$

worin wieder n die Reihe der natürlichen Zahlen bedeutet, und für langsamsten Schwingungen $n = 1$ zu setzen ist. Für diese gaben wi $\varepsilon = 1{,}249\,8$; man sieht, wie schon dieser Wert nur äufserst wenig dem nach der Formel berechneten abweicht.

4. Fall. Sind beide Enden des Stabes einfach aufgelegt, so ergibt die Reihe der Schwingungszahlen, wenn wir für die langsamsten $\varepsilon = 1$ für die folgenden die Reihe der natürlichen Zahlen einsetzen, also $\varepsilon =$ Die Schwingungszahlen verhalten sich also wie $1, 4, 9 \cdots$

In diesem Falle erhält also die Gleichung für die Schwingungszah ihre einfachste Gestalt, sie wird

$$N = \frac{n^2 \cdot \pi \cdot r}{4 l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}},$$

worin nach und nach für n die Werte $1, 2, 3 \cdots$ einzusetzen sind.

Die Schwingungszahlen eines und desselben Stabes können also sehr hieden sein, je nach der Art seiner Befestigung; setzen wir die lang-en Schwingungen bei der ersten Befestigungsart gleich 1, so erhalten ls Schwingungszahlen

1. Fall · ·	1;	6,26;	17,54;	34,38;	56,84;
2. „	6,36;	17,54;	34,38;	56,84;	84,91;
3. „	4,38;	14,21;	29,50;	50,70;	77,22;
4. „	2,807;	11,23;	25,26;	44,91;	70,17.

Um aus dieser kleinen Tabelle die wirklichen Schwingungszahlen zu en, haben wir bei cylindrischen Stäben dieselben nur mit

$$\frac{0,356\,24 \cdot \pi \cdot r}{4\,l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}$$

ıltiplicieren.

Auch die Schwingungszahlen parallelepipedischer Stäbe können wir auf dieselbe Weise erhalten, wir haben in die Formel anstatt des s r des Cylinders nur $\frac{h}{\sqrt{3}}$ einzusetzen, wenn wir wie vorhin mit h icke der Stäbe bezeichnen[1]).

Die gröfsern Schwingungszahlen haben auch hier ihren Grund in einer ıg der Stäbe in eine Anzahl stehender Wellen, indes teilen sich hier ;äbe nicht in eine Anzahl gleicher Teile, sondern die Endglieder sind ıieden von den Abständen der Knoten im Stabe selbst. Die Lage der nen Knoten läfst sich indes ebenso berechnen, wie die der Schwingungs-ı. So findet Seebeck z. B. für die Entfernung der Knoten von den :en Enden eines an beiden Enden freien Stabes:

des ersten	des zweiten	des dritten	des m-ten
$\frac{1,322}{4n+2} \cdot l$	$\frac{4,982\,0}{4n+2} \cdot l$	$\frac{9,000\,7}{4n+2} \cdot l$	$\frac{4m-3}{4n+2} \cdot l.$

Bei der langsamsten Schwingung bilden sich also zwei Knoten, die um 2 von den Enden liegen und um 0,551 6 der Stablänge von einander nt sind. Bei der zweiten, schnellern Schwingung bilden sich drei n, einer in der Mitte, wie sich aus dem Ausdruck für den zweiten n ergibt, der für den Abstand von dem nächsten freien Ende 0,498 , die beiden andern sind um 0,132 von den Enden des Stabes entfernt. er dritten Schwingungszahl bilden sich vier Knoten, welche um 0,0944 ,355 8 von den Enden des Stabes entfernt sind. Der Abstand der ı mittlern Knoten ist 0,288 8 und der mittlern von den äufsern 0,261 4. n dem folgenden Falle bilden sich fünf Knoten, deren Lage sich eben-:echnen läfst und so fort.

Man kann diese theoretischen Resultate experimentell nachweisen. Die Schwingungszahlen mit den angegebenen übereinstimmen, werden ı nächsten Abschnitte zeigen.

Die Lage der Knotenpunkte läfst sich am besten auf einem dünnen ın von ziemlicher Breite und Länge bestimmen. Strehlke[2]) wandte

---

[1]) *Cauchy* a. a. O.

[2]) *Strehlke*, Poggend. Ann. XXVII. Dove, Repert. Bd. III. p. 111.

Stahlstäbe von 1^m—$1^m,3$ Länge, 12—15 Millimeter Breite und 4 Millimeter Dicke an und bestreute sie auf der obern Fläche nach dem Vorgange von Chladni[1]) mit trocknem, staubfreiem Sand. Der Sand wird von den schwingenden Stellen des Stabes fortgeworfen und an den ruhenden Stellen angesammelt, so dafs man dadurch die Lage der Knoten sichtbar machen kann. Man spannt diese Stäbe zwischen zwei konischen Spitzen an der Stelle zweier Knoten ein und bringt die Stäbe durch Anstreichen mit dem Violinbogen in Schwingung. Der Sand wandert dann nach den Knotenlinien hin und bleibt dort in Ruhe.

Die Knotenlinien stellen sich als feine, zur Längsaxe des Stabes senkrechte Linien dar, und ihre Lage ist nach den Messungen von Strehlke genau der Theorie entsprechend.

In seiner Abhandlung über die Bewegung elastischer Körper macht Poisson auf die einfache Relation auch der transversalen und longitudinalen Schwingungen von Stäben aufmerksam, wenn sie ihre langsamsten Schwingungen vollführen[2]). Ist der Stab an beiden Enden frei oder fest, so haben wir für die Zahl der transversalen Schwingungen

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4 l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Für die longitudinalen Schwingungen der langsamsten Art hatten wir § 138

$$N' = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Man erhält demnach

$$\frac{N}{N'} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \pi \frac{r}{l} = 3{,}5608 \frac{r}{l} \cdot$$

F. Savart hat durch Versuche diese von Poisson zuerst aufgestellte Relation nachgewiesen. Es wurden die longitudinalen Schwingungen eines nahezu 1^m langen cylindrischen homogenen Stabes beobachtet und darauf die transversalen Schwingungen eines Stückes des Stabes, welches genau $\frac{1}{8}$ der Länge des Stabes betrug. Die Schwingungszahlen wurden nach einer im nächsten Abschnitte auseinander zu setzenden Methode aus den Tönen der Stäbe bestimmt.

Um vergleichbare Zahlen zu haben, wurde dann die beobachtete Zahl der longitudinalen Schwingungen des ganzen Stabes mit 8 multipliciert, wodurch man die Schwingungszahl eines Achtel des Stabes erhielt. Aus diesen Zahlen wurde dann nach obiger Gleichung die Schwingungszahl der transversalen Schwingungen berechnet und die so berechnete Zahl

$$N = 3{,}5608 \frac{r}{l} \cdot N'$$

mit der beobachteten Schwingungszahl verglichen. Die Resultate der Versuche sind folgende[3]):

1) *Chladni*, Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787.
2) *Poisson*, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 486.
3) *Poisson*, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 487.

Stab von		N beobachtet	N berechnet	Differenz
Messing	$l = \frac{1}{8} \cdot 0{,}825$; $r = 2^{mm}{,}4$; $N' = 17066$	1422	1415	— 7
Kupfer	$l = \frac{1}{8} \cdot 0{,}825$; $r = 1^{mm}{,}7$; $N' = 18432$	1067	1082	+ 15
Eisen	$l = \frac{1}{8} \cdot 0{,}88$; $r = 2^{mm}{,}25$; $N' = 22757$	1843	1842	— 1

Die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung sind so klein, dafs sie vollkommen innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen.

§ 143.

Transversale Schwingungen von Platten. Chladnis Klangfiguren. Wenn man eine dünne Platte von Glas oder Metall oder eine an ihrem Umfange durch Gewichte gespannte Membran anschlägt oder an ihrem Rande streicht, so kann man dieselbe ebenso wie Streifen oder Stäbe in stehende Schwingungen versetzen. Eine theoretische Ableitung dieser Schwingungen aus den Principien der Wellenbewegung ist uns hier nicht möglich, ja dieselbe ist überhaupt erst nur für einige specielle Fälle erreicht worden. Die Bewegungsgesetze von Membranen sind zuerst von Poisson entwickelt worden[1]) und ebenso hat derselbe eine Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten entwickelt. Kirchhoff[2]) hat indes von der letztern nachgewiesen, dafs sie nicht in allen Punkten richtig ist und an Stelle der Poissonschen eine neue Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten gegeben. Wir werden die Resultate der Kirchhoffschen Theorie nachher mit den Versuchen zusammenstellen.

Eine Membran, wie z. B. das Fell einer Pauke, kann entweder als Ganzes schwingen, oder sich in schwingende Teile zerlegen, welche dann durch ruhende Linien, Knotenlinien von einander getrennt sind. Eine Platte kann niemals als Ganzes schwingen, sondern zerlegt sich immer in mehrere durch Knotenlinien getrennte schwingende Teile. Theorie und Versuche beweisen, dafs die Teilung der Platten höchst mannigfaltig sein kann.

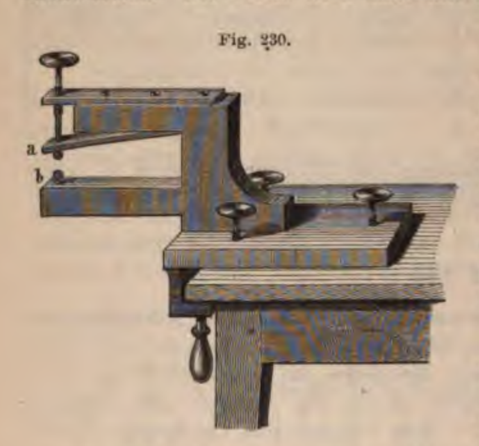
Um die Teilung der Platten zu erkennen, bedarf es nur der Kenntnis der Knotenlinien, da jeder von solchen umgebene Teil der Platte für sich schwingt, und, um diese sichtbar zu machen, wandte Chladni das vorhin schon erwähnte Mittel an. Er bestreute die zu untersuchenden Platten mit trocknem staubfreiem Quarzsand, der dann von den schwingenden Teilen der Platte fortgeworfen wird und sich auf den ruhenden Stellen, den Knotenlinien, ansammelt. Es entstehen so auf der Platte regelmäfsige Figuren, welche von Chladni Klangfiguren genannt sind.

---

[1]) *Poisson*, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 499 ff.
[2]) *Kirchhoff*, Crelles Journal f. Mathematik Bd. XL. Man sehe auch *Clebsch*, Elasticitätslehre. p. 264 ff.

Um die Platten in Schwingungen zu versetzen, befestigt man sie in ihrer Mitte oder an irgend einer andern Stelle mit der von Strehlke[1]) angegebenen Gabel (Fig. 230), indem man sie mittels der Schraube zwischen die beiden mit Tuch überbundenen Köpfe *a* und *b* befestigt. Die über diese Köpfe gebundenen Tuchstückchen müssen zuweilen erneuert werden, damit die Sandkörnchen, welche sich an dem Tuche anlegen, die Platte nicht ritzen. Die Platte wird dann mit einem mit Kolophonium versehenen Violinbogen am Rande gestrichen und zugleich an irgend einer andern Stelle mit dem Finger festgehalten. Der Bogen mufs senkrecht am Rande der Scheibe herabgeführt und das Streichen so lange fortgesetzt werden, bis keine vereinzelten Sandkörnchen mehr auf der Scheibe liegen, sondern alle sich in die einzelnen Linien der Klangfigur begeben haben.

Fig. 230.



Um die Figuren möglichst scharf zu erhalten, darf man nur wenig Sand auf die Platte streuen, da sonst die einzelnen Linien zu breit und die Figuren dadurch ungenau werden.

Die Knotenlinien bezeichnen die Grenzen der Teile, welche gleichzeitig nach entgegengesetzten Richtungen schwingen; es geht daraus hervor, dafs die Figur derselben die Platte im allgemeinen in eine gerade Anzahl von Teilen zerlegen mufs, da die entgegengesetzten Schwingungen immer paarweise auftreten müssen.

Die Schwingungszahlen verschiedener Platten, wenn sie in bestimmten Abteilungen schwingen, lassen sich nur experimentell aus den durch die Schwingungen hervorgerufenen Tönen bestimmen. Aus den Versuchen hat sich folgendes Gesetz ergeben. Wenn zwei Platten verschiedener Gröfse und verschiedener Dicke dieselbe Klangfigur zeigen, also in gleicher Weise abgeteilt werden, so sind die Schwingungszahlen der beiden Platten den Dicken derselben direkt, dem Flächeninhalt derselben aber umgekehrt proportional, oder

$$\frac{N}{N'} = \frac{q'}{q} \cdot \frac{d}{d'} .$$

Sind die Platten kreisförmig, so ist

$$q = r^2 \pi, \; q' = r'^2 \pi,$$

demnach auch

$$\frac{N}{N'} = \frac{r'^2}{r^2} \cdot \frac{d}{d'} .$$

Die Schwingungszahlen sind den Quadraten der Radien umgekehrt proportional. Dies Gesetz schliefst das folgende ein. Die Schwingungszahlen von Platten, welche einander ähnlich sind, das heifst bei denen die

[1]) *Strehlke*, Poggend. Ann. Bd. IV.

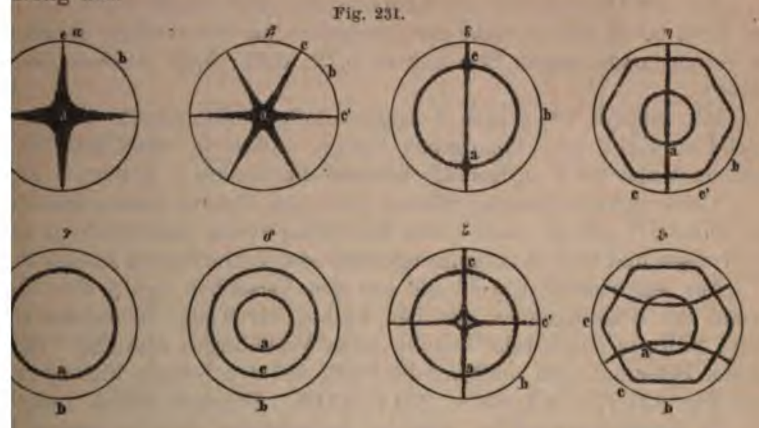
ogen Dimensionen alle in demselben Verhältnisse stehen, verhalten sich eicher Teilung der Platten umgekehrt wie die homologen Dimensionen. st nämlich bei kreisrunden Platten z. B. der Radius der einen Platte r, r andern $a \cdot r$, und ebenso die Dicke der einen d, der andern $a \cdot d$, so ch dem Gesetze in der ersten Fassung

$$\frac{N}{N'} = \frac{a^2 \cdot r^2}{r^2} \cdot \frac{d}{a \cdot d} = \frac{a}{1}$$

vie man sieht, ist das der mathematische Ausdruck für die aus dem Satze gezogene Folgerung.

Betrachten wir zunächst kreisrunde homogene Platten, man nimmt zu ersuchen am besten solche von Glas oder Metall, so ergibt für diese heorie von Kirchhoff, dafs in ihnen eine grofse Zahl verschiedener igen möglich sind, die sich in drei Gruppen ordnen lassen. Entweder ich die Platte in eine Reihe konzentrischer Zonen, oder in eine stets Anzahl von gleich grofsen Sektoren, welche durch diametrale Knoten-von einander getrennt sind, oder endlich beide Teilungsarten treten zeitig auf.

Fig. 231.



Alle diese Teilungsarten hat schon Chladni beobachtet; um sie hervor-igen, klemmt man eine kreisförmige Platte in der Mitte oder in einem n Punkte ein und berührt sie aufserdem an einem oder mehreren en und streicht dann in einiger Entfernung von den Berührungs-en. Fig. 231 zeigt eine Reihe solcher Figuren. Die Einklemmungs-e sind in allen einzelnen Figuren mit a bezeichnet, der Punkt, an lie Platte zu streichen ist, mit b, und die Berührungspunkte mit c. nt man die Platte in der Mitte ein, so erhält man stets eine radikale (231 α und β) je nach der Anzahl der berührten Punkte mit 2 oder chmessern; klemmt man die Platte exzentrisch ein und berührt keinen des Randes, so erhält man Kreise ohne Durchmesser (Fig. 231 γ).

Bei der theoretischen Behandlung der Frage gelangt man zur ung der Durchmesser der Knotenkreise zu einem Ausdruck, rischer Wert wesentlich von dem Werte des von uns Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendil

Setzen wir dieses Verhältnis der Wertheimschen Annahme gemäfs gleich $\frac{1}{4}$, welche Annahme, wie wir sahen, der Wahrheit im allgemeinen ziemlich nahe kommt, so erhält man nach Kirchhoff für den Durchmesser des Knotenkreises (Fig. 231 γ) den Wert 0,679 411 des Scheibendurchmessers. Nach Messungen von F. Savart, an drei Scheiben ausgeführt, die Poisson in seiner oben erwähnten Abhandlung mitteilt, fand sich derselbe

0,6819; 0,6798; 0,6812

des Scheibendurchmessers. Strehlke fand bei zwei äufserst sorgfältig gearbeiteten Glasscheiben nach der Angabe Kirchhoffs

0,6792; 0,6782,

Zahlen, welche mit der Theorie sehr nahe übereinstimmen.

Die Figuren 231 ε und ζ zeigen die beiden Teilungsarten gleichzeitig. Für den Durchmesser des Knotenkreises (Fig. 231 ε) gibt die Theorie den Wert 0,780 88 des Scheibendurchmessers; Strehlke fand bei den beiden erwähnten Scheiben

0,7811 und 0,7802.

Für den Durchmesser des Knotenkreises (Fig. 231 ζ) ergibt die Theorie den Wert 0,822 74, Strehlke fand denselben an drei weniger sorgfältig als die vorigen gearbeiteten Scheiben zu 0,79; 0,81; 0,82 des Scheibendurchmessers.

Die Figuren 231 η und ϑ zeigen häufig vorkommende Verzerrungen, welche an nicht ganz homogenen Platten auftreten, wenn man sie bei a einklemmt und bei b anstreicht, während die Punkte c berührt werden.

Aufser den gezeichneten können noch viele Figuren hervorgebracht werden, Chladni[1]) gibt in seiner ersten Mitteilung 80 an, dieselben sind aber alle aus Kreisen und Radien zusammengesetzt oder Verzerrungen solcher Figuren.

Aus der Theorie sowohl als aus den Versuchen ergibt sich, dafs die Anzahl der Schwingungen mit der Anzahl der Teile, in welche sich die Platte teilt, in einem sehr komplicierten Verhältnisse zunimmt. Die langsamsten Schwingungen vollführt die Platte bei der Teilung Fig. 231 α, dann folgt Fig. 231 γ, 231 β, 231 ε, 231 ζ, 231 δ. Folgende kleine Tabelle enthält die Schwingungszahlen, jene der langsamsten gleich 1 gesetzt für die angegebenen und noch einige andere Teilungen nach der Theorie von Kirchhoff und nach den Versuchen von Chladni zusammengestellt. Die erste mit K überschriebene Kolumne enthält die Anzahl der Knotenkreise, zu welcher die in den übrigen Spalten angegebenen Schwingungszahlen gehören, wenn die Knotenkreise von der über jeder Spalte angegebenen Anzahl von Durchmessern durchschnitten werden.

Tabelle der Schwingungszahlen kreisförmiger am Rande freier Platten.

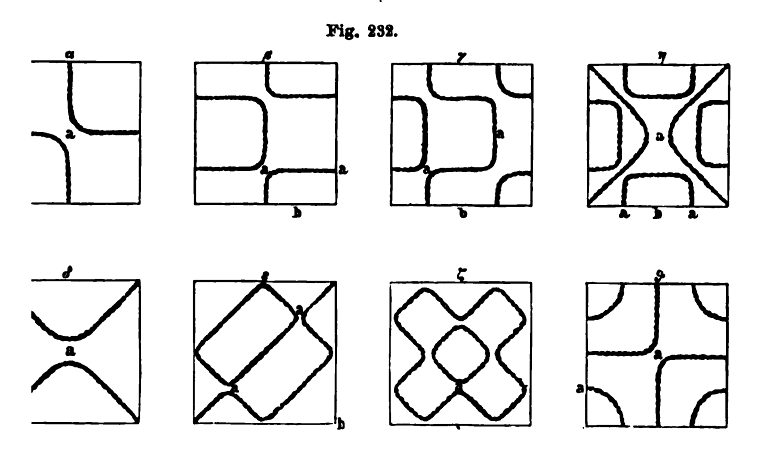
K	ohne Durchmesser		mit 1 Durchmesser		mit 2 Durchmessern		mit 3 Durchmessern	
	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
0	0	0	0	0	1	1	2,245	2,378
1	1,587	1,681 +	3,563	4,000 —	5,993	6,726	9,513 —	10,079 —
2	6,348 +	7,126 +	10,079 +	11,313 +				

[1]) *Chladni*, Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787. Man sehe auch *Strehlke*, Poggend. Ann. Bd. IV. Savart, Ann. de chim. et de phys. T. XXXVI.

Schwingungen wurden in später zu besprechender Weise aus den estimmt[1]); die in der Tabelle angegebenen Zahlen sind diejenigen Chladni angegebenen Töne; auch Kirchhoff gibt statt der Zahlen e an, und die Zeichen + oder — neben den Zahlen deuten an, wirklich beobachtete Ton oder der der genauen Schwingungszahl hende Ton etwas höher oder tiefer ist als die in der Tabelle an- en. Die Zahlen stimmen allerdings nicht besonders überein, indes al die Bestimmung der Töne mit einiger Schwierigkeit verknüpft, er beruht auch hier die Rechnung auf der Voraussetzung $\mu = \frac{1}{3}$, t vollständig genau ist.

Schwingungen nicht kreisförmiger Platten lassen sich bis jetzt nur entell bestimmen; die Teilungen quadratischer Platten und damit denselben entstehenden Knotenlinien sind ebenso mannigfaltig als en auf kreisförmigen Platten. Man kann auch dort zwei Systeme otenlinien unterscheiden, in dem einen sind die Hauptlinien parallel en des Quadrates, in dem andern parallel den Diagonalen und ich können beide Liniensysteme zugleich auftreten.

Fig. 232.



erhält man Fig. 232 a, wenn man die Platte in der Mitte unter- nd an einer Ecke z. B. bei b anstreicht, Fig. 232 β, wenn man an len Punkten a die Platte unterstützt und bei b anstreicht. Ebenso ı übrigen Figuren sind die zu unterstützenden Punkte mit a, und denen zu streichen ist, mit b bezeichnet.

se Figuren sind nach der Angabe von Strehlke[2]) gezeichnet, der iesen hat:

Die Knotenlinien, welche bei quadratischen Platten die Klangfigur ensetzen, sind stets krumme Linien; so werden z. B. die Figuren α urch zwei hyperbolische Äste gebildet.

Die Linien durchschneiden sich nie. Das scheinbare Dur neisten Fällen rührt daher, dafs man zu viel Sand

---

[1]) Man sehe § 154 dieses Teiles.

[2]) *Strehlke*, Poggend. Ann. Bd. IV. Doves Rer

gebracht hat und nun in der Nähe der ruhenden Linien die Schwingungen zu schwach werden, als dafs der Sand fortgeworfen werden kann.

Die Schwingungszahlen dieser Platten werden wir später besprechen.

In ähnlicher Weise, wie die ebenen Platten, schwingen auch Glocken, welche im Grunde nichts weiter sind als gekrümmte Platten. Bei den langsamsten Schwingungen teilen sich die Glocken in vier Teile, die ruhenden Linien liegen um einen Bogen von 90° von einander entfernt und durchsetzen die Glocke ihrer ganzen Höhe nach. Man kann diese Teilung sehr leicht sichtbar machen dadurch, dafs man die Glocke bis etwas über ihre halbe Höhe mit Wasser füllt. An den Stellen der stärksten Schwingung wird das Wasser stark zurückgestofsen und in wellenförmige Bewegung gesetzt, während es an den 45° davon entfernten Stellen der Knoten in Ruhe bleibt. Häufig werden selbst Tröpfchen von der Stelle der stärksten Schwingung auf die Oberfläche der Flüssigkeit geworfen, welche sich eine Zeit lang halten und in regelmäfsigen Figuren angesammelt werden können.

Eine eigentümliche Art von Figuren hat Savart[1]) auf schwingenden Platten beobachtet, wenn man dieselben anstatt mit staubfreiem Sand mit staubigem Sande oder mit Sand und Lycopodium (Bärlappsamen) bestreut.

Beim Bestreuen mit Lycopodium zeigen sich nämlich, wenn man die Mitte der Seiten unterstützt und eine Ecke anstreicht, aufser den eigentlich ruhenden Linien in der Nähe der vier Ecken wirbelnde Wolken von ovaler Form (Fig. 233), jedoch immer so, dafs der zugespitzte Teil der

Fig. 233.

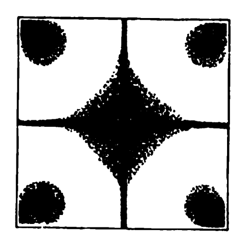
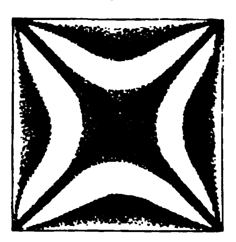


Fig. 234.



Basis der Wolke nach der Ecke zu gerichtet ist. Wenn die schwingende Bewegung der Scheibe schwächer wird, so bleibt in jeder Ecke eine Gruppe halbkugelförmiger Erhöhungen zurück. Fig. 234 erscheint, wenn man die Ecken festhält und in der Mitte der Seite des Quadrates streicht, die Lycopodiumansammlung findet in der Mitte statt, jedoch ist zu bemerken, dafs durch diese Wolken noch Kurven von geringer Breite bis zu den Ecken gehen. Diese Kurven sind nur in den Momenten der stärksten Erschütterung sichtbar.

Savart sah in diesen Figuren einen Beweis für eine zweite Teilungsart der Platte. Nach ihm ist die Scheibe der Sitz vieler übereinander greifender Teilungsarten, von denen besonders zwei hervortreten; die erste ist die gewöhnliche, sich in den Figuren des staubfreien Sandes zeigende, die zweite tritt immer mit der ersten ein und bewirkt, dafs in der Mitte der schwingenden Abteilungen gewisse Strecken horizontal bleiben, auf

[1]) *Savart*, Annales de chim. et de phys. Tome XXXVI.

denen die Teilchen, die an den erschütterten Stellen nicht liegen bleiben können, beisammen bleiben und nur eine wirbelnde Bewegung zeigen.

Gegen diese Erklärung wandte Faraday[1]) ein, dafs selbst bei einer Neigung der Platte gegen den Horizont von 6 bis 10°, die jedenfalls viel gröfser sei als die Neigung der schwingenden Teile, ein Aufsteigen des Lycopodium der Schwere entgegen zu den Vibrationsmittelpunkten stattfinde und der Staub so lange sich dort halten kann, als die Platte kräftig erschüttert werde.

Faraday leitet diese Figuren von Luftströmen her, welche von den Knotenlinien her zu den Punkten der stärksten Erschütterung hinwehen. Damit stimmt es überein, dafs nur bei Anwendung des leichten Staubes sich diese Figuren zeigen, indem der schwerere Sand von den Luftströmen nicht fortgerissen wird. Ebenso sah Faraday, wenn kleine Stücke von Karten in Winkelform in der Nähe der Vibrationscentra so befestigt wurden, dafs ein Schenkel dem Rande der quadratischen Scheibe (Fig. 234) parallel lag, dafs dann der Staub in die Winkel hinein ging, wie wenn Ströme von den Wänden der Karte aufgefangen wären. Feine Kieselerde auf ein Buch gestreut und der schwingenden Platte möglichst nahe gebracht, flog nach der Platte, als wenn ein Luftstrom von dem Pulver nach der Platte hinging.

Den entschiedensten Beweis für die Richtigkeit der Faradayschen Erklärung bildet aber das Verhalten der mit Lycopodium bestreuten Platte im luftverdünnten Raum. Eine Glasscheibe wurde auf vier Korkfüfsen unter die Glocke der Luftpumpe gelegt und vermittels eines an der Platte senkrecht zu ihrer Ebene befestigten Stabes, der durch eine Stopfbüchse aus der Glocke herausgeleitet war und aufserhalb der Glocke in longitudinale Erschütterungen versetzt wurde, zum Vibrieren gebracht. Da der Stab senkrecht zur Ebene der Platte ist, so wird die Platte durch longitudinale Schwingungen desselben in transversale Bewegung versetzt. So lange die Luft unter der Glocke die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft besafs, zeigte die Platte die Staubfiguren ganz in der gewöhnlichen Weise. War aber die Luft bis auf 5—3 Centimeter Quecksilberdruck verdünnt, so ging das Pulver quer über der Platte hin nach den ruhenden Knotenlinien, wie es der Sand in freier Luft thut, und die Wolken an den Vibrationsmittelpunkten zeigten sich nicht.

Aus diesem Versuche geht auf das entschiedenste hervor, dafs diese Staubfiguren nichts mit der Schwingung der Platte direkt zu thun haben, dafs sie also nicht, wie Savart sie nannte, sekundäre Klangfiguren und Folge einer zweiten Teilung der Scheibe sind, sondern dafs zu ihrer Bildung das Vorhandensein der Luft wesentlich erfordert wird.

Die Luftströme, welche nach allem dem der Grund der Erscheinung sind, entstehen durch die mechanische Einwirkung der schwingenden Platte auf die umgebende Luft. So wie der schwingende Teil der Platte sich aufwärts bewegt, wird die darüber befindliche Luft aus der Stelle getrieben und zwar um so stärker, je näher dieselbe der Stelle der stärksten Schwingung ist, um so weniger, je näher sie den Knotenlinien ist. Wenn nun die Platte

---

[1]) *Faraday*, Philosophical Transact. for the year 1831. Poggend. Annal. Bd. XXVI.

beim Anfange der zweiten Hälfte der Oscillation in ihre Gleichgewichtslage zurückkehrt, so kann die über dem Orte der stärksten Schwingung befindliche Luft, welche eine von der Platte fort gerichtete Geschwindigkeit besitzt, nicht so schnell als die Platte zurückkehren. Es bildet sich daher ein leerer Raum, in den die Luft von den Knotenlinien her, wo sie in Ruhe ist, über die Platte hin eindringt. Dadurch mufs notwendig ein Luftstrom entstehen, der von allen Seiten von den Knotenlinien gegen die Orte der stärksten Schwingung gerichtet ist und das Lycopodium mit sich an diese Stelle hinführt. Natürlich mufs diese Luft auf einem andern Wege zu den Knotenlinien zurückkehren. An den Orten der stärksten Oscillation stauen sich die Ströme und es entsteht daher dort ein schwacher aufsteigender Luftstrom, der sich daran erkennen läfst, dafs sich das Lycopodium über den Stellen der stärksten Schwingung erhebt und etwas über der Platte wieder seitwärts geführt wird.

Gleiche Erscheinungen wie in der Luft sah Faraday, wenn er die Platte mit einer Flüssigkeit bedeckte. Durch die entstehenden Ströme konnte selbst die Bildung der Klangfiguren ganz gehindert werden. Es zeigten sich dann nur die Anhäufungen des angewandten Pulvers, Messingfeilicht oder Sand, an den Stellen der stärksten Schwingung.

§ 144.

Drehende Schwingungen von Stäben. Aufser den longitudinalen und transversalen Schwingungen haben wir früher schon noch eine dritte Art von Schwingungen kennen gelernt, die Torsionsschwingungen. Wir benutzten sie damals, um mit Hülfe der Pendelgesetze den Torsionskoefficienten von Drähten zu bestimmen, indem wir die Drähte unten mit einer schweren Kugel versahen und diese in horizontale Schwingungen versetzten.

Wie wir damals sahen, gelten die Torsionsgesetze nach den Versuchen von Wertheim auch für dicke Stäbe, das heifst, bei einer denselben erteilten Torsion ist die elastische Kraft, welche den gedrehten Teil des Stabes in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, der Torsion einfach proportional. Denken wir uns deshalb einen Stab an seinem einen Ende durch Torsion in Schwingungen versetzt, so müssen sich diese Schwingungen in dem Stabe gerade so fortpflanzen wie die longitudinalen und transversalen, und ist der Stab an einem Ende begrenzt, so mufs an dieser Grenze eine Reflexion der Schwingungen eintreten, und durch die Interferenz der primären und der reflektierten Schwingungen müssen in dem Stabe stehende Wellen entstehen.

Um die Gesetze dieser Schwingungen zu entwickeln, denken wir uns wie § 52 den schwingenden Stab als aus lauter seiner Längsaxe parallelen Fasern von unendlich kleinem Querschnitt zusammengesetzt. Wird der Stab tordiert, so gehen diese Fasern aus geraden Linien in Spiralen über, welche auf einem Cylinder liegen, dessen Radius gleich ist dem Abstand der Faser von der Axe des Stabes. Die in der Richtung der Stabaxe übereinander liegenden Querschnitte der Faser haben dann gegen einander eine Verschiebung erhalten, und die Kraft, welche diese Querschnitte in

ative Gleichgewichtslage zurückzubringen sucht, ist nach § 52 erschiebungswinkel proportional. Stellt $amoq$ (Fig. 235) eine m tordierten Zustande des Stabes vor, welche im Gleichgewichts- die Lage ab hat, so ist der Winkel oms der Ver- ngswinkel des Querschnittes o der Faser gegen den Quer- m, der Winkel qov derjenige des Querschnittes q gegen o. ft, mit welcher der Querschnitt o in seine Gleichge- ge in Bezug auf m, also nach s hin getrieben wird, ist 52

Fig. 235.

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot oms \cdot dq,$$

r mit dq den Querschnitt der Faser bezeichnen. Ebenso

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot qov \cdot dq,$$

ft, welche den Querschnitt o in Bezug auf q, also rt in seine Gleichgewichtslage treibt. Die den Quer- dq nach s, also auch gegen seine Gleichgewichtslage hin treibende Kraft ist dann

$$\frac{E}{2(1+\mu)}\, dq\,(oms - qov).$$

nnen wir den Abstand der Faser von der Stabaxe r, so ler Querschnitt des Stabes, zu welchem dq gehört, in- eser an dq angreifenden Kraft das Drehungsmoment

$$\frac{E}{2(1+\mu)}\, r\,dq\,(oms - qov).$$

s Drehungsmoment, welches der ganze Querschnitt des Stabes gegen leichgewichtslage erhält, ist dann gleich der Summe der für alle elemente dq dieses Querschnittes sich ergebenden Momente. Zur dieser Summe können wir zunächst das Flächenelement dq ersetzen inen Ring von der Breite dr, dessen Radius gleich r, gleich dem le der betrachteten Faser von der Stabaxe ist, denn für alle diesen sammensetzenden Elemente dq hat r und ebenso der Verschiebungs- genau denselben Wert. Die Fläche dieses Ringes ist $2\pi r\,dr$, und vird das Drehungsmoment von den an diesem Ringe angreifenden

$$2\pi\,\frac{E}{2(1+\mu)}\, r^2 dr\,(oms - qov).$$

n sei der Winkel, um welchen der um x von dem Ende des Stabes e Querschnitt m gedreht ist, gleich φ, damit ist die Länge des $r\varphi$. Der Querschnitt o, der um dx weiter vom Stabende entfernt dann um den Winkel φ' gedreht, so dafs der Bogen $op = r\varphi'$ ist. rechtwinkligen Dreiecke osm ist dann $os = r\,(\varphi' - \varphi)$, somit

$$\operatorname{tang} oms = \frac{os}{sm} = \frac{r\,(\varphi' - \varphi)}{dx}.$$

Nennen wir den Winkel, um welchen der Querschnitt q gedreh φ'', so wird ebenso

$$\operatorname{tang} qov = \frac{r(\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Bei der Kleinheit der Winkel können wir die Bögen durch Tangenten ersetzen, und erhalten dann für das Drehungsmoment

$$2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} r^3 dr \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Das den ganzen Querschnitt zurückdrehende Moment erhalten v der Summe der für alle einzelnen Ringe gebildeten Momente, somit, der Radius des Stabes gleich ϱ ist,

$$\int_0^\varrho 2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx} \cdot r^3 dr.$$

Da in dieser Summe nur r veränderlich ist, so wird dieselbe

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\varrho^4 \pi}{2} \cdot \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Um die dem Querschnitt gegen die Gleichgewichtslage hin erteil schleunigung zu erhalten, müssen wir das Drehungsmoment durch das heitsmoment desselben dividieren. Nennen wir die Dichtigkeit des S also die Masse der Volumeinheit d, und die Dicke des betrachteten schnittes, die wir gleich dem Abstande zweier Querschnitte setzen k dx, so wird nach § 19 das Trägheitsmoment

$$d \frac{\varrho^4 \pi}{2} dx,$$

und damit die Beschleunigung

$$\frac{E}{2(1+\mu) \cdot d} \cdot \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx^2}.$$

Der Zähler des zweiten Bruches in diesem Ausdruck ist nichts Ar als das zweite Differential $d^2\varphi$; die Gleichung, welche der Bewegun Stabes zu Grunde liegt, wird demnach

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{E}{2(1+\mu) \cdot d} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

dieselbe, hier auf die Winkelbeschleunigung sich beziehende Gleichun der wir § 126 gelangten. Wird also an irgend einer Stelle eine begrenzten Stabes durch Torsion eine schwingende Bewegung erzeug der Amplitude 2α, so pflanzt sich dieselbe durch den Stab nach den § erkannten Gesetze fort, so dafs im Abstande x von der Erregungsstell Zeit t die Bewegung gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right),$$

worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegu

$$c = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)d}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

mit die Wellenlänge

$$\lambda = c \cdot T = T \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)d}} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

ıd die Schwingungsdauer

$$T = \lambda \sqrt{2(1+\mu)} \sqrt{\frac{d}{E}}$$

t.

Alle diese Ausdrücke unterscheiden sich von den für die longitudinalen :hwingungen nur durch den Faktor $\sqrt{2(1+\mu)}$, also nur so weit, dafs ı Stelle des Elasticitätskoefficienten der Torsionskoefficient tritt.

Daraus folgt, dafs die Gesetze der drehenden Schwingungen cylin- ·ischer Stäbe vollständig mit denen der longitudinalen Schwingungen § 138) zusammenfallen, so dafs es überflüssig ist, dieselben im einzelnen ı entwickeln; es genügt eine kurze Andeutung.

Ein an seinem einen Ende fester Stab kann nur solche stehende Wellen ·halten, für welche die Länge des Stabes eine ungerade Anzahl von ein .ertel Wellenlängen beträgt; es folgt somit für die Schwingungsdauer und chwingungsanzahl

$$T_n = \frac{4l}{(2n+1)c}; \quad N_n = (2n+1)\frac{c}{4l},$$

e langsamsten sind jene, für welche $n = 0$, somit die Schwingungsdauer

$$T = \frac{4l}{c}$$

. Dieselbe ist somit gleich der vierfachen Stablänge, dividiert durch die rtpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung.

Ist der Stab an beiden Enden fest oder frei, so kann derselbe alle jenigen Schwingungen vollführen, für welche seine Länge irgend ein ılfaches einer halben Wellenlänge ist; die langsamsten Schwingungen sind

$$T = \frac{2l}{c};$$

Schwingungsdauer ist somit die Hälfte, die Schwingungsanzahl die ›pelte von derjenigen eines an seinem einen Ende festen Stabes. Die ·igen Schwingungszahlen sind gegeben durch den Ausdruck

$$N_n = n\frac{c}{2l},$$

rin n jede ganze Zahl sein kann.

Zwischen den gleichen Teilungen cylindrischer Stäbe entsprechenden ıwingungszahlen der longitudinalen und drehenden Schwingungen ergibt h eine äufserst einfache Beziehung[1]). Dividieren wir die einer gleichen ilung entsprechende Anzahl longitudinaler Schwingungen

$$N' = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}}$$

rch jene der drehenden Schwingungen, so wird

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{2(1+\mu)}.$$

---

[1]) *Poisson*, Mémoires de l'Acad. de France. Tom. VIII. p. 456.

Eine Vergleichung der Schwingungszahlen kann also ebenfalls über den Wert von μ, des Verhältnisses von Querkontraktion zur Längendilatation Aufschlufs geben. Nach den Versuchen von Chladni[1]) soll das Verhältnis der Schwingungszahlen wie 3 zu 2 sein, danach wäre $\mu = 0{,}125$; nach Versuchen von Savart[2]) wäre $\frac{N'}{N} = \frac{10}{6}$, somit $\mu = 0{,}39$. Ausführlichere Versuche zur Bestimmung dieses Verhältnisses hat Wertheim angestellt[3]). Folgende kleine Tabelle enthält die Resultate der Versuche.

Stab von	Länge	Radius	Schwingungszahl longit. N'	Schwingungszahl drehend N	$\frac{N'}{N}$	μ
Eisen	$2^m{,}061$	$8^{mm}{,}220$	1255,6	766,5	1,637	0,339
Eisen	2,005	5,501	1267,3	771,1	1,643	0,349
Gufsstahl	2,000	5,055	1286,4	787,7	1,633	0,333
Messing	2,000	5,031	864,5	531,1	1,628	0,325

Nahezu stimmen diese Werte von μ mit der Annahme von Wertheim, dafs $\mu = \frac{1}{3}$ sei, indes zeigt sich doch auch hier nicht volle Konstanz übereinstimmend mit den früher von uns erhaltenen Resultaten. Die von Schneebeli nach dieser Methode gefundenen Werte von μ haben wir bereits § 49 mitgeteilt.

§ 145.

Zusammengesetzte Schwingungen. Wenn man einen Stab seiner Länge nach reibt, so sahen wir, dafs er in longitudinale Schwingungen versetzt wird. Diese longitudinalen Schwingungen treten indes, wie zuerst F. Savart[4]) gezeigt hat, fast niemals allein auf, sondern stets in Verbindung von transversalen Schwingungen. Bestreut man nämlich einen longitudinal schwingenden parallelepipedischen oder cylindrischen Stab mit Sand, so ordnet sich nach den Beobachtungen Savarts der Sand auf den Stäben in gewissen Linien, indem er nicht hüpfend wie bei der transversalen Schwingung der Stäbe, sondern der Oberfläche parallel sehr rasch verschoben wird. So bilden sich solche Knotenlinien schon auf Stäben, welche an beiden Enden frei ihre langsamsten longitudinalen Schwingungen vollführen, in grofser Zahl, während doch der Stab in Bezug auf die longitudinalen Schwingungen nur eine Knotenlinie in der Mitte besitzt. Der Sand verschiebt sich auf der Oberfläche, $L' L''$ Fig. 236, wie die Pfeilstriche es angeben, von den Punkten L zu den Punkten N.

Ferner fand Savart, wenn man auf der obern Seite des Stabes die Linien der Sandanhäufungen markiert, dann den Stab umkehrt, und ihn

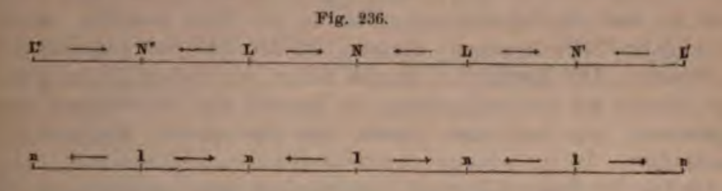
---

1) *Chladni*, Akustik. p. 110.
2) *Savart* in dem citierten Mémoire von Poisson. p. 456.
3) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. L. p. 262.
4) *F. Savart*, Annales de chim. et de phys. XIV. XXV. Doves Repertorium.

it Sand bestreut, nachdem man ihn in Schwingung versetzt hat, dafs dann e Linien der Sandanhäufung auf dieser Seite zwischen denen der obern ite liegen, dafs sie (Fig. 236) von den Punkten l, welche gerade den unkten N der obern Seite gegenüber liegen, sich nach den Punkten n ewegen.

Auf Stäben mit quadratischem oder kreisförmigem Querschnitt liegen e auf einer schraubenförmigen Linie, die sich entweder rechts oder links ewunden, oder von der Mitte aus nach der einen Seite rechts, nach der ndern links gewunden um den Stab herumlegt.

Fig. 236.



Durch viele Versuche an Stäben, welche an beiden Enden frei waren, elangte Savart zu folgenden die Zwischenräume zwischen den Sand-nhäufungen bedingenden Gesetzen[1]).

Die Zwischenräume der Sandanhäufungen sind

1) in Stäben von rechteckigem Querschnitte konstant bei verschiedener reite, wenn nur die Länge und Dicke der Stäbe ungeändert bleibt;

2) proportional der Quadratwurzel aus der Dicke bei gleicher Länge;

3) proportional der Quadratwurzel aus der Länge bei gleicher Dicke.

Schon aus diesen Gesetzen folgt, dafs diese Sandanhäufungen von ansversalschwingungen des Stabes herrühren, welche die longitudinalen gleiten und ihnen isochron sind.

Denn nach dem ersten Gesetze sind sie von den Breiten der Stäbe abhängig, wir wissen, dafs das sowohl für die longitudinalen als die ansversalen Schwingungen der Fall ist.

Nach dem zweiten Gesetze sind sie proportional den Quadratwurzeln s den Dicken. Die longitudinalen Schwingungen sind von der Dicke der äbe unabhängig, die transversalen derselben umgekehrt proportional. llen daher die Schwingungen isochron sein, so müssen sich die trans-rsalen stehenden Wellen bei dickern Stäben soviel verlängern, dafs sie eder in demselben Verhältnisse langsamer werden, als sie wegen der ge-derten Dicke bei gleicher Länge rascher geworden wären. Die Schwin-ngsdauer der transversalen Schwingungen ist nun dem Quadrate der ngen proportional. Verhalten sich demnach die Längen der stehenden ellen bei verschiedener Dicke der Stäbe wie die Quadratwurzeln aus den cken, so sind die Schwingungen isochron.

Ebenso stimmt das dritte Gesetz, denn da die Dauer einer longitu-nalen Schwingung der Länge des Stabes, die einer transversalen Schwin-ng aber dem Quadrate derselben proportional ist, so müssen bei ver-hiedener Länge des Stabes die Längen der Transversalwellen proportional

[1]) *F. Savart*, Annales de chim. et de phys. LXV. Doves Repertorium . VI. p. 60. (Dargestellt von *Seebeck*.)

der Quadratwurzel dieser Länge geändert werden, um den longitudinalen Schwingungen isochron zu sein.

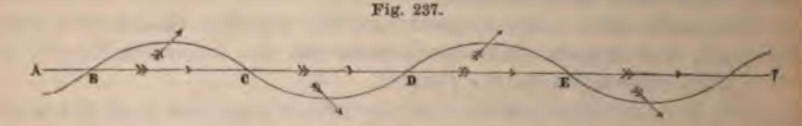
So findet auch Savart bei gespannten Streifen oder Saiten die Zwischenräume jener Knoten proportional der Länge und der Quadratwurzel aus der Spannung in Übereinstimmung mit der Annahme, daſs die Linien von einer isochronen Transversalbewegung herrühren.

Ferner auch, wenn man auf einem Stabe die Sandstellen bezeichnet und ihn sodann mit dem Bogen in gewöhnliche transversale Schwingungen versetzt, so daſs die Länge der stehenden Welle gleich ist dem Abstande von einer Sandstelle der obern Seite bis zur nächsten Sandstelle der untern Fläche, so sind die Schwingungszahlen in der That dieselben, als die der longitudinalen Schwingungen; dasselbe ist der Fall bei gespannten Saiten oder Streifen. Die Erklärung, welche Savart von diesen Linien gibt, anzuführen, wollen wir hier unterlassen, da Seebeck die Unrichtigkeit derselben nachgewiesen hat und statt dessen die Seebecksche Erklärung folgen lassen[1]).

Infolge der koexistierenden transversalen und longitudinalen Schwingungen der Teilchen der Stäbe beschreiben die Teilchen derselben die Resultante aus beiden Bewegungen, im allgemeinen elliptische Bahnen, § 130. Ist nun die Resultante gegen die Sandkörner gerichtet, so stöſst sie dieselben in ihrer Richtung, das heiſst unter einem spitzen Winkel gegen die wagerechte Fläche des Stabes fort; ist sie aber während der nächsten Halbschwingung von den Sandkörnern weggerichtet, so läſst sie dieselben liegen. Daraus ergibt sich ganz einfach, daſs der Sand auf die abwechselnden Knoten der transversalen Wellen getrieben werden müsse.

Es sei z. B. AF ein Stück des Stabes (Fig. 237), welches in longitudinaler Schwingung nach rechts gedacht werde, während die Ordinaten der

Fig. 237.

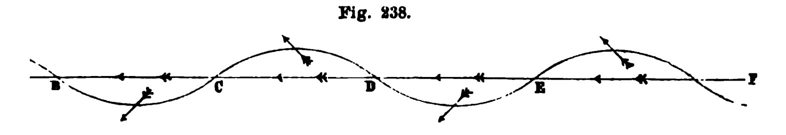


gezeichneten Wellenlinien die transversalen Geschwindigkeiten darstellen mögen, so daſs also die zwischen B und C liegenden Punkte sich zugleich nach rechts und oben, die zwischen C und D liegenden nach rechts und unten bewegen u. s. f. Alsdann haben die aus beiden Bewegungen resultierenden Geschwindigkeiten zwischen B und C sowohl als in den andern Strecken die Richtung der durch die Wellenlinie gelegten Pfeile und man sieht leicht, daſs der über BC liegende Sand nach C, der über DE liegende nach E getrieben wird, während der über CD und EF liegende Sand jetzt liegen bleibt. In der folgenden Zeit gehen beide Bewegungen in die entgegengetzten über (Fig. 238). Die longitudinale Bewegung ist auf der ganzen Strecke AF von der Rechten zur Linken gerichtet, die transversale zwischen BC und DE nach unten, zwischen CD und EF nach oben. Die resultierende Bewegung hat die Richtung der durch die Wellenlinie gelegten Pfeile, und man sieht, wie jetzt der Sand von CD nach C, von EF nach E

[1]) *Seebeck* in Dove, Repertorium. Bd. VIII. p. 53.

ben wird, während er jetzt zwischen BC und DE liegen bleibt. Da-
rd sich der Sand in C und E ansammeln, dagegen die Stellen B, D, F,
erden, oder die alternierenden Schwingungsknoten der transversalen
gungen müssen mit Sand bedeckt werden.
ehrt man den Stab um, so dafs die vorhin untere Seite zur obern
so ergibt sich aus obiger Entwicklung unmittelbar, dafs jetzt die
unbedeckten Knotenlinien bedeckte werden, und die vorhin bedeckten
erden müssen, d. h. auf der untern Seite sammelt sich der Sand in
F, und C und E werden leer.

Fig. 238.



iese Erklärung hat Seebeck durch einen Versuch bestätigt. An
circa 1m langen Spiegelglasstreifen entsprach die Dauer der langsamsten
linalschwingungen den Transversalschwingungen, bei denen der
1 14—15 Knoten erhielt, etwas näher den letztern als den erstern.
m nun Seebeck die Sandanhäufungen auf dem longitudinal schwin-
Stabe bezeichnet hatte, versetzte er durch Streichen mit dem Bogen
en in die Transversalschwingungen mit 15 Knoten, und fand so,
ie Sandanhäufungen bei den longitudinalen Schwingungen auf der
eite dem 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, auf der andern Seite dem 2, 4, 6,
13, 15 Knoten der transversalen Schwingungen entsprachen.
ie weniger hüpfende als gleitende Bewegung des Sandes zeigt an,
e transversale Bewegung schwächer ist als die longitudinale, womit
ie geringere Energie der Bewegung und die Störung der Regelmäfsig-
r Sandanhäufungen in der Mitte, in der Nähe des Schwingungs-
der longitudinalen Bewegung übereinstimmt.
uf die mit den longitudinalen stets gleichzeitig auftretenden trans-
n Schwingungen hat Kundt auch die zuerst von W. Weber[1]) beobachte-
entümlichen Bewegungen zurückgeführt, welche elastische Körper,
kpfropfen, in longitudinal schwingenden Röhren annehmen. W. Weber
eine 1 bis 1,5 Meter lange cylindrische Glasröhre von 6 bis 10mm
Durchmesser und 1mm Glasdicke, verschlofs das eine Ende mit
Korkpropfen, der genau an der Röhre abgeschnitten wurde, hielt die
n vertikaler Stellung, das verschlossene Ende abwärts gekehrt, locker
Mitte und rieb die obere Hälfte mit einem nassen Tuche stark von
ach unten; er sah dann den Stöpsel in die Höhe rücken, bis er in
te der Röhre, in der sich der Schwingungsknoten befindet, stehen

indt[2]) zeigte zunächst, dafs eine derartige Bewegung des Korks
trat, wenn derselbe eine konische Gestalt hat, und dafs dann der
stets in der Richtung von der breitern Basis zur spitzern Endfläche

[1]) W. Weber, Schweiggers Journal für Chemie und Physik. LIII. 308.
[2]) A. Kundt, Poggend. Ann. Bd. CXXVI.

sich bewegt. Ein und derselbe Kork wandert in der Röhre vom Ende gegen die Mitte, wenn die breitere Basis nach aufsen, von der Mitte gegen das Ende, wenn dieselbe gegen das Innere der Röhre hin liegt. Ebenso wie ein in der Röhre befindlicher Kork wandert ein auf die Röhre gesetzter Ring, der konisch durchbohrt ist, und zwar stets von der Spitze seiner konischen Öffnung gegen die breitere Grundfläche hin. Genau cylindrische Pfropfen in der Röhre oder genau und glatt cylindrisch durchbohrte Ringe nehmen keine Bewegung an. Sehr viel energischer wird die Bewegung, wenn man dem Kork in der Röhre eine sägenförmige Gestalt gibt wie Fig 239; und wenn man ein viereckiges Korkstück auf seiner untern Fläche sägenförmig zuschneidet wie Fig. 240, so kann man die Bewegung eben-


Fig. 239. Fig. 240.

falls auf einem schwingenden Glasstreifen beobachten. Die Bewegung geschieht dann stets in der Richtung der Pfeile, also von den Berührungsstellen der Sägezacken nach den hohlen Stellen der Säge. Bei dem Kork Fig. 240 konnte Kundt die Bewegung noch mit ungeminderter Energie beobachten, als er denselben mit Gewichten im Betrage von 200^{gr} belastete.

Dafs diese Bewegung Folge ist der die longitudinale begleitenden Transversalschwingung, zeigte Kundt bei der Anordnung (Fig. 240), indem die Bewegung sich ganz ebenso zeigte, als der Glasstreifen in transversale Schwingungen versetzt wurde. Der Glasstreifen wurde an zwei Punkten unterstützt, horizontal hingelegt und durch einen vertikalen Schlag mit einem Hammer oder vertikales Streichen mit einem Bogen in transversale Schwingungen versetzt. Der Kork wanderte dann von einem Ende des Streifens bis zum andern, über alle Knotenpunkte der transversalen Schwingungen fort. Da in diesem Falle die longitudinalen Schwingungen ausgeschlossen waren, so können nur die transversalen Schwingungen die Bewegung hervorgebracht haben, und da die Bewegung ganz dieselbe ist, wie bei den longitudinalen Schwingungen des Streifens, so darf man schliefsen, dafs auch dort die transversalen Schwingungen es sind, welche die Bewegung erzeugen.

Da die Form des Körpers für die Bewegung überhaupt und besonders für die Richtung derselben allein mafsgebend ist, so mufs dieselbe in etwas anderer Weise zustande kommen als die Bewegung des Sandes in den Versuchen von Savart. Kundt denkt sich den Vorgang folgendermafsen. Durch die nach aufsen gerichtete transversale Bewegung wird der auf dem Streifen liegende elastische Körper etwas zusammengedrückt. Sobald der Stofs aufhört, suchen die zusammengedrückten Teilchen ihre Gleichgewichtslage wieder anzunehmen und stofsen bei ihrer Ausdehnung auf die feste Unterlage. Da diese nicht nachgibt, so wird der Körper ein wenig in die Höhe geschleudert, und zwar nach einer Richtung, welche jener, nach welcher der Rückstofs erfolgt, entgegengesetzt ist. Diese Richtung hängt aber wesentlich ab von der Gestalt des gestofsenen Körpers. Hat der Körper eine zur vertikalen symmetrische Form, so werden die Zusammendrückungen der Teilchen um die vertikale herum ganz gleichmäfsig

sein und infolge dessen der aus der Ausdehnung resultierende Rückstofs vertikal sein, ein solcher Körper hüpft also einfach in die Höhe und erhält keinen seitlichen Antrieb. Deshalb wird ein glattes Korkstück von parallelepipedischem Querschnitt auf einem Streifen oder ein glatter Cylinder in einer Röhre nicht verschoben. Ein konischer Kork dagegen oder ein wie Fig. 240 gearbeitetes Stück wird vermöge seiner Form schief zusammengedrückt und deshalb auch einen schiefen Rückstofs erfahren, und die vielfach immer in derselben Richtung wiederholten Stöfse müssen ein solches Stück in horizontaler Richtung verschieben. Würde der Kork die schwingende Fläche nur in einer Linie berühren, so ginge die Bewegung nur bis zur nächsten Knotenlinie der Transversalschwingungen. Da er aber den Stab immer in einiger Ausdehnung berührt, so treffen ihn, auch wenn er sich über einer Knotenlinie befindet, die Stöfse der benachbarten Wellen, und er bewegt sich über die Knotenlinien fort, bis zur longitudinalen Knotenlinie, wo die Teile des Stabes in gröfserer Ausdehnung in Ruhe sind.

Nach dieser Erklärung der besprochenen Bewegung ist die Natur des bewegten Körpers bei der Bewegung von wesentlichem Einflufs; harte Körper dürfen nach derselben keine Bewegung annehmen; in der That zeigte Kundt, dafs Stücke von Holz oder Metall sich nicht bewegten, dafs nur solche Körper sich bewegen, welche wie Kork und Kautschuk leicht zusammendrückbar sind.

Ebenso wie die Longitudinalschwingungen immer von Transversalschwingungen begleitet sind, so treten auch in den meisten Fällen bei Transversalschwingungen einer bestimmten Periode solche anderer Perioden hinzu. Wirklich einfach periodische Schwingungen entstehen in den seltensten Fällen. So ist auch die Bewegung schwingender Saiten, wenn dieselbe durch Zupfen oder Streichen erregt wird, fast stets eine aus sehr verschiedenen Schwingungen zusammengesetzte. Um die Schwingungen der Saiten zu analysieren, bedient man sich entweder der graphischen Methode, welche zuerst von Savart und Duhamel[1]) angewandt ist, oder des Vibrationsmikroskopes von Lissajous. Erstere Methode beruht darauf, dafs man den schwingenden Körper mit einem feinen Stift versieht und vor demselben einen Cylinder dreht, der mit Rufs geschwärzt ist (Fig. 241). Die Spitze berührt den Cylinder nur ganz leicht. Die Axe des Cylinders ist mit einem Schraubengewinde versehen, so dass er beim Drehen sich gleichzeitig hebt oder senkt. Wird der Cylinder gedreht, wenn der schwingende Körper, etwa ein Stab, sich nicht bewegt, so zieht die Spitze auf dem Cylinder eine einfache Spirallinie, wenn aber der Stab schwingt, so erhält die Spirallinie eine Wellenform und jeder Welle entspricht eine Schwingung des Stabes. Wenn der Stab in einer komplicierten Form schwingt, wenn gleichzeitig Schwingungen verschiedener Periode vollführt werden, so prägen sich dieselben in der Welle vollständig aus, da die nach einander stattfindenden Bewegungen sich auf dem Cylinder neben einander darstellen. Man bekommt auf dem berufsten Cylinder genau die Form, welche bei einer schwingenden Punktreihe die Reihe bis zu dem Punkte, bis zu welchem sich dieselbe fortgepflanzt hat, annimmt[2]) (§ 131).

---

[1]) *Duhamel*, L'Institut. 1840. p. 19 u. p. 41.

[2]) *R. König* in Paris verfertigt unter dem Namen Phonautographe derartige Apparate, welche zur Abbildung der verschiedenen Schwingungen vorzüglich geeignet sind.

Das Vibrationsmikroskop benutzt zur Erkenntnis der Schwingungs ein anderes Mittel. Sieht man durch eine ruhende Lupe einen ruhende glänzenden Punkt an, so erscheint der letztere in Ruhe; wird aber d Lupe rasch bewegt, so scheint sich der Punkt in einer der Bewegung richtung der Lupe parallelen Richtung zu bewegen, eine Erscheinung, d wir im zweiten Teile besprechen und erklären werden. Wird deshalb ei

Fig. 241.



solche Lupe in eine einfach schwingende Bewegung versetzt, so schei der Punkt in derselben Richtung hin und her zu schwingen und man sie statt des Punktes eine glänzende Linie. Wird nun der Punkt gleichzeiti in einer zu der erstern senkrechten Richtung bewegt, so kombiniert sich di wirkliche Bewegung mit der scheinbaren, und man sieht den Punkt di Kurve beschreiben, welche sich als die resultierende der beiden einzelnen Bewegungen nach den Sätzen des § 131 ergibt.

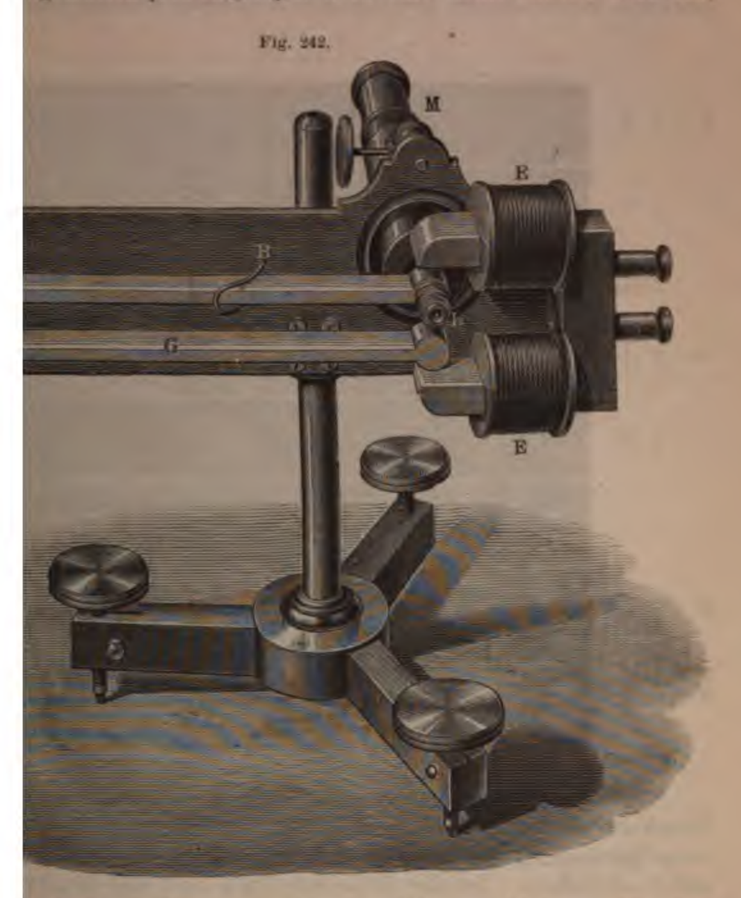
Die Form, welche Helmholtz[1]) dem Vibrationsmikroskop gegeben zeigt Fig. 242. Die zur Beobachtung dienende Lupe ist an dem Ende eine Zinke der Stimmgabel G befestigt; dieselbe besteht aus Sammellinsen, wi sie als Objektivlinsen von Mikroskopen gebraucht werden. In der Öffnung der Metallplatte, welche die Stimmgabel trägt, ist ein Rohr M angebracht in welchem sich eine Okularlinse befindet, und die so eingestellt wird, daß man, während die Stimmgabel nicht schwingt, den auf dem schwingenden Körper angebrachten glänzenden Punkt scharf sieht. Durch den Elektro magnet E, der durch intermittierende elektrische Ströme periodisch erreg wird, wird die Stimmgabel in vertikale Schwingungen versetzt. De Körper, etwa eine Saite, wird dann vor dem Mikroskop so aufgestellt, daß

[1]) *Helmholtz*, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1865. p. 1

taler Richtung schwingt und auf demselben gerade vor dem
wa durch Aufkleben eines Stärkekörnchens ein glänzender
rt.

fe des Phonautographen kann man sich nun leicht überzeugen,
wingungen einer Saite, wenn sie durch einen einfachen verti-
bewegt wird, sehr zusammengesetzter Natur sind, dafs stets
ngsamsten Schwingungen noch eine Reihe anderer auftreten,

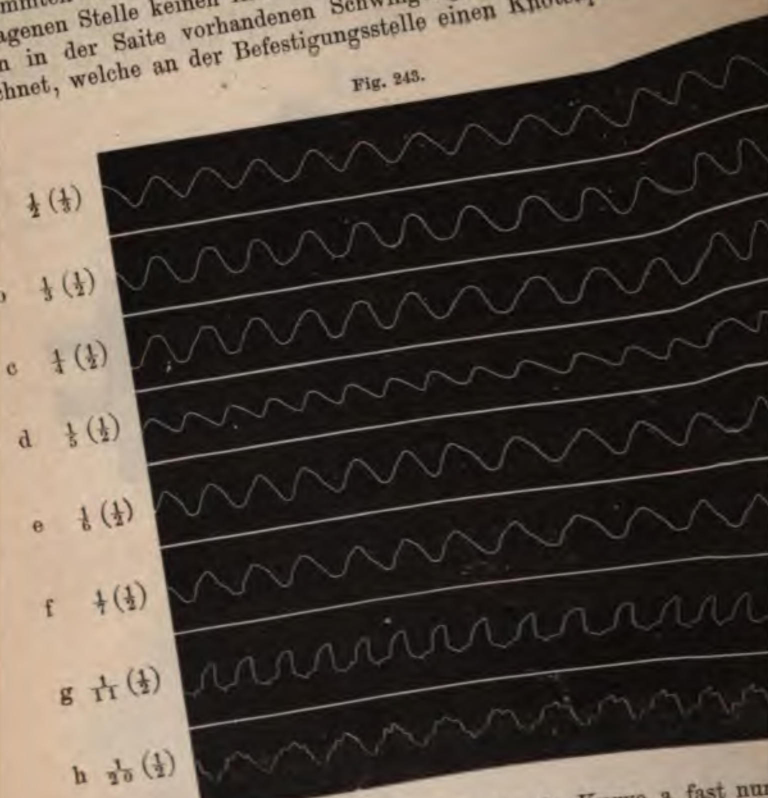
Fig. 242.



nach der Stelle, wo geschlagen wird, verschiedene. Fig. 243
nzahl von schwingenden Saiten beschriebener Kurven, welche
reunde Quincke verdanke; dieselben entstehen, wenn die Saiten
den ersten Bruch angegebenen Stelle, also $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ etc. von dem
geschlagen oder gezupft werden, und wenn der Schreibstift
den eingeklammerten Bruch angedeuteten Stelle befestigt
die erste Kurve (Fig. 243 a), welche erhalten wird, wenn man
der Mitte zupft und den Schreibstift in $\frac{1}{3}$ der Saitenlänge
richt nahezu einfachen Schwingungen, alle übrigen sind mehr
zusammengesetzt; die Anzahl der gleichzeitigen Schwingungen

der Saite vorhanden sind, ist um so gröfser, je näher dem Ende man
aite zupft, wie eine Betrachtung der gezeichneten Kurven b, c etc.
t, bei denen allen der Schreibstift sich in der Mitte der Saite befand.
rgibt sich das auch aus der Überlegung, dafs bei dem Schlagen einer
immten Stelle alle die Schwingungen auftreten, welche an der ge-
agenen Stelle keinen Knotenpunkt haben, und dafs der Schreibstift von
n in der Saite vorhandenen Schwingungen nur diejenigen nicht auf-
chnet, welche an der Befestigungsstelle einen Knotenpunkt haben

Fig. 243.



Das ist auch der Grund, weshalb die Kurve a fast nur
Sinuskurve ist; denn wird die Saite in der Mitte geschlagen,
keine Schwingung mit der Zahl $2n$ bilden, wenn wir jene de
mit 1 bezeichnen. Da der Schreibstift nun in $\frac{1}{3}$ angebrach
derselbe keine der Schwingungen $3n$ angeben, da alle diese
einen Knotenpunkt haben. Nur die Schwingungen $5n$, $7n$, 1
gezeichnet werden; dieselben sind indes so schwach, dafs si
kaum mehr zu erkennen sind.

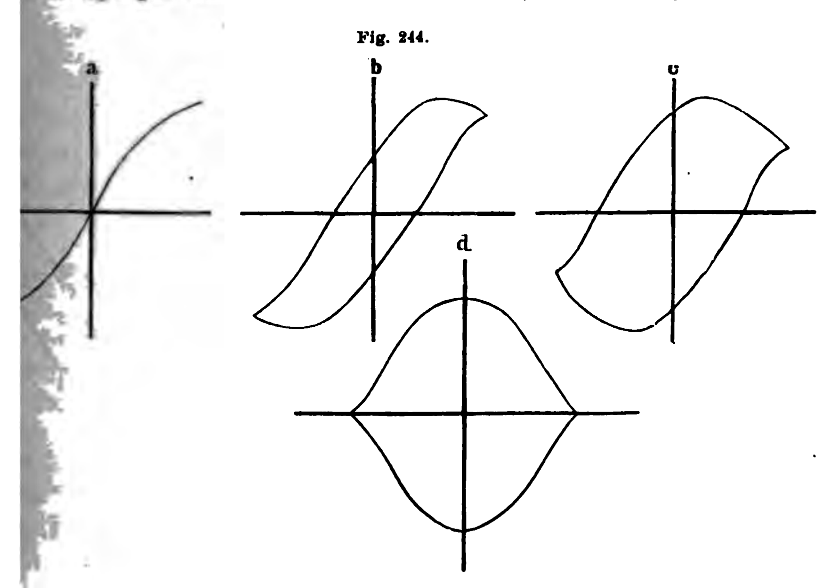
Die Kurve b enthält im wesentlichen dieselben Sc
hier können die Schwingungen $3n$ nicht auftreten, die $2n$
werden.

Eine weitere Besprechung der Kurven im einzelnen wi
lich sein, da die oben aufgestellten Sätze leicht die in
Schwingungen erkennen lassen.

Helmholtz[1]) hat über die zusammengesetzten Schwingungen der Saiten, ı sie geschlagen oder gezupft werden, ausführliche theoretische und rimentelle Untersuchungen angestellt. Als allgemeines Resultat hat dabei ergeben, daſs die Intensität und Anzahl der in den zusammentzten vorhandenen Einzelschwingungen auſser von der Stelle, wo die ə angeschlagen ist, von der Art und Dauer des Anschlags, sowie von Dicke, Steifigkeit und Elasticität der Saite abhängt. Wir werden auf ə Fragen im nächsten Abschnitte nochmals zurückkommen. (Man sehe 51.)

Sehr viel komplicierter sind die Schwingungen einer Saite, wenn diest nicht geschlagen oder gezupft, sondern mit einem Bogen gestrichen . Helmholtz[2]) hat das Vibrationsmikroskop vorzugsweise benutzt, um Schwingungen einer Violinsaite zu studieren, welche in gewöhnlicher

Fig. 244.



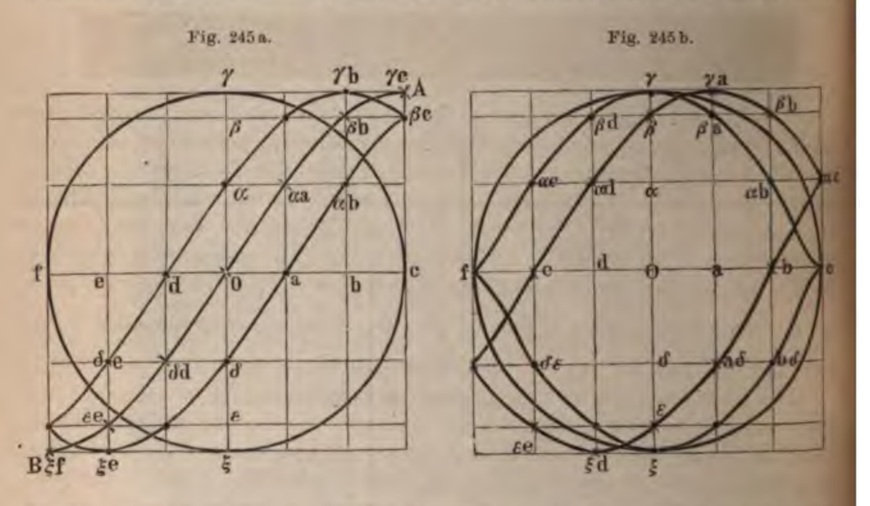
se in der Nähe des Steges mit dem Bogen gestrichen wird. Die vingungsfigur, welche die Mitte der Saite dann zeigte, wenn die Saite n reinen vollen Ton gab, ein Beweis, daſs die Schwingungen ganz regelsig waren, ist in Fig. 244 abgebildet, für den Fall, daſs die Schwingungsen der Saite und der Gabel ganz genau gleich waren. Fig. 244a zeigt Figur, wenn die Schwingungen ohne Phasendifferenz stattfanden, 'enn die vertikal schwingende Gabel $\frac{1}{12}$, c wenn sie $\frac{2}{12}$, d wenn sie Schwingung voraus ist. Dabei ist die Bewegung als ohne Phasenrenz vorausgesetzt, wenn dieselbe gleichzeitig nach rechts und oben

---

[1]) *Helmholtz*, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 128 ff. p. 563. Man sehe auch *Braun*, Über den Einfluſs von Steifigkeit, Begung und Amplitude auf die Schwingungen der Saiten. Poggend. Annalen CXLVII.

[2]) *Helmholtz*, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. 10.

geht, und angenommen, dafs beide Amplituden gleich sind. Die Figuren zeigen ohne weiteres, dafs die Schwingung der Saite keine einfache ist, denn dann müfsten nach § 130 die Fig. a eine gerade um 45° gegen die horizontale geneigte Linie, b und c Ellipsen, d ein Kreis sein. Welcher Art die Bewegung der Saite hiernach ist, das ergibt die Untersuchung, wie die Bewegung beschaffen sein mufs, welche mit einer einfachen Schwingung zusammengesetzt, obige Schwingungsfiguren liefert. Dabei ergibt sich das überraschende Resultat, dafs die Saite zwischen ihren äufsersten Lagen sich mit ganz konstanter Geschwindigkeit hin und her bewegt. Dafs in der That obige Schwingungsfiguren aus einer vertikalen einfachen Schwingung und einer horizontalen mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin und her gehenden Bewegung sich ergeben, das zeigt die Konstruktion Fig. 245a, welche die Fig. 244a und b, und Fig. 245b, welche Fig. 244c und d liefert.



Die Konstruktion ist der in § 124 angewandten ganz analog. Um die einfachen Schwingungen in ihrer einzelnen Phase darzustellen, ist um den Mittelpunkt O mit der Amplitude der Schwingungen ein Kreis gezogen und dieser in zwölf gleiche Teile geteilt. Entsprechend der Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

geben dann auf dem vertikalen Durchmesser die Sinus dieser Bögen $O\alpha$, $O\beta \cdots$ die von dem Vibrationsmikroskope in $\frac{1}{12}T$, $\frac{2}{12}T \cdots$ zurückgelegten Wege, also α, β, $\gamma \cdots$ die Lage des einfach schwingenden Punktes in den angegebenen Momenten. Der horizontale Durchmesser ist in sechs gleiche Teile geteilt, so dafs a, b, c die Lage des mit gleichförmiger Bewegung horizontal schwingenden Punktes nach $\frac{1}{12}T$, $\frac{2}{12}T \cdots$ angibt. Bewegt sich der Punkt nach beiden Richtungen, so ist die Lage, wenn keine Phasendifferenz vorhanden ist, zu den Zeiten $\frac{1}{12}T$, $\frac{2}{12}T \cdots$ durch O, αa, βb etc. gegeben, wenn die Phasendifferenz $\frac{1}{12}T$ beträgt, durch α, βa, γb, βc etc., er ist nach der vertikalen jedesmal $\frac{1}{12}$ voraus. Die Verbindungslinien der so erhaltenen einzelnen Punkte geben dann die Bahn desselben, und man sieht,

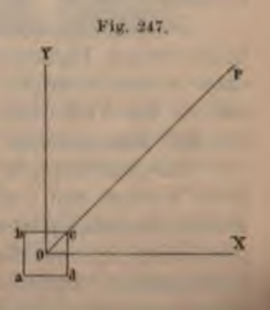
in Fig. 245 konstruierten Kurven mit den in Fig. 244 ab-
ntisch sind.
n auch direkt durch die graphische Methode nachweisen, dafs
r nahe ihrem Ende gestrichenen Saite mit gleichförmiger Ge-
hin und her geht. Die Schwingungskurven müssen dann
rizontale gleichgeneigte auf und ab steigende gerade Linien
s, abgesehen von kleinen durch Unregelmäfsigkeiten der Be-
hrenden Kräuselungen, der Fall ist, zeigt Fig. 246, welche die
der Saite aufgezeichnete Figur gibt, als der Bogen $\frac{1}{20}$ der
on dem einen Ende aufgesetzt war. Auch diese Zeichnung
meinem Freunde Quincke. Auf die Kräuselungen werden wir
rn Stelle zurückkommen.

Fig. 246.



Schwingungen alle in der Saite vorhanden sein müssen, und
iltnis zwischen den einzelnen Amplituden vorhanden sein mufs,
z[1]) untersucht. Wir begnügen uns, das Resultat der Unter-
ıteilen, nach welchem gleichzeitig alle Schwingungen, die in
glich sind, auftreten. Ist die Amplitude der langsamsten
1, so ist die der folgenden, deren Zahl gleich 2 ist, gleich $\frac{1}{4}$,
n mit der Schwingungszahl 3 gleich $\frac{1}{9}$, allgemein die der n.
ingungszahl n gleich $\frac{1}{n^2}$. Das Zusammenwirken aller dieser
erzeugt eben die gleichförmige Bewegung.
130 und 131 besprochenen Schwingungsformen, wenn zwei
u einander senkrechte Bewegungen gleichzeitig auf einen Punkt
ınn man leicht an transversal schwingenden Stäben erhalten,
ıan mit einem glänzenden Punkte versieht. Nimmt man einen
dratischem Querschnitt, so kann man die Schwingungsfiguren
cht willkürlich herstellen.
Fig. 247) der quadratische Querschnitt des Stabes; stofsen wir
chtung OX an, so wird er in dieser Richtung schwingen, und
Punkt eine Linie parallel OX zeigen.
hn parallel OY, so erhalten wir die
ie parallel OY. Da die Dicke des
bc ist, so sind die Schwingungen nach
ngen isochron. Stofsen wir nun das
gend einer andern Richtung, so können
stattfindende Bewegung als zusammen-
en aus einer parallel OX und einer
wir erhalten, da dann die beiden Be-
ne Phasendifferenz sind, eine gerade
unter irgend einem Winkel gegen OX

Fig. 247.



oltz, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 142

Erteilen wir dagegen dem Stäbchen eine Bewegung parallel der einen Richtung, etwa OX, und geben dann dem schwingenden Stabe einen Stofs nach OY, so treten Ellipsen auf, deren Gestalt von der Phasendifferenz abhängt, welche die beiden Bewegungen dann haben. Wir erhalten dann z. B. die Ellipse Fig. 209 und, von oben angesehen, eine Bewegung des Knöpfchens entgegengesetzt der des Zeigers einer Uhr, wenn wir das Stäbchen in der Richtung nach Y stofsen, wenn es nach X hin $\frac{3}{4}$ seines Weges zurückgelegt hat, einen Kreis, wenn wir es in dem Augenblicke, wo es den gröfsten Abstand nach X erreicht hat, ebenso stark nach Y stofsen, wie vorher nach X hin. Stofsen wir das Stäbchen nach Y hin, wenn es $\frac{3}{4}$ seines Weges nach der entgegengesetzten Seite, nach $-X$ hin zurückgelegt hat, so erhalten wir die Ellipse (Fig. 211) und die Bewegung ist von der Linken zur Rechten im Sinne des Zeigers einer Uhr.

Wenn das Stäbchen nach der einen Richtung ab dicker ist als nach der andern, so geschehen die Schwingungen nach Y rascher als nach X. Ist der Unterschied nur sehr unbedeutend, so dafs die Schwingung nach Y nur sehr wenig rascher ist, so hat das, wenn wir den Stab in einer gegen OX und OY geneigten Richtung stofsen, denselben Erfolg, als wenn wir bei gleicher Oscillationsdauer nach und nach die verschiedenen Phasendifferenzen hervorbrächten; wir sehen deshalb nach und nach alle die Figuren entstehen, die wir § 130 ableiteten. Bei der ersten Schwingung, wenn wir den Stab nach P hinstofsen, sehen wir eine Linie parallel OP. Die Schwingung nach der positiven Seite der Y beginnt dann zum zweiten Mal etwas früher als die nach X, die gerade Linie geht daher in eine sehr flache Ellipse über, der Punkt dreht sich wie der Zeiger einer Uhr, die grofse Axe der Ellipse liegt im Quadranten YOX.

Bei den folgenden Schwingungen wird die Phasendifferenz immer gröfser, da die Schwingung nach Y immer mehr voreilt, die Ellipse wird daher anfangs immer weniger flach, geht einen Augenblick in einen Kreis über und flacht sich dann wieder ab, aber so, dafs jetzt die grofse Axe in dem Quadranten $YO-X$ sich befindet. Bei weiterer Phasendifferenz wird die Ellipse wieder eine gerade Linie, die senkrecht zu OP ist u. s. f., es treten alle die Figuren nach einander auf, welche, wie wir sahen, bei Stäben mit quadratischem Querschnitt durch verschiedenes Stofsen erzeugt werden können.

Ist der Unterschied der Dicke bedeutend, so erhält man die in § 131 besprochenen Figuren; macht der Stab nach Y z. B. zwei Schwingungen, nach X eine, so erhält man je nach der Phasendifferenz die Kurven Fig. 215, und ist das Verhältnis nicht genau 1 : 2, so bekommt man nach und nach die dort besprochenen Kurven.

Das Kaleidophon oder phonische Kaleidoskop von Wheatstone[1]) zeigt diese Kurven und aufser diesen manche aus andern Schwingungsverhältnissen zusammengesetzte; der Apparat besteht aus mehreren Stäbchen mit glänzenden Spitzen, die nach den beiden Richtungen ihres Querschnitts von verschiedenen Dimensionen sind. Eine recht hübsche Verbesserung des Wheatstoneschen ist das Universalkaleidophon, welches fast gleichzeitig

---

[1]) *Wheatstone*, Quarterly Journal of science etc. new series Nr. 11. *Weber* in Schweigger-Seidels Jahrbuch. Bd. 50.

derjenigen von Lissajous[1]) gleich bei seiner großen Untersuchung über die Schwingungen, auf welche wir im nächsten Abschnitt nochmals zurückkommen. In Fig. 248 sind eine Anzahl der von Lissajous gegebenen Kurven mitgeteilt; die Verhältnisse der komponierenden Einzelschwingungen sind neben jeder Reihe angegeben. Sind die Schwingungsverhältnisse nicht ganz genau die angegebenen, so sieht man die in jeder Reihe dargestellten Kurven nach einander auftreten.

Drittes Kapitel.

Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

§ 146.

Longitudinale Wellen in Flüssigkeiten und Gasen. Gase und Flüssigkeiten haben, wie wir sahen, keine selbständige Gestalt; in ihnen können daher infolge der Elasticität keine schwingenden Bewegungen entstehen, welche mit einer Gestaltsänderung des Körpers verbunden sind, keine transversalen Schwingungen. Da aber die Flüssigkeiten ein selbständiges Volumen haben und, wie wir früher sahen, elastisch sind, und da ebenso die Luft infolge des Druckes, unter dem sie an der Erdoberfläche steht, eine bestimmte Dichtigkeit und Elasticität hat, so können in beiden longitudinale Wellen bestehen und sich fortpflanzen.

Da das Wasser sowohl als die Luft, als Typus der tropfbar und elastisch flüssigen Körper, homogen und isotrop sind, so müssen nach dem Frühern die an einer Stelle im Innern derselben erregten Wellen sich in der Form von Kugeln ausbreiten.

Um von der Entstehung und Fortpflanzung dieser Wellen ein deutliches Bild zu erhalten, denken wir üns eine Kugel C (Fig. 249) im Innern einer Flüssigkeit in longitudinale Schwingungen versetzt, so daſs also die Kugel sich in rascher Folge abwechselnd vergröſsere und verkleinere. Eine Vergröſserung der Kugel wird alle die Kugel rings umgebenden Flüssigkeitsteile in der Richtung der Radien fortstoſsen, also diesen Teilchen eine rings von der Kugel fortgerichtete Bewegung erteilen. Infolge dieser nach auſsen gerichteten Bewegung tritt rings um die Kugel eine Verdichtung der Flüssigkeit ein, und infolge dieser Verdichtung übt diese Flüssigkeitsschicht auf die folgenden einen stärkern Druck von innen nach auſsen als umgekehrt die umgebende Flüssigkeit von auſsen nach innen entgegendrückt. Daraus ergibt sich dann, daſs diese fortschreitende Bewegung sich rings um die Kugel immer weiter ausbreitet.

Fig. 249.



[1]) *Lissajous*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. LI.

Hat die Kugel das Maximum ihrer Ausdehnung erreicht, so zieht sie sich wieder zusammen. In den durch diese Zusammenziehung entstehenden leeren Raum wird nun wegen des Druckes der Umgebung die Flüssigkeit von allen Seiten her sich hineinbegeben; die Flüssigkeitsschicht erhält also rings um die Kugel eine rückgängige Bewegung. Dadurch tritt rings um die Kugel eine Verdünnung ein, und wegen dieser Verdünnung erhalten auch die folgenden Schichten eine rückgängige Bewegung. Die Verdünnung und somit die rückgängige Bewegung pflanzt sich, auf die Verdichtung und fortschreitende Bewegung folgend, somit gerade so um die Kugel fort wie die letztere.

Durch die Vibrationen der Kugel gelangen also zunächst die Flüssigkeitsteile, welche unmittelbar an der Kugel anliegen, in eine schwingende Bewegung und diese schwingende Bewegung pflanzt sich auf jedem Radius einer Kugel, die wir um den Mittelpunkt der Kugel C uns gelegt denken, fort wie die Schwingungen in den früher betrachteten Punktreihen, wie die longitudinalen Schwingungen in den Stäben der festen Körper.

Die longitudinalen Schwingungen in einer Flüssigkeit, sei sie tropfbar oder elastisch flüssig, sind also ein Fall der früher betrachteten Fortpflanzung einer Wellenbewegung in einem elastischen Punktsysteme. Bezeichnen bei einer kontinuierlichen Schwingung die Kreise a und a' die Stellen, in denen die Punkte in den gleichen Phasen der Bewegung sind, wo sie z. B. ihre fortschreitende Bewegung, in a zum ersten Male, in a' zum zweiten Male beginnen, so ist der Abstand der beiden Kreise eine Wellenlänge, und auf der Strecke aa' sind alle Oscillationsphasen vertreten. Der Kreis b bezeichnet dann alle die Punkte rings um die Kugel, welche eine halbe Oscillation zurückgelegt haben und gerade im Begriffe sind, von der Gleichgewichtslage aus ihre rückschreitende Bewegung zu beginnen. Bezeichnen wir demnach auch hier jene Strecke der Radien, in denen sich die Flüssigkeitsteilchen auf der einen Seite ihrer Gleichgewichtslage befinden, als Wellenberg, jenen Teil, wo sie sich auf der andern befinden, als Wellenthal, so sind die Strecken $b\,a$, $b'a'$ Wellenberge, die Strecken ba', $b'c$ Wellenthäler[1]).

Da diese longitudinalen Wellen nur in der Elasticität der Flüssigkeiten ihren Grund haben und durch die zwischen den einzelnen Flüssigkeitsteilchen thätige elastische Kraft fortgepflanzt werden, so können wir zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unmittelbar unsere früher erhaltene Gleichung anwenden:

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}},$$

worin e die elastische Kraft und d die Dichtigkeit der Flüssigkeit in der früher erwähnten Weise bedeuten.

Um demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu erhalten, haben wir nur diese beiden Gröfsen für diese speciellen Fälle zu bestimmen. Beginnen wir mit den tropfbaren Flüssigkeiten.

[1]) An dieser Auffassung der Wellenbewegung in Gasen brauchen wir auch infolge der dynamischen Gastheorie nichts zu ändern, da wir im vorigen Abschnitt sahen, dafs den Gasmolekülen mitgeteilte Bewegungen sich einfach zu den Molekularbewegungen superponieren.

Die Gröfse e ist, wie wir sahen, die Kraft, mit der die einander genäherten Teilchen sich abstofsen, die entfernten sich anziehen, wenn die Verschiebung der Teilchen der Einheit gleich geworden ist, mit der wir also die Gröfse der Verschiebung multiplicieren müssen, um die einer vorhandenen Verschiebung entsprechende Anziehung oder Abstofsung zu erhalten. Denken wir uns eine Flüssigkeitssäule in einem Gefäfse eingeschlossen, dessen Wände sich nicht ausdehnen können, und komprimieren wir diese Flüssigkeit etwa parallel der Längsaxe des Gefäfses, so wird die dieser Kompression entsprechende elastische Kraft gleich jener sein, welche die schwingende Bewegung veranlafst und fortpflanzt, da auch bei dieser nur eine Zusammendrückung und Ausdehnung nach der Richtung der Radien stattfindet, weil jeder parallel einem Radius liegende Flüssigkeitsfaden von der umgebenden Flüssigkeit eingeschlossen ist.

Ist v das Volumen der in dem Gefäfse eingeschlossenen Flüssigkeit, ist $\varkappa$ der Kompressionskoefficient der Flüssigkeit, wenn der Druck für die Flächeneinheit um die Gröfse p zunimmt, so ist die einer Volumverminderung dv entsprechende Druckzunahme dp durch die Gleichung gegeben

$$\frac{dv}{v} = \varkappa \frac{dp}{p}$$

oder

$$dp = \frac{p}{\varkappa} \frac{dv}{v}.$$

Der Quotient $\frac{dv}{v}$ gibt uns die Volumverminderung der Flüssigkeit in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens. Da nun der Voraussetzung nach die Volumverminderung nur durch eine Verkürzung der Flüssigkeitssäule parallel einer Richtung, wie bei den longitudinalen Schwingungen, stattfindet, so gibt uns der Quotient gleichzeitig die Verschiebung der Flüssigkeitsteile gegen einander gemessen nach ihrem ursprünglichen Abstand. Da wir weiter wissen, dafs die durch eine Kompression geweckte elastische Kraft stets gleich ist der äufsern dieselbe bewirkenden Kraft, so folgt, dafs dp gleich ist der zwischen den Molekülen in der Flächeneinheit thätigen Kraft, wenn dieselben um die Gröfse $\frac{dv}{v}$, dieselbe gegeben in Bruchteilen des ursprünglichen Abstandes, einander genähert sind. Daraus folgt, dafs die Gröfse e gegeben ist durch

$$e = \frac{p}{\varkappa} q,$$

wenn wir mit q den Querschnitt der betrachteten oder schwingenden Flüssigkeitssäule bezeichnen.

Die Gröfse d ist die Masse der Längeneinheit der schwingenden Flüssigkeitssäule, es ist somit, wenn s das specifische Gewicht derselben bedeutet,

$$d = sq.$$

Wir erhalten demnach für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung

$$c = \sqrt{\frac{p}{\varkappa \cdot s}},$$

oder wenn wir den der Druckeinheit entsprechenden Kompressionskoefficienten mit $\varkappa_1$ bezeichnen,

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varkappa_1 s}}.$$

Der reciproke Wert von $\varkappa_1$ ist nach den Entwicklungen des § 63 der Elasticitätskoefficient der Flüssigkeit E in denjenigen Druckeinheiten, welche dem Werte $\varkappa_1$ zu Grunde liegen, so dafs wir für die in Flüssigkeiten sich fortpflanzenden longitudinalen Wellen genau zu demselben Ausdruck gelangen wie für die longitudinalen Wellen in festen Körpern

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Da wir die Masse der Längeneinheit der Flüssigkeitsschicht ihrem Gewichte gleich gesetzt haben, mufs E in den Einheiten des absoluten Systems gegeben werden.

Im § 62 haben wir für einige Flüssigkeiten nach den Versuchen von Grassi die Werte von E in Kilogrammen für das Quadratmillimeter ausgedrückt. Um dieselben in das $C. G. S$-System zu übertragen, haben wir die dort angegebenen Werte mit 98 100 000 zu multiplicieren. Wir gaben damals für Wasser von der Temperatur 4° C.

$$E = 205.$$

Der Wert wird im $C. G. S$-System

$$E = 201{,}1 \cdot 10^8 \frac{G}{CS^2}.$$

Da in diesem System die Längeneinheit das Centimeter, somit s die Masse eines Kubikcentimeters Wasser bei 4° ist, so ist $s = 1$, und es wird in Centimetern

$$c = \sqrt{201{,}1 \cdot 10^8} = 141\,800^{\text{cm}}$$

oder in Metern $c = 1418^{\text{m}}$.

Für Quecksilber ergibt sich aus dem § 62 angegebenen Werte von $E = 3503$

$$E = 3436{,}5 \cdot 10^8 \frac{G}{CS^2}.$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers ist 13,5959, also

$$c = \sqrt{\frac{3436{,}5 \cdot 10^8}{13{,}5959}} = 159\,000^{\text{c}} = 1590^{\text{m}}.$$

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, haben Colladon und Sturm[1]) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Wasser ganz der Theorie entsprechende Werte gefunden, nämlich für die Temperatur 8° den Wert 1435^{m}.

Wir können auch dem Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in Flüssigkeiten dieselbe zweite Form geben, die wir für die festen Körper ableiteten. Wir denken uns ein Kubikcentimeter

[1]) *Colladon* und *Sturm*, Annales de chim. et de phys. T. XXXVI. Poggend. Ann. Bd. XII.

Flüssigkeit in einem unausdehnsamen Würfel und üben auf die obere Fläche der Flüssigkeit einen Druck durch ein Kubikcentimeter derselben Flüssigkeit. Der von dieser Flüssigkeit ausgeübte Druck ist in den Einheiten des C.G.S-Systems gleich gs. Die dadurch eintretende Volumverminderung in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens ist

$$\delta = \varkappa_1 gs = \frac{gs}{E}.$$

Daraus folgt

$$\frac{E}{s} = \frac{g}{\delta}$$

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen ist also gleich der Quadratwurzel aus der Beschleunigung beim freien Fall dividiert durch die Quadratwurzel aus der Volumverminderung, welche die Volumeinheit durch einen Druck erfährt, der dem Gewichte der Volumeinheit der Flüssigkeit entspricht, oder wie man sich kurz ausdrückt, welche die Volumeinheit durch ihr eigenes Gewicht erfährt[1]).

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in Gasen erhalten wir, wenn wir in dem ersten für die Flüssigkeiten abgeleiteten Ausdrucke $\varkappa = 1$ setzen; denn nach dem Mariotteschen Gesetze ist die der Volumverminderung dv entsprechende Druckvermehrung dp durch die Gleichung gegeben

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp}{p}.$$

Denn haben wir ein Volumen v eines Gases unter dem Drucke p und wächst der Druck um dp, so nimmt das Volumen um dv ab, so dafs nach dem Mariotteschen Gesetze

$$pv = (p + dp)(v - dv) = pv + vdp - pdv - dpdv.$$

Bei den hier betrachteten schwingenden Bewegungen ist dv so klein, dafs wir $dpdv$ gleich Null setzen dürfen, dann folgt aber aus dieser Gleichung

$$vdp - pdv = 0 \text{ oder } dp = p\frac{dv}{v}.$$

Wir haben somit für die Gröfse e in jedem Falle den Druck einzusetzen, unter welchem das Gas augenblicklich steht. Bedeutet demnach auch jetzt s das specifische Gewicht des Gases, so wird

$$c = \sqrt{\frac{p}{s}}.$$

Ist s' die Dichtigkeit des Gases unter dem Druck p' der Atmosphäre, so ist nach dem Mariotteschen Gesetze

$$\frac{p}{s} = \frac{p'}{s'},$$

somit

$$c = \sqrt{\frac{p'}{s'}}.$$

---

[1]) Man sehe auch *Poisson*, Traité de mécanique, livre sixième, chap. II, § 667.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen hängt somit, da Dichtig- t und Elasticität des Gases sich im gleichen Verhältnisse ändern, nicht . dem Drucke, unter welchem das Gas steht, ab, sondern ist für alle ıcke dieselbe.

An dem Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen Gasen müssen wir eine Korrektion anbringen, die, wie wir später in Wärmelehre nachweisen werden, ihren Grund darin hat, dafs jede mpression der Gase eine Erwärmung, jede Ausdehnung eine Abkühlung Folge hat. Diese Erwärmung und Abkühlung bewirkt, dafs von den llen der Verdichtung die Moleküle mit gröfserer Kraft zu denen der :dünnung getrieben werden, so zwar, dafs die elastische Kraft im Ver- tnisse 1 zu k vergröfsert wird[1]). Wir müssen deshalb den vorhin be- nmten Wert von c mit $\sqrt{k}$ multiplicieren und erhalten somit

$$c = \sqrt{\frac{p'}{s'} \cdot k}.$$

Bei der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Gasen ist ner darauf zu achten, dafs die Dichtigkeit derselben bei einem gegebenen ıcke wesentlich von der Temperatur abhängig ist. Bezeichnen wir die :htigkeit des Gases bei der Temperatur des schmelzenden Eises mit s_0, ist bei einer Temperatur t, dieselbe nach Graden der hundertteiligen ıla gemessen,

$$s' = \frac{s_0}{1 + 0{,}003\,67\,t}.$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bei der Temperatur t ıalten wir demnach

$$c = \sqrt{\frac{p'k}{s_0}(1 + 0{,}003\,67\,t)}.$$

Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft ist unter dem Drucke einer mosphäre und bei der Temperatur 0^0 gleich 0,001 293. Für Luft ist : Wert von k, wie wir in der Wärmelehre zeigen werden, 1,405. Der ıck der Atmosphäre ist in den Einheiten des $C.G.S$-Systems

$$p' = 10\,136 \cdot 10^2 \frac{G}{CS^2}.$$

Wir setzen zur Bestimmung von p' den Normaldruck zu Paris, also echnet mit dem Pariser g ein, weil die Dichtigkeit s_0 der Luft von gnault zu Paris bestimmt ist. Mit diesen Werten wird

$$c = 33\,180\sqrt{1 + 0{,}003\,67\,t}\ \text{Cm.} = 331{,}8\sqrt{1 + 0{,}003\,67\,t}\ \text{M.}$$

Für ein anderes Gas haben wir die betreffenden Werte von k und s_0 zusetzen; nennen wir das specifische Gewicht des Gases bezogen auf

[1]) Man sehe im dritten Bande den Paragraphen: Specifische Wärme der e bei konstantem Volumen.

Luft σ, so können wir für ein beliebiges Gas die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen schreiben

$$c = 331{,}8 \sqrt{\frac{k}{1{,}405 \cdot \sigma}(1 + 0{,}003\,67\, t)}.$$

Bestätigungen dieser Ausdrücke werden wir bei Besprechung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Gasen kennen lernen.

§ 147.

Stehende Wellen in Flüssigkeitscylindern. Wenn man in ein cylindrisches Gefäfs eine Flüssigkeit einschliefst und man erregt an einer Stelle des Flüssigkeitscylinders eine schwingende Bewegung, so pflanzt sich dieselbe durch die Säule fort, wird an den Enden reflektiert und es entstehen durch Interferenz der direkten und reflektierten Welle stehende Schwingungen. Da wir auf die Wellenbewegung dieser Art nach dem vorigen Paragraphen unmittelbar unsere frühere Theorie der longitudinalen Schwingungen anwenden können, so haben wir für die Schwingungsdauer dieser stehenden Wellen den Ausdruck

$$T = 2L \sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{2L}{c}$$

und wir haben nur die Länge L der stehenden Welle zu bestimmen, in welcher die Flüssigkeitssäule schwingt.

Wir können auch hier die Fälle unterscheiden, wo die Flüssigkeitssäule an beiden Seiten frei ist, oder wo sie an einem Ende frei ist, am andern befestigt. Ersteres ist dann der Fall, wenn wir eine Flüssigkeitssäule in einer heberförmigen an beiden Seiten offenen Glasröhre oder in einer in eine Flüssigkeitsmasse getauchten Glasröhre zum Schwingen bringen. Denn auch in dem letztern Falle ist die umgebende Flüssigkeit gewissermafsen weniger dicht als die in der Röhre eingeschlossene, da die Flüssigkeit aufserhalb der Röhre bei einer an dem Ende der Röhre ankommenden Verdichtung nach allen Seiten und deshalb leichter ausweichen kann, als die Flüssigkeit in der Röhre, welche sich nur der Längsrichtung der Röhre nach bewegen kann. In diesen beiden Fällen tritt demnach eine Reflexion ohne Wechsel des Vorzeichens, ohne Verlust einer halben Wellenlänge ein.

Der zweite Fall ist dann vorhanden, wenn wir eine Flüssigkeitssäule in einer geraden unten geschlossenen Glasröhre zum Schwingen bringen, es tritt dann an der untern Grenze eine Reflexion mit Verlust einer halben Wellenlänge ein; ein ankommender Wellenberg wird als Wellenthal reflektiert.

Die Oscillationsdauern und Schwingungszahlen solcher Flüssigkeitscylinder ergeben sich daher unmittelbar wie diejenigen longitudinal schwingender Stäbe, wenn wir dasselbe Verfahren anwenden wie § 138. Für den an beiden Enden freien Flüssigkeitscylinder von der Länge l wird

$$T = \frac{2l}{c}.$$

Länge der stehenden Welle ist gleich der Länge des Flüssigkeits-
·, und daraus

$$N = \frac{c}{2l}.$$

den zweiten Fall wird

$$T = \frac{4l}{c},$$

nde Welle hat die doppelte Länge des Flüssigkeitscylinders, die
ıngsdauer ist die doppelte des vorigen Falles. Die Schwingungs-
die Hälfte

$$N = \frac{c}{4l}.$$

se Zahlen entsprechen den langsamsten Schwingungen, welche die
itscylinder vollführen können. Auch hier können sich die Cylinder
ıgende Teile zerlegen, welche selbständig schwingen und wegen der
n Länge gröfsere Schwingungszahlen haben. Durch ein gleiches
ı, wie wir es im § 138 anwandten, findet man, dafs die möglichen
ıngszahlen einer an beiden Enden freien Flüssigkeitssäule sind

$$N = n \cdot \frac{c}{2l},$$

jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann; und für die
geschlossenen Röhre enthaltene Flüssigkeitssäule

$$N = (2n - 1)\frac{c}{4l}.$$

die experimentelle Bestätigung dieser Gesetze nur durch die von
ringungen der Flüssigkeit erzeugten Töne gegeben werden kann,
n wir die Versuche von Cagniard Latour und Wertheim erst im
Abschnitte besprechen können.
säulen, welche in Röhren eingeschlossen sind, können ebenfalls
regung einer vibrierenden Bewegung an ihrem einen Ende in
Schwingungen versetzt werden. Sind die Röhren an dem einen
chlossen, so tritt dort Reflexion mit Verlust einer halben Wellen-
; sind sie offen, so tritt eine Reflexion an der umgebenden Luft
Verlust einer halben Wellenlänge, da die Luftteilchen aufserhalb
e nach allen Richtungen und somit freier beweglich sind als in
. Die an die Röhre angrenzende Luft ist somit gewissermafsen
licht als in der Röhre. Die sich ergebenden Schwingungsdauern
ingungszahlen sind daher in offenen Röhren von der Länge l, für
ımsten Schwingungen

$$T = 2l\sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{2l}{c},$$

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{c}{2l}$$

berhaupt möglichen Schwingungen

$$N = n \cdot \frac{c}{2l}.$$

Für an dem einen Ende geschlossene Röhren erhalten wir statt dessen

$$T = 4l\sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{4l}{c},$$

$$N = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{c}{4l}$$

und als mögliche Schwingungszahlen

$$N = (2n - 1)\frac{c}{4l}.$$

Wir werden diese Ausdrücke im nächsten Abschnitte bei Bestimmung der Töne von offenen und gedeckten Pfeifen benutzen und dort zugleich die experimentelle Bestätigung und eingehendere Behandlung dieser Sätze geben.

Ebenso wie in Luftsäulen kann man auch plattenförmige Luftmengen in stehende Schwingungen versetzen, das heifst dünne Luftschichten, welche zwischen ebenen Platten eines festen Körpers, etwa zwischen zwei Glasplatten eingeschlossen sind, sowohl wenn man die Luftplatten seitlich fest begrenzt, das heifst die Ränder der beiden ebenen Platten, welche die Luftplatte einschliefsen, durch einen festen Rahmen verbindet, als wenn man sie seitlich unbegrenzt läfst. Die Untersuchung der schwingenden Bewegung solcher Platten hat ein grofses Interesse, weil man die Theorie dieser Bewegungen vollständig durchführen kann. In einer ausführlichen theoretischen und experimentellen Untersuchung hat Kundt[1]) für die ganz geschlossenen, das heifst rings von einem festen Rande umgebenen Luftplatten die volle Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachgewiesen, während für die offenen, das heifst rings nicht mit einem festen Rand umgebenen Luftplatten sich Abweichungen zwischen der Theorie und der Erfahrung zeigen, wie wir sie im nächsten Abschnitt auch für die offenen Luftsäulen, die offenen Orgelpfeifen finden werden. Wir müssen uns hier begnügen, auf die interessante Arbeit von Kundt hinzuweisen, da eine Behandlung dieses speciellen Falles zu viel Raum in Anspruch nehmen würde.

§ 148.

Transversale Wellen in Flüssigkeiten. Aufser den longitudinalen Schwingungen kann man den tropfbar flüssigen Körpern auch transversale Schwingungen erteilen. Die in einem Gefäfse eingeschlossene Flüssigkeit hat nämlich eine ganz bestimmte Gleichgewichtslage, und die auf eine der Schwere unterworfene Flüssigkeit wirkenden Kräfte veranlassen, dafs die Oberfläche der Flüssigkeit eine horizontale Ebene bildet. Wird nun das Gleichgewicht der Flüssigkeit an irgend einer Stelle gestört und dort eine Bewegung eingeleitet, so pflanzt sich die Gleichgewichtsstörung nach und nach auf andere Stellen der Flüssigkeit fort.

Wirft man einen Stein in eine ruhende Wassermasse, oder läfst man einen Tropfen auf die Oberfläche einer in einem weiten Gefäfse befindlichen Flüssigkeit fallen, so sieht man bald die Flüssigkeit in einem Kreise rings

---

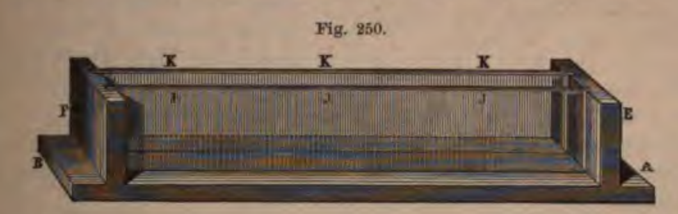
1) *Kundt*, Poggend. Ann. Bd. CL.

m die getroffene Stelle wallförmig sich emporheben. Dieser Flüssigkeits-
all breitet sich ringsum aus, an der Stelle aber, wo zuerst die Flüssig-
eit über das Niveau sich erhob, zeigt sich dann eine Vertiefung der
lüssigkeit. Sowie nun die wallförmige Erhöhung sich rings durch die
lüssigkeit ausbreitet, so auch diese Vertiefung. Meist zeigt sich auf eine
lche Störung des Gleichgewichts nicht nur eine solche Erhöhung und
ertiefung, sondern mehrere, die nach einander, abwechselnd eine Erhöhung
d eine Vertiefung als ebenso viele Wellenberge und Wellenthäler, sich
er der Flüssigkeitsoberfläche verbreiten.

Dafs wir es hier mit einer wirklichen Wellenbewegung, das heifst mit
er hin und her gehenden Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen,
cht mit einer fortschreitenden zu thun haben, ergibt sich aus den Ver-
chen der Gebrüder E. H. und W. Weber auf das entschiedenste[1]).

Um die Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen zu untersuchen,
dienten sich die beiden Weber der Wellenrinne. Dieselbe besteht (Fig. 250)
s einem circa 1,6 Meter langen geraden glatt gehobelten Brette aus
chtenholz AB, auf dem in zwei tiefen Furchen circa 15 Millimeter von
ander zwei dicke Glasscheiben fest eingefugt sind. Diese beiden Glas-
eiben JJJ, KKK werden aufserdem durch die beiden senkrechten
etter E und F, in welche sie auch eingefugt sind, festgehalten.

Fig. 250.



Die Befestigungen der Scheiben in den Fugen sind vollständig wasser-
cht. Der schmale zwischen den beiden Glasscheiben und den Brettern
geschlossene Raum von circa 1,5 Meter Länge, 15 Millimeter Breite im
chten und 16 Centimeter Tiefe wird mit Wasser, Quecksilber, Milch etc.,
nach Bedürfnis zu irgend einer Höhe angefüllt. Dabei werden dann die
asscheiben, um ein Biegen oder Brechen derselben zu verhindern, durch
hrere feste hölzerne Gabeln oder Klammern zusammen geklammert[2]).

Hat man die Wellenrinne bis zu irgend einer Höhe mit Wasser ge-
llt, so hebt man an einem Ende derselben durch Aufsaugen in einer
asröhre etwas Flüssigkeit in die Höhe und erzeugt dann, indem man die
üssigkeit wieder niederfallen läfst, eine Welle, welche durch die Rinne
rtschreitet.

Man sieht dann zunächst einen senkrechten Durchschnitt der erregten
elle durch die Glaswände und kann so die Gestalt der Wellen aufs ge-
ueste bestimmen. Man sieht aber auch zugleich, wenn man in die Rinne
eine Bernsteinstückchen, von gleichem specifischen Gewicht als das Wasser

[1]) Wellenlehre, auf Experimente gegründet von den Brüdern *E. H. Weber*
d *W. Weber*. Leipzig 1825.
[2]) Ebendaselbst. p. 105.

bringt, und dann durch die Glaswände hindurch gegen das Licht blickt, die Bewegung dieser festen Teilchen und kann ihre Bahnen bestimmen. Da nun diese Teilchen genau dieselbe Bewegung haben als die Wasserteilchen, deren Stelle sie vertreten, so kann man dadurch die Bewegung der Flüssigkeit genau bestimmen.

Aus ihren mannigfachen Versuchen ersahen die Gebrüder Weber, daſs die Flüssigkeitsteilchen wirklich keine fortschreitende, sondern nur eine hin und her gehende Bewegung bei Erregung einer Welle annehmen, und zwar, wenn die auf einander folgenden Wellen eine gleiche oder fast gleiche Gestalt haben, daſs dann die Teilchen in oder nahe der Oberfläche sich in geschlossenen, nahezu elliptischen Bahnen (Fig. 251 a) bewegen. Bewegt sich durch die Rinne eine Welle von B nach A fort und zwar ein Wellenberg voraus, so bewegen sich die Wasserteilchen, wenn der Berg vorüber zieht, in dem Bogen $\alpha\beta\gamma$ aufwärts, vorwärts, abwärts in derselben Richtung, in welcher der Berg vorübergeht. Folgt dann das Wellenthal, das ebenso tief ist, als der Wellenberg hoch war, so bewegt sich das Teilchen weiter durch den Bogen $\gamma\delta\alpha$ nach α zurück. Der senkrechte Abstand des höchsten Punktes β dieser Bahn von dem Niveau $\alpha\gamma$ ist gleich der Höhe des Wellenberges und der des tiefsten Punktes δ von $\alpha\gamma$ gleich der Tiefe des Wellenthales.

Fig. 251.

Geht das Wellenthal dem Wellenberge voran, so bewegt sich das Teilchen zunächst durch $\gamma\delta$ nach α und dann durch den Bogen $\alpha\beta\gamma$ in seine frühere Lage γ zurück. Die fortschreitende Bewegung ist unter dem Wellenberge stets der Richtung gleich, in welcher die Welle fortschreitet, im Wellenthal dieser Richtung entgegengesetzt.

Die Schwingungsbahnen der Flüssigkeiten laufen aber nicht in sich selbst zurück, wenn die den Wellenbergen folgenden Thäler mit den ersten nicht von gleicher Gröſse sind.

Ist das dem vorhergehenden Wellenberg folgende Wellenthal merklich kleiner, so wird die Bahn der Flüssigkeitsteilchen Fig. 251 b, und geht das Thal, aber in der Richtung von A nach B, voraus und folgt ihm ein kleiner Wellenberg, so wird die Bahn Fig. 251 c, in beiden Fällen gelangt das Flüssigkeitsteilchen nicht zu seiner ursprünglichen Ruhelage α zurück.

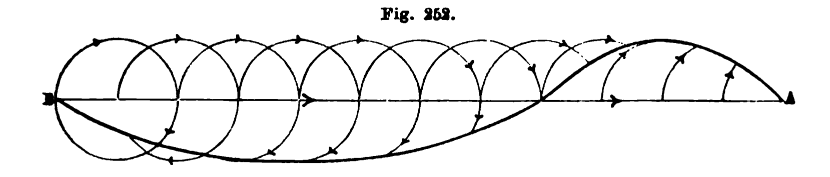
Die schwingende Bewegung der Flüssigkeitsteilchen beschränkt sich jedoch nicht auf die Teilchen in oder nahe der Oberfläche der Flüssigkeiten, sondern in sehr groſsen Tiefen unter der Oberfläche zeigen die Flüssigkeitsteilchen noch eine schwingende Bewegung. Die Versuche der Gebrüder Weber ergaben, daſs in einer Tiefe, welche 350mal die Höhe der Wellen, das heiſst den Abstand des höchsten Punktes des Wellenberges von dem tiefsten des Wellenthales betrug, noch eine deutliche schwingende Bewegung stattfand. Indes zeigte sich ein merklicher Unterschied in den Bahnen der Teilchen. Während nämlich die Teilchen ganz nahe unter der Oberfläche fast kreisförmige Bahnen besaſsen, wurde die vertikale Höhe der Ellipsen immer kleiner, je tiefer die Flüssigkeitsteilchen sich unter der Oberfläche befanden. In einer Tiefe, welche ungefähr das Hundertundzwanzigfache von der Höhe der Welle betrug, war die vertikale Bewegung der Teilchen fast unmerklich

d in noch gröfsern Tiefen bestand die Bewegung der Teilchen nur in nem Hin- und Hergehen in horizontaler Richtung.

So fanden die beiden Weber z. B. bei einer Welle, die eine Höhe von ca 2^{mm} hatte, nahe unter der Oberfläche die vertikale Höhe der Bahn eich dieser Höhe, den horizontalen Durchmesser gleich 2,5 Millimeter, einer Tiefe von 230 Millimeter betrug die vertikale Höhe der Bahn nur 5 Millimeter, der horizontale Durchmesser 1 Millimeter und in gröfsern iefen war der vertikale Durchmesser nicht mehr messbar, während der rizontale sich nur mehr unbedeutend verkleinerte und in der Nähe des odens sogar wieder etwas gröfser wurde.

Aus dieser Art der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen ersehen wir, ıfs dieselben sich zugleich nach zwei verschiedenen Richtungen bewegen, ıf und nieder und vor- und rückwärts. Daraus folgt dann, dafs die Gealt der Flüssigkeitswellen, die bereits § 130, Fig. 212 betrachtete sein ufs, oder dafs, wenn das dem Wellenberg folgende Wellenthal eine Tiefe sitzt, welche der Höhe des Berges gleich ist, es stets etwas länger sein ıfs. Die Welle mufs, wie man unmittelbar sieht, die Gestalt Fig. 252 ben. Die Welle schreitet in der Richtung der Pfeilstriche von B nach A

Fig. 252.



t, und die einzelnen Flüssigkeitsteilchen durchlaufen hier die als kreismig vorausgesetzten Bahnen in dem von den Pfeilen angedeuteten Sinne, Wellenberge in horizontaler Richtung vorwärts und im Wellenthale der zu ihrer Gleichgewichtslage zurück.

Dafs die Wasserwellen wirklich diese Gestalt haben, sahen die Geder Weber; sie sahen stets, dafs bei gleicher Tiefe die Länge oder ite des Wellenthales etwas gröfser war als diejenige des Wellenberges.

§ 149.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen. Die an der erfläche einer Flüssigkeit erregte, mit Gestaltsänderung verbundene wingende Bewegung der Flüssigkeitsteilchen pflanzt sich nach dem rigen nach zwei Richtungen fort, einmal an der Oberfläche hin, indem derselben das wellenförmige Ansehen gibt, andererseits nach der Tiefe, em wir sahen, dafs die Teilchen auch in der Tiefe, wenn eine Welle r der Flüssigkeit fortschreitet, eine schwingende Bewegung annehmen. fragt sich nun, mit welcher Geschwindigkeit sich die Bewegung nach den Richtungen fortpflanzt.

Was zunächst die Fortpflanzung der Bewegung in die Tiefe der ssigkeit betrifft, so bemerkt man weder bei der Erregung noch beim izontalen Fortgange der Wellen ein allmähliches Fortschreiten derselben

sondern die schwingende Bewegung scheint, wenigstens so weit es sich beurteilen läfst, gleichzeitig in der Tiefe und an der Oberfläche zu geschehen. Die senkrecht oder fast senkrecht unter einander liegenden Flüssigkeitsteilchen scheinen alle gleichzeitig in der gleichen Oscillationsphase sich zu befinden.

Dieses Resultat ist nach dem ersten Paragraphen dieses Kapitels vorauszusehen; denn die Bewegung der Flüssigkeit in der Tiefe kann nur Folge des fortgepflanzten Stofses, der Dichtigkeitsänderung an der Oberfläche der Flüssigkeit, bei Erregung und Fortdauer der schwingenden Bewegung sein; nach unten hin pflanzt sich daher die Bewegung ebenso rasch fort wie die longitudinalen Wellen, welche wir in den vorigen Paragraphen betrachtet haben.

Anders jedoch mit der Fortpflanzung der Wellenbewegung an der Oberfläche der Flüssigkeit, diese ist viel langsamer, so dafs man die einzelnen Wellen recht gut verfolgen kann.

Zunächst wiesen die Gebrüder Weber nach, dafs auch bei diesen Wellen, gerade wie wir es im ersten Kapitel dieses Abschnittes entwickelten, die Bewegung sich genau um die Länge einer Welle fortpflanzt, während ein Flüssigkeitsteilchen eine Oscillation zurücklegt. Dann aber zeigten sie, dafs bei diesen Flüssigkeitswellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht für alle Wellen die gleiche sei und nicht von der Elasticität und Dichtigkeit der Flüssigkeit abhänge, sondern dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von einer Menge von Umständen abhänge.

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitswellen hängt wesentlich von der Höhe und Länge der Wellen ab; alle Umstände, welche daher Höhe und Länge der Welle ändern, ändern auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Die Höhe und Länge, oder wie die Gebrüder Weber sie nennen, Breite der Wellen hängt nun zunächst ab von der Stärke des Stofses, der die Welle erregt, je stärker der Stofs ist, um so höher ist die Welle; da die höhere Welle sich rascher fortpflanzt, so nimmt die Geschwindigkeit der Welle mit der Stärke des sie erregenden Stofses zu.

Breitet sich eine Welle über einen immer gröfsern Raum aus, so nimmt dadurch die Höhe der Welle ab, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird daher kleiner, je weiter sich in diesem Falle die Welle von dem Punkte ihrer Erregung entfernt. Man kann dieses sehr leicht wahrnehmen, wenn man in einer ruhenden Wasserfläche durch Hineinwerfen eines Steines Wellen erzeugt. Es bilden sich dann eine Reihe von Wellen, die sich in immer gröfsern Kreisen ausbreiten. Erregt man dann durch Hineinwerfen eines Steines von gleicher Gröfse wie vorhin zwischen den ausgedehnten Wellen ein neues Wellensystem, so sieht man, wie sich dort die Wellen sehr viel rascher ausbreiten.

Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung hängt ferner ab von der Tiefe der Flüssigkeit; je tiefer die Flüssigkeit ist, um so rascher pflanzt sich die Welle fort. Der Grund dafür ist einmal in der Reibung und Adhäsion der Flüssigkeit am Boden zu suchen; dann aber auch darin, dafs in der Nähe des Bodens, wie wir vorhin sahen, die Höhe der Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen und somit die Höhe der Welle abnimmt.

Die Geschwindigkeit der Wellen nimmt übrigens nicht in demselben Verhältnisse ab wie die Tiefe der Flüssigkeiten, sondern langsamer.

Die Versuche, mittels deren die beiden Weber diese Sätze ableiteten, rurden so angestellt, dafs eine Glasröhre an dem einen Ende der Rinne o befestigt war, dafs ihre Mündung konstant nahe 2^{mm} unter dem Niveau er Flüssigkeit war. Durch Aufsaugen und nachheriges Fallenlassen der lüssigkeit wurde die Welle erregt. Mittels einer Uhr, welche $\frac{1}{60}$ Sekunde ngab, und die durch einen Druck mit dem Finger angehalten und losgelöst rerden konnte, wurde dann die Zeit beobachtet, in welcher der Gipfel ler Welle an dem andern Ende der Wellenrinne ankam. Die Uhr wurde n dem Momente losgelassen, in welchem man die gehobene Flüssigkeits-äule fallen liefs, und festgehalten, wenn der Gipfel der erregten Welle as andere Ende erreichte; die Quotienten aus der Länge der Rinne und en beobachteten Zeiten ergaben dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

Wir teilen hier die Resultate einiger Versuche mit, um zugleich eine orstellung von der Geschwindigkeit zu geben, mit welcher sich derartige ellen fortpflanzen.

Die Wellen wurden bei gleicher Tiefe in verschiedenen Flüssigkeiten rch gleich hohe Flüssigkeitssäulen erregt. Es zeigte sich folgendes:

Tiefe der Flüssigkeit	Höhe der wellenerregenden Säule	Geschwindigkeit der Wellen auf Wasser	auf Quecksilber
2,7 Cent.	5,4 Cent.	53,3 Cent.	51,3 Cent.
	8,1 „	54,4 „	54,0 „
	10,8 „	55,5 „	55,76 „
	16,2 „	56,9 „	60,3 „
	21,6 „	56,9 „	62,1 „
5,4 Cent.	5,4 „	75,3 „	60,9 „
	8,1 „	75,9 „	64,3 „
	10,8 „	77,4 „	66,3 „
	16,2 „	77,0 „	65,5 „
	21,6 „	75,9 „	69,2 „
10,8 Cent.			Branntwein
	8,1 „	79,2 „	—
	16,2 „	100,1 „	—
	32,4 „	100,1 „	81,8 Cent.
	48,6 „	—	86,8 „
21,6 Cent.	32,4 „	135 „	135 „

Aus einer Betrachtung dieser Zahlen scheint ferner hervorzugehen, fs die Wellen in Flüssigkeiten von verschiedenem specifischen Gewichte h mit merklich gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, wenn sie durch eich hohe Säulen der Flüssigkeiten erregt sind. Strenge genommen ist s jedoch nur der Fall, wenn die Flüssigkeiten eine bedeutende Tiefe ben, bei geringerer Tiefe bewirkt der Einflufs des Bodens, die verschiedene häsion der Flüssigkeiten an demselben und an den Wänden des Gefäfses, fs die Geschwindigkeiten verschieden sind.

E. H. und W. Weber, Wellenlehre etc. p. 166 ff.

§ 150.

Die Ursachen der Flüssigkeitswellen. Vergleichen wir dies
über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der sichtbaren Flüssigkeits
mit den früheren Sätzen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der
die Elasticität bedingten Wellen in festen, flüssigen und gasförmigen K
so ergibt sich unmittelbar, daſs wir die hier in Rede stehenden
nicht als eine Äuſserung der Elasticität der Flüssigkeiten ansehen
Denn für die durch die elastische Kraft der Körper fortgepflanzten
erhielten wir als Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = C\sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit war proportional der Quadrat
aus der elastischen Kraft und umgekehrt proportional der Quadrat
aus der Dichtigkeit der betreffenden Substanz; sie war unabhängig
Länge der Welle und unabhängig von ihrer Höhe, das heiſst, der
der Amplituden. Bei den Flüssigkeitswellen aber, die wir hier betr
findet gerade das Umgekehrte statt; ihre Fortpflanzungsgeschwindig
nahezu unabhängig von der Natur der Flüssigkeit, ändert sich aber
lich mit der Länge der Wellen und ihrer Höhe. Vergleichen wir fer
Werte, welche die beiden Weber für die Fortpflanzungsgeschwin
der Wellen in verschiedenen Fällen erhalten haben, mit der Fortpfla
geschwindigkeit der durch Elasticität bestehenden Wellen, so weis
dieses uns darauf hin, die Ursache dieser Wellen nicht in der Ela
der Flüssigkeit zu suchen; denn für die Fortpflanzungsgeschwindigk
durch Elasticität erregten Wellen hatten wir für Wasser z. B. m
1400 Meter, hier jedoch nur wenige Decimeter.

Noch ein anderer Umstand läſst es klar hervortreten, daſs di
der Wellenbewegung nicht eine Folge der elastischen Kraft der F
keiten ist, nämlich die Höhe der Wellen. Wir sehen auf der Ob
einer Flüssigkeit bereits eine deutliche Erhebung eintreten, wenn
einen Tropfen der Flüssigkeit auf die Oberfläche fallen lassen. I
äuſserst geringen Kompressibilität der Flüssigkeiten kann aber d
sammendrückung derselben infolge einer so kleinen Kraft nur un
klein sein und deshalb die auf die Zusammendrückung folgende Ausd
der Flüssigkeit und somit die Erhebung derselben über das Nivea
nur unmeſsbar klein und nicht mit der beobachteten Höhe der Wel
gleichbar sein.

Wenn man sich nun daran erinnert, daſs unter Einwirkung der S
die Flüssigkeit eine horizontale ebene Oberfläche haben muſs, so
leicht ersichtlich, daſs die Schwere es ist, welche die Wellenbewegu
anlaſst und fortpflanzt. Haben wir durch Aufsaugen an irgend eine
eine Flüssigkeitssäule über das Niveau der umgebenden Flüssigk
hoben und lassen dann die gehobene Säule los, so muſs nach den G
der Hydrostatik diese Flüssigkeit niedersinken; rings um diese Stell
aber, um das hydrostatische Gleichgewicht herzustellen, die Flüs
steigen; und da sich die Ausgleichung nicht momentan durch die

Flüssigkeit ausbreitet, wird sich die Flüssigkeit um jene Stelle in Form ines Walles über das Niveau der Flüssigkeit erheben. An der Stelle, wo lie Flüssigkeit zuerst erhoben war und dann fallen gelassen wurde, hat lieselbe eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit, sie wird daher nicht m Niveau der Flüssigkeit zur Ruhe kommen, sondern da die Flüssigkeit, uf welche sie fällt, ringsum ausweichen kann, tiefer sinken.

Nach kurzer Zeit mufs daher an der Stelle, wo die Flüssigkeit zuerst ufgesaugt war, ein Wellenthal entstehen, rings umher ein Wellenberg. Dieser Wellenberg wird dann aber ebenso durch die Schwere niedergezogen, r bewirkt, dafs rings um ihn nach aufsen hin die Flüssigkeit steigt, dafs weiter ein Wellenberg entsteht, während an der Stelle, wo er sich befand, in Wellenthal sich bilden mufs. Man sieht, wie infolge einer solchen Gleichgewichtsstörung durch Wirkung der Schwere sich Wellenberg und Wellenthal durch die Flüssigkeit fortpflanzen mufs.

Dafs eben dasselbe der Fall sein mufs, wenn der ursprüngliche Stofs n der Erregungsstelle der Wellen nicht durch eine gehobene Flüssigkeits-äule, sondern auf irgend eine andere Weise, etwa durch einen auf die Flüssigkeit geworfenen Stein bewirkt wird, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Nach dem Gesagten ist es also der hydrostatische Druck der im Wellenberge gehobenen und durch die Schwere niedersinkenden Flüssigkeitssäule, welche die Wellenbewegung veranlafst; wird also der hydrostatische Druck an der Stelle der gehobenen Flüssigkeit auf andere Weise fortgenommen, so darf sich die Wellenbewegung nicht weiter fortpflanzen.

Die Gebrüder Weber haben durch einen sehr einfachen Versuch dieses nachgewiesen und somit die Richtigkeit der angegebenen Erklärung gezeigt. Bei einer regelmäfsig viereckigen, an beiden Enden geschlossenen Röhre von Holz wurde die eine Seitenwand mehrfach durchbohrt, so dafs auf der ganzen Länge der Röhre eine Anzahl Löcher in gerader Linie neben einander lagen. In ein, dem einen Ende der Röhre zunächst liegendes Loch wurde eine Glasröhre eingekittet und darauf die ganze Röhre vollständig mit Quecksilber gefüllt. Dann wurde in der Glasröhre eine Quecksilbersäule von circa 2,5 Centim. aufgesaugt und wieder soviel Quecksilber nachgefüllt, afs es aus allen Öffnungen halbkugelförmig hervorsah. Nachdem das geschehen war, wurde die gehobene Quecksilbersäule fallen gelassen, und es eigte sich dann, dafs nur aus den der Röhre zunächst liegenden Öffnungen Quecksilber ausflofs, in den entferntern Öffnungen trat keine Bewegung des Quecksilbers ein. Da aus den der Röhre zunächst liegenden Öffnungen, als ort der Wellenberg sich bildete, das Quecksilber ausflofs und der vergröfserte hydrostatische Druck durch das Abfliefsen aufgehoben wurde, örte die Ursache des Steigens für die entferntern auf, dort entstand kein Wellenberg mehr, es flofs kein Quecksilber mehr aus.

Als nun aber in alle Löcher Röhren gekittet wurden, das Abfliefsen lso gehindert wurde, da sah man das successive Steigen des Quecksilbers n allen Röhren, der Wellenberg pflanzte sich fort und das auf das Steigen es Quecksilbers in jeder Röhre folgende Sinken zeigte das dem Wellenberge olgende Wellenthal.

Dieser Versuch beweist aber auch zugleich die Richtigkeit unserer Annahme, dafs die Ausgleichung des gestörten hydrostatischen Druckes

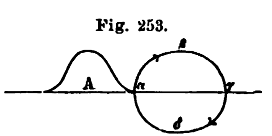
sich nicht momentan durch die ganze Flüssigkeit erstreckt, denn wäre das der Fall gewesen, so hätte zugleich aus allen Öffnungen die gleiche Menge Quecksilber ausfliefsen müssen. Wägungen des ausgeflossenen Quecksilbers zeigten aber, dafs aus der der Glasröhre am nächsten liegenden Öffnung am meisten Quecksilber ausflofs, aus den weitern um so weniger, je weiter sie von der Röhre entfernt waren. Die Röhre hatte neun Öffnungen; als nun in der Glasröhre das Quecksilber nahezu 10 Centimeter gehoben war, flofs Quecksilber aus den fünf ersten Öffnungen; aus der ersten traten 72 Gramm, aus der zweiten 52, aus der dritten 26, aus der vierten 12 und aus der fünften Öffnung circa 0,5 Gramm Quecksilber[1].

Dieser Versuch bestätigt also die Voraussetzungen der mitgeteilten Erklärung der Wasserwellen vollständig.

Zugleich aber stehen mit ihr alle vorhin beschriebenen Erscheinungen der Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen in den Wellen, wie auch die Bewegung der Wellen als solcher im Einklang.

Was zunächst die krummen Bahnen der Flüssigkeitsteilchen betrifft, so mufs anfangs, wenn in A (Fig. 253) die primär gehobene Flüssigkeitssäule niedersinkt, das Teilchen α nach rechts hin geschoben und gehoben werden, es bewegt sich nach β hin. Von der Spitze des Wellenberges sinkt es dann nach unten, behält aber seine fortschreitende Bewegung noch bei und bewegt sich nach γ hin. Dort angekommen sinkt es wegen der in dem Fallen erhaltenen Geschwindigkeit weiter nach unten und bewegt sich dabei, da links von γ jetzt das Wellenthal ist, also der Druck von rechts nach links hin gröfser ist, nach links hin, um so, wenn das Thal ganz vorüberzieht, über δ nach α, oder wie in andern Fällen nicht ganz nach α sich zurückzubewegen.

Fig. 253.



Nach dieser Erklärungsweise mufs auch die Geschwindigkeit der Fortpflanzung mit der Höhe der Wellen zunehmen, denn da sich die Bewegung während einer Oscillation der Teilchen um eine Wellenlänge fortpflanzt, mufs bei gleicher Wellenlänge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so gröfser sein, je rascher das Teilchen oscilliert. Je gröfser nun die bewegende Kraft, der primäre Stofs ist, um so höher hebt sich das Teilchen, und je höher es gehoben ist, um so mehr wird seine Bewegung durch die Schwere beschleunigt, die Oscillation und somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird daher rascher. Bei den durch Elasticität erregten Wellen war das anders, da war die beschleunigende Kraft dem Abstande der bewegten Punkte von der Gleichgewichtslage proportional, bei gröfserm Abstande wurde daher die Geschwindigkeit der Teilchen in demselben Verhältnisse mit dem Abstande gröfser, die Oscillationsdauer war konstant.

Wurde aber in ein und derselben Punktreihe die Oscillationsdauer geändert, so änderte sich ebenso auch die Wellenlänge, indem die beschleunigende Kraft zugleich dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional war und somit Wellenlänge und Oscillationsdauer in gleichem Verhältnisse wachsen und abnehmen.

---

[1]) *E. H. Weber* und *W. Weber*, Wellenlehre etc. p. 280 ff.

Hier, wo die bewegende Kraft nicht von der gegenseitigen Einwirkung er Teilchen herrührt, besteht diese Beziehung nicht, deshalb hängt die ortpflanzungsgeschwindigkeit sowohl von der Oscillationsdauer als auch er Wellenlänge ab.

Dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht von der Dichtigkeit der lüssigkeit abhängt, folgt ebenso unmittelbar. Denn wenn wegen des röfsern Gewichtes der gehobenen Teilchen in schwereren Flüssigkeiten die ewegende Kraft zunimmt, so nimmt in eben demselben Verhältnis bei leicher Wellenhöhe die zu bewegende Masse zu, die Beschleunigung und amit die Geschwindigkeit der bewegten Teilchen bleibt daher ungeändert.

§ 151.

Durchkreuzung und Reflexion der Wellen[1]). Die Erscheinungen er Interferenz, der Reflexion der Wellenbewegung und die Bildung stehender Vellen infolge der fortgepflanzten und reflektierten Wellen lassen sich nach n Versuchen der beiden Weber mit den Flüssigkeitswellen sehr schön rstellen.

Die Erscheinungen der Interferenz zeigen sich, wenn man an beiden den der Wellenrinne eine Welle gleichzeitig erregt.

In der Mitte der Wellenrinne vereinigen sich beide vorausgehenden ellenberge zu einem neuen, der nahezu die Summe der Höhen der einnen Wellenberge hat, wie es die Interferenztheorie verlangt, nach welcher Bewegung infolge des Zusammenwirkens mehrerer Teilbewegungen die mme letzterer sein mufs. Treffen demnach die Wellen ohne Phasenferenz zusammen, so mufs ein Berg von doppelter Höhe und ein Thal n doppelter Tiefe entstehen. Als Mittel von zwölf Messungen fanden beiden Weber die Höhe des resultierenden Wellenberges gleich 1,8, nn die Höhe der beiden komponierenden Wellenberge gleich 1 war; der terschied der beobachteten Höhe von der theoretischen ist so klein, dafs ser Versuch als eine Bestätigung des Interferenzgesetzes, wenn es dessen ch bedürfte, angesehen werden könnte.

Gehen ein Wellenberg und ein Wellenthal durch einander hindurch, ist die Höhe des Berges oder die Tiefe des Thales gleich der Differenz der, ist der Berg ebenso hoch als das Thal tief ist, so wird die Oberche der Flüssigkeit eben. Dies zeigt sich jedesmal, wie wir sofort sehen rden, bei der Reflexion der Wellen.

Nach der Durchkreuzung bewegt sich jede Welle ganz ungestört weiter, ellenberge und Wellenthäler sind in der Lage zu einander, als hätte in em Wellenzuge gar keine Störung stattgefunden. Es ist diese Beobachng ein Beweis für die Richtigkeit des zweiten Teiles des Princips, das r der Lehre von den Interferenzen zum Grunde legten, des Satzes, dafs, nn von der Interferenzstelle aus sich die Bewegung Punkten mitteilt, welche r durch einen der Wellenzüge eine Bewegung annehmen, die Bewegung ser Punkte gerade so geschieht, als hätte keine Interferenz stattgefunden.

Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen an der Interferenzstelle ist jenige, welche das Interferenzgesetz verlangt. Schreiten die beiden

[1]) *E. H.* und *W. Weber*, Wellenlehre etc. p. 212 ff.

Wellen nach entgegengesetzten Richtungen fort, so ist die horizontale Bewegung der Flüssigkeitsteilchen, wenn die Wellen ohne Phasendifferenz zusammentreffen, der Richtung nach gerade entgegengesetzt, die vertikale jedoch gleich gerichtet. Die horizontale Bewegung mufs sich somit aufheben, die vertikale summieren.

Das wurde von den beiden Weber durch die Beobachtung bestätigt. Es ergab sich, wenn man senkrecht unter der Stelle beobachtete, wo der Gipfel des resultierenden Berges lag, wo also die Bewegungen genau ohne Phasendifferenz zusammentrafen, dafs dort die Teilchen in genau senkrechter Richtung sich auf und ab bewegten.

Wenn die Wellen nicht genau ohne Phasendifferenz zusammentreffen, so hebt sich die horizontale Bewegung nicht ganz auf; Webers sahen auch, wie seitwärts von den eben erwähnten Stellen die Bahnen der Teilchen nicht senkrecht waren, sondern gegen die Vertikale geneigt und zwar um so mehr, je weiter man sich von der Stelle der vollkommenen Durchkreuzung entfernte.

Wenn auch die Wellen insofern sich ungehindert durchkreuzen, dafs die Bewegung der Flüssigkeit in jedem Wellenzuge dieselbe bleibt, als habe keine Durchkreuzung stattgefunden, so findet doch bei der Durchkreuzung der Wellen ein kleiner Zeitverlust statt. Die Versuche der beiden Weber ergaben, dafs, während eine Welle ihre Wellenrinne in 2,283 Sekunden durchlief, wenn sie sich nicht mit einer andern kreuzte, bei der Kreuzung zweier Wellen eine Welle von genau gleicher Gröfse als die vorige zum Durchlaufen derselben Strecke die Zeit von 2,4 Sekunden brauchte.

Diese Verzögerung denken sich die beiden Physiker folgendermafsen. Bei dem ungehinderten Fortschreiten der Wellen, wo sich die Teilchen in ihren kreisförmigen oder elliptischen Bahnen bewegen, bleiben die Teilchen immer in ihrer beschleunigten Bewegung, bei der Durchkreuzung der Wellen dagegen, wo sich einmal die horizontalen Geschwindigkeiten ganz aufheben und die Teilchen sich nur vertikal auf und ab bewegen, tritt ein Zeitpunkt ein, wo die Bewegung des Teilchens sich umkehrt, wo also seine Geschwindigkeit ganz und gar gleich Null ist. Von da ab erhält erst das Teilchen durch Untersinken wieder eine beschleunigte Bewegung. Daraus scheint nun zu folgen, dafs bei einer Durchkreuzung zweier gleich grofsen Wellen so viel Zeit verloren gehe, als der Verlust der beschleunigten Bewegung während der Vereinigung der Wellen herbeiführt. Nach der Durchkreuzung erhalten dann die Teilchen der Welle ihre vorige Beschleunigung und dadurch ihre vorige Bewegung.

Die Erscheinungen der Reflexion der Wellen treten am einfachsten auf, wenn eine Welle senkrecht gegen eine feste Wand anprallt. Da die Flüssigkeit an der Wand vollkommen frei beweglich ist, so mufs die Reflexion der Wellen an der Wand so erfolgen, wie die Reflexion der Wellen an der Grenze zweier Punktsysteme, von denen das zweite weniger dicht ist als das erste, das heifst ein ankommender Wellenberg mufs als Wellenberg und ein ankommendes Wellenthal mufs als Wellenthal reflektiert werden. Die Erscheinungen an der Wand müssen daher sich folgendermafsen darstellen.

Nach Verlauf von $\frac{1}{4}$ Oscillationsdauer mufs unmittelbar an der Wand ein halber Wellenberg sein, dessen Mitte an der Wand liegt, dessen Höhe

ezu die doppelte des einfachen ankommenden Berges ist, da er aus der
ten Hälfte des reflektierten und der zweiten Hälfte des ankommenden
llenberges besteht. Nach Verlauf eines weitern Viertels der Oscillations-
ier ist das auf den Wellenberg folgende Wellenthal bis zur Wand fort-
chritten; zugleich aber ist der erste Wellenberg ganz reflektiert, und der
ektierte Wellenberg erstreckt sich bis eine halbe Wellenlänge von der
nd, gerade so weit, als sich das dem Berge folgende Thal erstreckt. Die
wegung an der Wand mufs daher aufgehoben werden und die Wasser-
he an der Wand bis zur Länge einer halben Welle eben sein.

In dem folgenden Viertel der Oscillationsdauer pflanzt sich der re-
tierte Wellenberg um eine viertel Wellenlänge nach rückwärts fort, das
ekommene Wellenthal ebenso viel vorwärts, so dafs also die tiefste Stelle
Wellenthales sich gerade an der Wand befindet. In dem Augenblicke
r, wo das ankommende Wellenthal die Wand traf, pflanzte sich auch
reflektiertes Wellenthal fort, in dem betrachteten Augenblicke befindet
also an der Wand die zweite Hälfte des ankommenden und die erste
fte des reflektierten Wellenthales, es mufs dort ein halbes Wellenthal
nahezu doppelter Tiefe des ankommenden Wellenthales sein, dessen
ste Stelle sich gerade an der Wand befindet.

Endlich nach Verlauf des letzten Viertels der Oscillationsdauer ist
h das Wellenthal ganz reflektiert, der Wellenberg hat sich um eine halbe
llenlänge von der Wand entfernt; die ganze Welle ist reflektiert und be-
gt sich von da an, der Wellenberg voraus, das Wellenthal folgend, in
Flüssigkeit zurück.

Wellenberg und Wellenthal haben also ihre Lage gegen die feste
nd vertauscht, vorher war der Berg, jetzt ist das Thal der Wand am
hsten; Wellenberg und Wellenthal gehen durch einander hindurch.

Diese aus dem Frühern abgeleitete Darstellung des Reflexionsvorganges
tätigt sich auf das vollständigste durch die Anschauung bei den Ver-
hen in der Wellenrinne, und die Messungen über die Höhe des Berges
die Tiefe des Thales an der Wand in dem ersten und dritten der von
betrachteten Zeitteile ergaben die Höhe, wie sie die Theorie verlangt.
einer Höhe der ankommenden Welle von 6,2 Millimeter war die Höhe
Berges in dem ersten der betrachteten Zeitteile gleich 10,35 Millimeter,
mehr wie $\frac{5}{3}$ der ankommenden Welle.

Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen an der festen Wand mufs mit
jenigen übereinstimmen, welche die Flüssigkeitsteilchen haben, wenn
Wellen sich durchkreuzen; auch dieses haben die Versuche der Gebrüder
ber gezeigt.

Wenn eine Welle nicht senkrecht gegen eine feste Wand ankommt, so
fs sie nach § 134 so zurückgeworfen werden, dafs der Wellenstrahl der
ückgeworfenen Welle mit dem Einfallslote denselben Winkel bildet wie
Strahl der einfallenden Welle. Auch dieses haben die Versuche be-
tigt. Es folgt nämlich aus dem Satze, wie wir bereits § 134 erwähnten,
s eine zirkelförmige Welle, welche im Mittelpunkte eines kreisförmigen
fäfses erregt ist, wenn sie an der kreisförmigen Wand anprallt, sich nach
Reflexion als kreisförmige Welle mit immer kleinerem Radius wieder
Mitte des Gefäfses fortpflanzen mufs. Der Versuch zeigt dieses deut-
, wenn man z. B. einen Teller mit Quecksilber füllt und nun aus einem

mit einem kleinen Loche versehenen Papiertrichter auf die Mitte des Tellers Quecksilber tropfen läfst.

Läfst man auf diese Weise in den einen Brennpunkt eines mit Quecksilber gefüllten elliptischen Gefäfses Quecksilber tropfen, so müssen die sich von diesem Brennpunkte aus kreisförmig fortpflanzenden Wellen von der Wand so reflektiert werden, dafs sie als kreisförmige Wellen in dem andern Brennpunkte der Ellipse wieder zusammenlaufen, da die Radien Vektoren mit dem Einfallslote, der Normale an den verschiedenen Stellen, gleiche Winkel bilden. In dem zweiten Brennpunkte geben dann die vereinigten Wellen zu einer kegelförmigen Erhöhung Veranlassung, die durch ihr Niedersinken ein neues zurückkehrendes Wellensystem gibt, welches sich ebenso in dem ersten Brennpunkte wieder vereinigt, dort wiederum zu einem Wellensysteme Veranlassung wird u. s. f. Man sieht dieses vielfache Hin- und Herlaufen sehr leicht in der schönen gekräuselten Oberfläche, welche die Flüssigkeit bei einem solchen Versuche zeigt.

Wenn man in der Wellenrinne nach und nach mehrere Wellen erzeugt, deren Länge gleich ist der Länge der Rinne oder einem aliquoten Teile derselben, so müssen durch die Interferenz der von der Erregungsstelle fortschreitenden und der von der festen Wand reflektierten Wellen sich stehende Wellen bilden, deren Schwingungsknoten gerade so liegen müssen, wie die Schwingungsknoten in einem an beiden Enden freien longitudinal schwingenden Stabe. Wenn man demnach Wellen erregt, welche gerade die doppelte Länge der Wellenrinne besitzen, so geht durch die Mitte derselben immer nach der einen Seite ein Wellenberg, nach der andern ein Wellenthal, in der Mitte mufs sich daher ein Schwingungsknoten bilden, und jede Hälfte der Rinne schwingt als eine halbe stehende Welle hin und her.

Ist die Länge der erregten Wellen gleich der Länge der Wellenrinne, so sieht man zwei Schwingungsknoten entstehen, beide im Abstande von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge von den Wänden der Rinne und im Abstand einer halben Wellenlänge von einander. Jeder der drei Teile, in welche dadurch die Flüssigkeit der Länge nach zerfällt, schwingt für sich als stehende Welle von der Länge der halben Wellenrinne. An den Wänden befinden sich die Mitten der beiden äufsersten Wellen, die Schwingungsmaxima.

Auf diese Weise kann man leicht, wie die Gebrüder Weber zeigten, 3, 4 und mehr Schwingungsknoten und somit eine leicht sichtbare experimentelle Bestätigung der früher vorgetragenen Sätze über die Bildung der stehenden Wellen durch Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung fortgepflanzter Wellensysteme erhalten.

Vierter Abschnitt.

Vom Schalle.

Erstes Kapitel.

Über die Erregung des Schalles.

§ 152.

Von der Ursache des Schalles. Wenn man eine schwachgespannte Saite in Schwingungen versetzt, so lassen sich die Schwingungen derselben mit den Augen wahrnehmen, man sieht die Saite in ihren verschiedenen Lagen nach einander. Wird die Spannung jedoch mehr und mehr verstärkt, so werden die Schwingungen bald so rasch, dafs man die Saite in den verschiedenen Lagen nicht mehr unterscheiden kann, man sieht an der Stelle, wo sie schwingt, nur mehr eine halbdurchsichtige Fläche. Verstärkt man die Spannung der Saite noch mehr, so ist die Bewegung derselben kaum mehr sichtbar, statt dessen wird sie uns aber in einer andern Weise wahrnehmbar, wir hören sie, wir erhalten einen von der schwingenden Saite ausgehenden Eindruck auf unser Ohr. Den Eindruck, welchen unser Ohr erhält, nennen wir Schall; es ist im Folgenden unsere Aufgabe, diese, die schwingende Bewegung begleitende Erscheinung zu untersuchen.

Der Schall entsteht nur durch eine schwingende Bewegung, und jede schwingende Bewegung von hinreichender Schnelligkeit erzeugt einen Schall.

Wir sahen in dem vorigen Abschnitt, dafs wir auf sehr viele Weisen schwingende Bewegungen erzeugen können, alle diese können auch die Ursache eines Schalles werden.

Reiben wir einen Stab seiner Länge nach, so erzeugt die Elasticität des Stabes stehende Schwingungen, die Savart durch die Stöfse des Stabendes gegen eine Spitze dem Auge sichtbar gemacht hat; wir vernehmen nun auch stets einen Schall, wenn wir einen Stab in longitudinale Schwingungen versetzen. Ebenso erzeugen die transversalen Schwingungen von Stäben und Saiten, sobald sie hinreichend rasch sind, die Schwingungen von Platten und Glocken sowie die drehenden Schwingungen der Stäbe einen Ton.

In allen diesen Fällen sind es die regelmäfsigen Schwingungen der Körper infolge ihrer Elasticität, welche einen Ton erzeugen; man kann jedoch auch auf andere Art, durch in kurzer Zeit wiederholte Stöfse, einen Schall hervorbringen. So erhält man einen Schall, wenn man eine Karte oder eine biegsame Feder dem Umfange eines in rasche Rotation versetzten

gezähnten Rades so weit nähert, dafs jeder Zahn der Karte oder Feder einen Schlag erteilt; so auch, wenn man einen Strom eines Gases oder einer Flüssigkeit gegen eine rotierende Scheibe führt, welche in regelmäfsigen Zwischenräumen durchbohrt ist; die Flüssigkeit dringt abwechselnd durch eine Öffnung der Scheibe, abwechselnd wird sie durch eine geschlossene Stelle derselben zurückgehalten; es entsteht so eine regelmäfsige Folge von Stöfsen, die wir als Ton wahrnehmen. Läfst man einen Körper um eine Axe rotieren, welche nicht durch dessen Mittelpunkt geht, so erteilt dieser der umgebenden Luft eine Reihe von Stöfsen, indem abwechselnd das gröfsere und kleinere Stück des Körpers an derselben Seite der Rotationsaxe sich befindet; diese Reihenfolge von Stöfsen erzeugt einen Ton.

Auch scheinbar kontinuierliche Bewegungen können einen Ton erzeugen, in der That ist es aber wieder eine regelmäfsige Reihenfolge von Stöfsen, welche auch in solchen Fällen den Schall hervorrufen[1]). Bläst man in das Mundstück einer gewöhnlichen Pfeife, so erzeugt dieser kontinuierliche Luftstrom einen Ton; indes in diesem Falle teilt sich der Luftstrom an der Lippe der Pfeife, der eine Teil dringt in die Pfeife ein, der andere entweicht in die umgebende Luft. Der in die Pfeife eingedrungene Teil des Luftstromes komprimiert anfänglich die der Lippe am nächsten liegende Schicht der Luft; diese Verdichtung der Luftschicht verhindert wegen der gröfsern Elasticität der komprimierten Luft dann so lange ein neues Eindringen der Luft in die Pfeife, bis sich die Verdichtung auf die weiteren Luftschichten der Pfeife übertragen hat. Es entsteht daher auch in diesem Fall eine periodische Bewegung, eine Reihenfolge von Stöfsen, welche den Schall veranlafst.

Wir können daher ganz allgemein sagen, dafs die Ursache des Schalles regelmäfsig wiederholte Stöfse sind, welche zu unserem Ohre gelangen.

Damit das letztere, die Mitteilung der Stöfse an unser Ohr, der Fall sein kann, genügt nicht allein das Schwingen eines Körpers, sondern es ist notwendig, dafs diese schwingende Bewegung durch ein elastisches Mittel zu unserem Ohre hingeführt werde. In den meisten Fällen ist dieses Mittel die atmosphärische Luft. Versetzen wir einen Körper in longitudinale Schwingungen, so dehnt er sich abwechselnd aus, abwechselnd zieht er sich zusammen. Bei der Ausdehnung treibt er die zunächst an ihn angrenzende Luft von sich fort, bei der Zusammenziehung stürzt die vorher fortgetriebene Luft in den jetzt leeren Raum, welcher den Körper umgibt, hinein, und diese hin- und hergehende Bewegung der Luft pflanzt sich als longitudinale Schwingung durch die Umgebung bis zu unserem Ohre fort. Schwingt eine Saite, ein Stab oder eine Platte transversal, so tritt dasselbe ein; bewegt sich die Saite nach der einen Seite, so treibt sie die angrenzende Luft in der Richtung fort, schwingt sie zurück, so saugt sie die Luft gewissermafsen nach sich hin; sie erteilt also der Luft eine hin- und hergehende Bewegung, welche bis zu unserem Ohre fortgepflanzt und als Stöfse auf dasselbe wirkend uns die Empfindung des Schalles gibt.

Es kann aber jeder Körper, die festen sowohl als die flüssigen, wenn in ihnen ein Schall erregt wird, denselben fortpflanzen, wie man sich leicht dadurch überzeugt, dafs eine unter Wasser erregte periodische Bewegung

[1]) Man sehe Strouhal, Wiedemanns Annalen Bd. V p. 216.

als Schall wahrnehmen läfst. Wir sahen, in allen elastischen Körpern
nzen sich an einer Stelle erregte Schwingungen fort; da der Schall eine
wingende Bewegung ist, die zu unserem Ohre fortgepflanzt ist, so folgt
dem vorigen Abschnitte schon, dafs jeder elastische Körper den Schall
zupflanzen imstande ist.

Dafs wir aber überhaupt nur dann einen Schall vernehmen, wenn durch
nd einen elastischen Körper die Schwingungen zu unserem Ohre fort-
flanzt werden, zeigt die Erfahrung. Denn bringen wir unter die Glocke
Luftpumpe ein kleines Glöckchen, welches mit einem Klöppel versehen
an einem Faden in der Glocke so aufgehängt ist, dafs es nirgendwo
der festen Begrenzungen des von der Glocke und dem Luftpumpen-
er abgesperrten Raumes berührt, so hört man keinen Ton, wenn man
Luft durch Pumpen aus der Glocke fortnimmt und durch Bewegung
Apparates den Klöppel zum Anschlagen bringt. Man hört aber einen
all, wenn man eine Verbindung zwischen der Glocke und dem Recipien-
der Pumpe herstellt, sei es, dafs man den Recipienten mit Luft oder
einer Flüssigkeit anfüllt, oder dafs man das Glöckchen an einem Metall-
ht in der Glocke aufhängt.

§ 153.

Qualität des Schalles. Jeden Eindruck, welchen wir durch unser
hör erhalten, nennen wir Schall; indes können diese Eindrücke sehr ver-
ieden sein.

1. Der Schall kann in einem einzigen mehr oder weniger starken, kurz
ebrochenen Eindruck auf unser Gehör bestehen, man nennt ihn dann
stens Knall, wenn man auch häufig unter Knall nur einen heftigen, ein-
igen, kurz abgebrochenen Eindruck auf unser Gehör versteht. Der Schall
n ferner von einiger Dauer sein, in einer Reihenfolge von Stöfsen be-
en, welche unser Ohr erhält. Je nachdem nun diese Stöfse regelmäfsig
r unregelmäfsig, gleichartig oder ungleichartig sich folgen, unterscheidet
den Schall als Ton oder Klang oder als Geräusch. Die Geräusche selbst
rscheidet unsere Sprache wieder als Rasseln, Knistern, Sausen, Brausen etc.

2. Die musikalischen Töne unterscheidet man nach ihrer Höhe als
ere oder tiefere Töne. Worauf dieser Unterschied beruht, läfst sich
t durch den Versuch zeigen. Ein longitudinaler Ton ist stets viel
er, als der Transversalton desselben Stabes, und der Transversalton eines
es ist um so höher, je kürzer und dicker der Stab ist; bei schwingen-
Saiten ist der Ton um so höher, je kürzer die Saite ist oder je stärker
sie spannt. Da wir nun sahen, dafs die longitudinalen Schwingungen
her sind als die transversalen, und diese um so rascher, je kürzer der
ingende Körper ist, so folgt, dafs ein Ton um so höher ist, je mehr
wingungen der den Ton erzeugende Körper macht, je mehr Stöfse also
leichen Zeiten unser Ohr treffen.

Man kann die Schwingungszahl einer gespannten Saite berechnen; ...
nun einen Stab mit der Saite genau isochron schwingen,
einen Ton dadurch hervor, dafs man ebenso oft die Zähne
n eine Karte schlagen läfst, so haben alle diese Töne
kalische Höhe. Jeder Ton entspricht somit einer ge...
wingungszahl.

Man kann übrigens auch bei den Geräuschen eine verschiedene Höhe wahrnehmen, wie man aus folgendem Versuche sieht. Man nimmt sieben Stäbe von hartem Holze gleicher Dicke und Breite, aber verschiedener Länge, so daſs beim Anschlagen diese Stäbe eine Tonreihe geben. Läſst man dann einen der Stäbe auf den Boden fallen, so hört man ein Geräusch ohne bestimmten musikalischen Charakter; läſst man aber die Stäbe nach einander zu Boden fallen, und zwar der Reihe nach die gröſsern zuerst, so unterscheidet man auch bei diesen Geräuschen eine bestimmte Höhe.

3. Töne gleicher Höhe können auf das Ohr einen ganz verschiedenen Eindruck machen; so unterscheidet man deutlich den Ton selbst bei gleicher Höhe der Blas- und Streichinstrumente, bei den Blasinstrumenten den der Holz- und Blechinstrumente.

Die Töne unterscheiden sich durch eine eigentümliche Beschaffenheit, die man häufig als Klang oder Klangfarbe oder Tonfarbe bezeichnet. Vielfach wendet man auch dafür das französische Wort Timbre an. Die Ursache der Klangverschiedenheit, welche schon Ohm[1]) in der verschiedenen Form der Schwingungen gesehen hatte, ist besonders von Helmholtz[2]) in neuerer Zeit untersucht worden, er hat gezeigt, daſs dieselbe in der That von der Form der Schwingungen, oder vielmehr von den gleichzeitig auftretenden Tönen bedingt ist. Einen Ton erzeugt jede regelmäſsig periodische Wiederkehr von Stöſsen in unser Ohr; innerhalb jeder Schwingungsperiode bleibt die Bewegung dabei ganz willkürlich, wenn nur dieselbe Bewegung, welche innerhalb der ersten Periode bestand, in den folgenden Perioden in ganz gleicher Weise wiederkehrt. So kann die Schwingung, die wir als Ton vernehmen, eine einfache sein, sie kann aber auch aus der Übereinanderlagerung mehrerer Schwingungen bestehen, deren jede einem andern höhern Tone entspricht, welcher den gehörten Ton begleitet, welcher sich aber nur in soweit bemerkbar macht, daſs er die Farbe des Grundtones verändert. In welcher Weise wir die einzelnen Töne eines Klanges erhalten können, werden wir in einem der nächsten Paragraphen besprechen.

4. Die Töne können bei gleicher Höhe und gleicher Klangfarbe an Stärke oder Intensität verschieden sein. Verschiedenheit der Stärke erzeugen wir bei einer gespannten Saite durch Änderung der Schwingungsamplitude, oder was dasselbe ist, durch Änderung der Schwingungsgeschwindigkeit bei ungeänderter Dauer der Schwingung. Der gröſsern Amplitude entspricht der stärkere Ton.

Wir nehmen indes nicht an, daſs die Intensität einfach wie die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung zu- oder abnehme, sondern wie das Quadrat derselben, indem wir annehmen, daſs die Stärke des Schalles von der Stärke des Stoſses abhängt, welchen die bewegten Luftteilchen unserm Gehörorgane erteilen. Die Stärke des Stoſses ist aber proportional der lebendigen Kraft der bewegten Körper, und da diese bei gleicher Masse dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so setzen wir die Intensität des Schalles dem Quadrate der Geschwindigkeit der schwingenden Teile in dem Augenblicke der gröſsten Geschwindigkeit proportional.

[1]) *Ohm*, Poggend. Ann. Bd. LXX. Bd. LXII. Man sehe auch *Seebeck*, Poggend. Ann. Bd. LX und Bd. LXIII. Doves Repert. Bd. VIII.
[2]) *Helmholtz*, Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863.

§ 154.

Bestimmung und Vergleichung der Schwingungszahlen. Um chwingungszahl von Tönen zu erhalten, kann man sich entweder der ze der Elasticität bedienen oder der Tonerzeugung durch mechanische , indem man letztere durch irgend eine mechanische Vorrichtung zählt.

Die Sirene von Cagniard Latour[1]) bestimmt die Schwingungszahlen direkte Zählung der den Ton erzeugenden Stöfse, sie besteht (Fig. 254) iner cylindrischen Trommel, von der unten in der Mitte der Boden- eine Röhre R ausgeht, mittels welcher der Apparat auf einen Wind- gesetzt wird, und durch welche die komprimierte Luft in die Trommel indringt. Die obere Platte der Trommel ist durch eine bestimmte l von Löchern, welche auf dem Umfange eines Kreises liegen, durch- Die Löcher sind alle gleichweit von einander entfernt und alle nach er Richtung schief gebohrt, so dafs die Öffnungen alle z. B. von links rechts aufsteigende unter einem bestimmten Winkel gegen die Vertikale gte Kanäle durch die Platte bilden.

Unmittelbar über der die Trommel deckenden Platte befindet sich eine Platte, welche an der Axe AF (Fig. 255) befestigt ist und mit dieser ich drehen kann. Um die Platte möglichst leicht beweglich zu machen, stählerne Axe AF unten bei a (Fig. 254) in ein Zapfenlager von ng gestellt, und oben durch die Schraube A, deren Spitze in eine che Vertiefung der Axe pafst, lose gehalten.

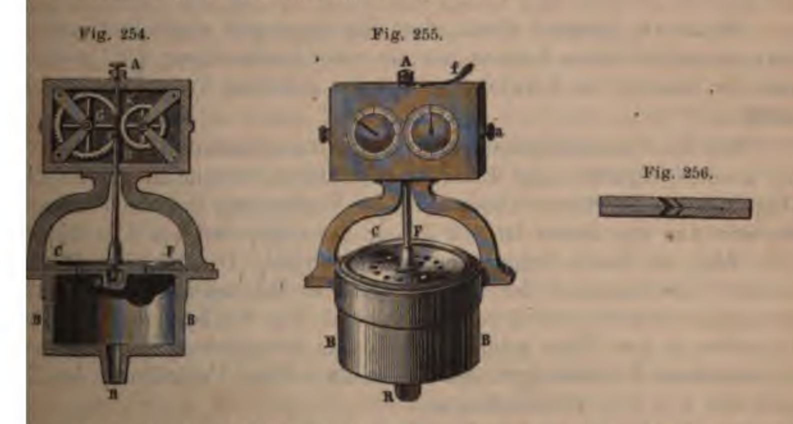


Fig. 254. Fig. 255. Fig. 256.

Die Platte C (Fig. 255) hat ebenfalls auf einem Kreise 16 Löcher, so ieselben sich auf die Löcher der untern Platte legen und die Trommel r äufsern Luft in Verbindung setzen können, oder bei einer kleinen ng der obern Scheibe den Zwischenräumen der untern Scheibe ent- en, die Trommel also verschliefsen. Bilden die Löcher die Fortsetzung öcher der untern Platte, so kann die in die Trommel getriebene ver- te Luft nach aufsen entweichen; entsprechen die Löcher den Zwischen-

[1]) *Cagniard Latour*, Annales de chim. et de phys. Tome XII et XVIII. d. Ann. VIII und X.

räumen zwischen den unteren Löchern, so ist die Trommel abgesperrt, die Luft kann nicht entweichen. Die Löcher sind schief durch die Platte gebohrt, aber nach entgegengesetzter Richtung als die unteren Löcher; also wenn diese von links nach rechts durch die untere Platte aufsteigende Kanäle bilden (Fig. 256), so bilden die Löcher der obern Platte von rechts nach links aufsteigende Kanäle. Durch diese Art der Durchbohrung wird bewirkt, dafs die Scheibe C durch den Luftstrom selbst zum Rotieren gebracht wird, der zu den Löchern austritt, wenn die obern Löcher auf den unteren stehen, denn der in den unteren Löchern von links nach rechts aufsteigende Luftstrom stöfst gegen die Wände der oberen Löcher und erteilt dadurch der Scheibe eine Drehung, welche derjenigen des Zeigers einer Uhr entgegengesetzt ist. Die Geschwindigkeit der obern Scheibe wird dadurch um so gröfser, je stärker der Druck der Luft in der Trommel ist. Durch Regulierung des Luftstromes kann man daher der Scheibe eine ganz bestimmte Geschwindigkeit geben.

Dreht sich die Scheibe mit einer gewissen Geschwindigkeit, so wird bei 16 Löchern bei jeder Umdrehung, da alle oberen Löcher zugleich auf alle unteren zu stehen kommen, 16 mal die Trommel geöffnet und 16 mal geschlossen. Die von unten in die Trommel geführte verdichtete Luft kann also 16 mal durch die obere Platte entweichen und ebenso wird 16 mal der Luftstrom unterbrochen. Wir erhalten somit bei jeder Umdrehung 16 Verdichtungen der Luft über der Scheibe und beim Verschlufs der unteren Löcher 16 Verdünnungen, also bei jeder Umdrehung 16 Schwingungen der Luft, welche sich als 16 Wellen in die umgebende Luft fortpflanzen.

Wenn wir demnach durch diese Schwingungen einen bestimmten Ton hervorgebracht haben, können wir aus einer Beobachtung der Umdrehungszahl der Scheibe die Schwingungszahl des gehörten Tones unmittelbar ableiten.

Um die Umdrehungszahl der Scheibe zu erhalten, ist in die Axe AF bei s eine Schraube ohne Ende eingeschnitten, welche in ein Zahnrad E (Fig. 254) eingreift und dieses bei jeder Umdrehung um einen Zahn dreht. An der Axe des Rades ist ein Zeiger befestigt, der auf dem Zifferblatte (Fig. 255) die Umdrehungen der Scheibe angibt. Das Rad hat 100 Zähne, bei 100 Umdrehungen der Scheibe dreht es sich somit einmal herum und die Spitze des Zeigers durchläuft einmal den Umfang des Zifferblattes. Dieses ist in 100 Teile geteilt, die an ihm befindlichen Zahlen geben also die einzelnen Umdrehungen des Rades an. Eine Umdrehung des Zeigers gibt also 16 · 100 Vibrationen an.

Hat sich das Rad E einmal vollständig gedreht, so greift ein Vorsprung H, der am Umfange des Rades befestigt ist, in die Zähne des Rades G und bewirkt, dafs der an der Axe dieses Rades befestigte Zeiger auf seinem Zifferblatte um einen Teilstrich weiter rückt, jeder Teilstrich dieses Zifferblattes gibt also 100 Umdrehungen der Scheibe oder 1600 Schwingungen an. Hat man sonach während einer Zeit T eine Bewegung des Zeigers auf dem zweiten Zifferblatte um n Teilstriche beobachtet und auf dem ersten n', so ist die Anzahl der während der Zeit T stattgefundenen Schwingungen

$$N = n \cdot 1600 + n' \cdot 16,$$

nd die Schwingungszahl des Tones, wenn T in Sekunden gegeben ist,

$$\nu = \frac{N}{T}.$$

Die beiden gezahnten Räder sind auf der einen Platte des Gehäuses, welchem sie eingeschlossen sind, befestigt. Diese Platte ist ein wenig rschiebbar, und drückt man auf die Fig. 255 zur Rechten befindliche hraube a, so wird die Platte und damit die gezahnten Räder so weit zur nken verschoben, dafs die Schraube ohne Ende nicht in das Zahnrad E greift. In dieser Lage wird die Platte durch die oben auf dem Ge-use befindliche Feder, deren Vorsprung in einen Ausschnitt der Platte greift, festgehalten. Wenn sich also auch jetzt die Scheibe dreht, so wegen sich doch die Räder und Zeiger nicht. Drückt man dann auf die der f, so springen Platte und Räder in ihre frühere Lage zurück und Räder und Zeiger bewegen sich.

Um nun mittels der Sirene die Schwingungszahl eines Tones zu be-mmen, bewirkt man zunächst, dafs beide Zeiger auf 0 stehen. Dann rden sie ausgelöst und man setzt durch einen Luftstrom die Sirene in wegung. Der Ton ist anfangs tief, wird aber, da die Bewegung der heibe eine beschleunigte ist, immer höher. Durch Regulierung des Luft-omes bringt man dann den Ton hervor, dessen Schwingungszahl man tersuchen will, und drückt, wenn er konstant geworden ist, zu einer ganz stimmten Zeit auf die Feder f. Dadurch werden die Räder eingeschaltet d die Zeiger bewegen sich. Nach einer bestimmten Zeit drückt man auf n Knopf a und schaltet so die Räder wieder aus und liest sowohl die ilstriche n auf dem Zifferblatt des Rades G ab, als die n' auf dem an-rn und hat somit alle Daten, die erforderlich sind, um die Schwingungs-hl ν zu bestimmen.

Savart wandte zu seinen Versuchen, um die Grenze der Wahrnehm-rkeit der Töne zu bestimmen, ein anderes Verfahren an[1]). Er ersetzte e Sirene durch ein in schnelle Rotation versetztes gezahntes Rad, dessen ähne gegen eine Karte oder ein keilförmiges zugeschnittenes Blättchen n leichtem Holze schlugen. Jeder Schlag entspricht einer einmaligen ffnung der Sirene, also einer Schwingung, aus der Anzahl der Zähne des ades und der Umdrehungsgeschwindigkeit desselben erhält man also durch ne einfache Multiplikation die Anzahl der einem bestimmten Tone ent-rechenden Schwingungen.

Die Umdrehungen des Rades werden auch hier durch einen Zähler von icher Einrichtung wie derjenige der Sirene bestimmt.

Duhamel hat es versucht, die Schwingungen zu zählen, indem er die 145 schon besprochene graphische Methode anwandte[2]). Der schwingende d tongebende Körper, z. B. ein schwingender Stab, wird an seinem de mit einer feinen Spitze versehen und vor ihm ein Glascylinder ge-ht, der durch Rufs mit einem leicht fortzunehmenden Überzuge ver-en ist. Die Spitze berührt den Cylinder nur ganz leicht. Wenn nun Stab nicht schwingt, so zieht die Spitze auf dem Cylinder, der sich bei

---

[1]) *Savart*, Über die Empfindlichkeit des menschlichen Gehöres. Annales chim. et de phys. T. XLIV. Poggend. Ann. XX.

[2]) *Duhamel*, L'Institut 1840. p. 19 und 41.

der Drehung zugleich langsam hebt oder senkt, eine einfache Spirallinie; wenn aber der Stab schwingt, so erhält diese Spirallinie eine Wellenform und jeder Welle entspricht eine Schwingung des Stabes. Wenn der Cylinder durch irgend eine mechanische Vorrichtung in eine stetige Rotation versetzt wird und durch irgend eine andere Zählvorrichtung die Umdrehungsgeschwindigkeit bestimmt werden kann, so genügt es, die Länge der Spirallinie zu messen und die Anzahl der Wellen zu zählen, um die Schwingungszahl zu erhalten. Habe z. B. die Walze fünf Umdrehungen in der Sekunde, und beobachtet man, dafs die Spirallinie genau 2,5 Umfänge der Walze beträgt, so gibt die Zahl der Wellen auf derselben die Schwingungszahl in einer halben Sekunde an, die doppelte Zahl also die Schwingungszahl des Tones.

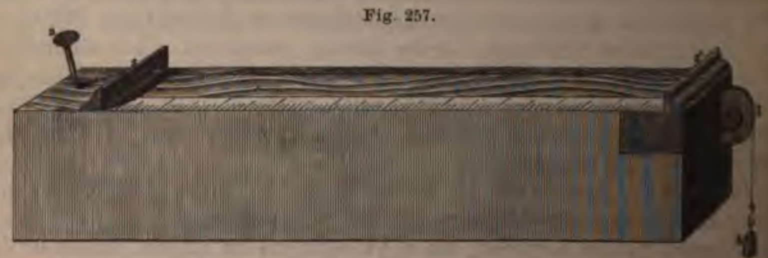
Duhamel und später Wertheim wandten indes dieses Verfahren hauptsächlich dazu an, um die Schwingungszahlen zweier Töne zu vergleichen. Zu dem Ende braucht man die Drehungsgeschwindigkeit der Walze nicht einmal zu kennen.

Man bringt nur die beiden Stäbe oder schwingenden Körper nahe bei einander an, so dafs sie ihre Schwingungen auf einer und derselben Walze gleichzeitig abzeichnen.

Man hat dann nur die auf gleichen Längen der beiden Spiralen befindlichen Wellen zu zählen, und da diese in gleichen Zeiten von den beiden schwingenden Körpern beschrieben sind, so ist das Verhältnis der beiden Zahlen genau das der Schwingungszahlen der Töne.

Die andere Methode, um die Schwingungszahlen der Töne zu bestimmen, beruht auf der Anwendung der Elasticitätsgesetze, welche uns nach dem vorigen Abschnitte die Schwingungszahl eines gegebenen Körpers aus seiner Beschaffenheit zu berechnen gestatten. Sie ist besonders bequem, um die Schwingungszahlen der Töne zu vergleichen, und da, wie wir sehen werden, aus der Schwingungszahl eines Tones sich die aller übrigen berechnen läfst, so wendet man diese Methode fast immer zur Bestimmung der Schwingungszahl der Töne an.

Fig. 257.



Das gebräuchlichste auf dieser Methode beruhende Verfahren ist die Bestimmung der Schwingungszahlen mittels des Monochordes, einer auf einem Kasten von trocknem Holze aufgespannten Saite (Fig. 257). Die Saite ist bei a mittels einer Schraube befestigt und, um eine genau bestimmbare Länge derselben zu den Versuchen zu verwenden, über die beiden scharfen Stege ss' gelegt und dann über die Rolle R geführt, welche sich mit möglichst wenig Reibung in ihrem Zapfenlager dreht. In dem an das Ende der Saite befestigten Häkchen h können verschiedene spannende Gewichte befestigt werden. Der Abstand ss' zwischen den beiden Stegen ist

1000 gleiche Teile geteilt und ein auf dem Brette des Monochords verhiebbarer Steg gestattet von der Saite beliebige Stücke schwingen zu ssen.

Um nun die Schwingungszahl eines Tones zu bestimmen, stimmt man mächst das Monochord nach dem betreffenden Ton, sei es dem einer Stimmbel oder irgend eines andern Instrumentes, indem man das spannende ewicht oder die Länge der Saite so lange ändert, bis sie bei einfachem nschlagen oder Anstreichen mit dem Geigenbogen genau den Ton der bel angibt.

Aus der beobachteten Länge der Saite, dem spannenden Gewichte und m Gewichte der Längeneinheit der Saite erhält man dann, wenn die eifigkeit der Saiten nicht beachtet zu werden braucht, die Schwingungshl nach der Formel des § 140

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}},$$

rin l die Länge der Saite, P das spannende Gewicht, q den Querschnitt d s das specifische Gewicht der Saite, also $q \cdot s$ das Gewicht der Längenheit bedeutet.

Man wendet meist zu dem Monochord Metallsaiten an, da diese regelfsiger zu bearbeiten sind als andere und da sie bei gleicher Spannung ht so leicht Änderungen ausgesetzt sind durch den Feuchtigkeitsgehalt r Luft. Sind jedoch diese Saiten nicht sehr dünn und nicht vollkommen gsam, wie z. B. die Stahlsaiten, die zu den Klavieren benutzt werden, mufs man zur Berechnung der Schwingungszahlen die vollständigere rmel von Seebeck anwenden, in welcher auf die Steifigkeit der Saiten cksicht genommen ist.

Eine andere Methode, welche Scheibler[1]) angewandt hat, um mittels s Monochords nur durch Versuche die absolute Schwingungszahl der Töne bestimmen, werden wir erst im nächsten Kapitel bei Abhandlung der öfse und Kombinationstöne kennen lernen können.

§ 155.

Von dem Verhältnis der Töne und den Intervallen. Man kann f die verschiedenste Weise und mit den verschiedensten Instrumenten ne gleicher Höhe hervorbringen. Nimmt man z. B. den Ton eines gemmten Stabes und bringt auf der Sirene oder mittels gezahnter Räder, er mittels gespannter Saiten den Ton hervor, so findet man stets bei ssung der Schwingungszahlen, wie verschieden auch die Klangfarbe aller ser Töne sein mag, dafs sie doch alle dieselbe Schwingungszahl haben. r folgern daraus das erste Gesetz der Tonlehre:

Allen Tönen gleicher Höhe, welches auch der schwingende Körper , welcher sie veranlafst, entsprechen gleiche Schwingungszahlen, und gekehrt, gleichen Schwingungszahlen entsprechen immer gleiche Tonen.

1) Über *Scheiblers* Versuche. *Roeber* in Poggend. Ann. Bd. 32 und in Dov-- pertorium. Bd. III.

Daraus folgt, dafs ein gegebener Ton seiner Höhe nach bestimmt ist durch die Zahl n seiner Schwingungen, und dafs man ihn mittels derselben bezeichnen kann.

Töne verschiedener Schwingungszahlen sind verschieden, das Verhältnis ihrer Schwingungszahlen nennt man ein Tonverhältnis oder Intervall.

Wenn man zugleich zwei Töne verschiedener Höhe hervorbringt und anhalten läfst, so kann das Zusammenklingen derselben auf unser Ohr entweder einen angenehmen Eindruck machen oder einen nicht so angenehmen. In dem ersten Falle nennt man das Zusammenklingen der Töne oder den Accord konsonierend, im zweiten Falle dissonierend. Je weniger angenehm der Accord unser Ohr für sich allein stehend berührt, um so dissonierender ist derselbe.

Es gibt nun eine grofse Menge verschiedener Accorde, welche alle in der Musik gebraucht werden, das Ohr unterscheidet sie als angenehm oder weniger angenehm, und darnach ist denselben in der Musik ihre Stelle angewiesen. Die Aufgabe der Physik ist es, zu untersuchen, worin die Accorde sich unterscheiden. Nehmen wir z. B. einen häufig gebrauchten Accord, den Zweiklang von *c* und *e* der gewöhnlichen Tonleiter, so sagt uns unser Ohr zunächst, dafs dieser Accord mit denselben wesentlichen Eigenschaften, mit wesentlich demselben Eindruck auf unser Ohr sowohl zwischen hohen als tiefen Tönen bestehen kann, dafs er ebenso zwischen je zwei andern Tönen der Tonleiter *d*, *fis* u. s. w. bestehen kann. Es folgt daraus, der Accord ist unabhängig von der Höhe der ihn zusammensetzenden Töne, also unabhängig von ihrer absoluten Schwingungszahl. Wenn man nun aber in allen den verschiedenen Fällen die Schwingungszahlen der den Accord zusammensetzenden Töne bestimmt, so findet man, dafs dieselben stets im Verhältnisse von 4 zu 5 zu einander stehen, und ebenso auch umgekehrt, dafs ein Accord, dessen Töne Schwingungszahlen besitzen, welche im Verhältnisse von 4 zu 5 zu einander stehen, stets als derselbe erscheint. Gleiches gilt für alle übrigen Accorde. Wir erhalten demnach als zweites Gesetz der Tonlehre folgendes:

Jeder musikalische Accord zwischen zwei Tönen ist bestimmt und kann dargestellt werden durch das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen $\frac{n}{n'}$ der komponierenden Töne.

Ist das Verhältnis $\frac{n}{n'}$ der Einheit gleich, so sind die beiden Töne im Einklang; ist es verschieden, so sind sie an Höhe verschieden und zwar um so mehr, je mehr dies Verhältnis von der Einheit verschieden ist. Ihr musikalisches Intervall ist unabhängig von der absoluten Anzahl der Schwingungen, es wird nur bestimmt von dem Verhältnis derselben.

Um zu unterscheiden, welche Intervalle konsonierend sind, welche nicht, müssen wir untersuchen, wie sich die Intervalle der von der Musik als die konsonierendsten angenommenen Accorde verhalten. Es sind dieses die Oktave, in der gewöhnlichen Dur-Tonleiter c und c_1, die Sexte c und a, die Quinte c und g, die Quarte c und f, die grofse Terz c und e und die kleine Terz c und *es*. Eine Vergleichung der Schwingungszahlen hat nun ergeben, wenn man von dem tiefsten Tone der Reihe ausgeht, und dessen Schwingungszahl, wo der Ton sonst seiner absoluten Höhe nach [illegible]gen mag, gleich 1 setzt:

Für	die	Oktave	das	Verhältnis		$\frac{n}{n'} = \frac{2}{1}$
„	„	Sexte	„	„	„	$= \frac{5}{3}$
„	„	Quinte	„	„	„	$= \frac{3}{2}$
„	„	Quarte	„	„	„	$= \frac{4}{3}$
„	„	grofse Terz	„	„	„	$= \frac{5}{4}$
„	„	kleine Terz	„	„	„	$= \frac{6}{5}$.

Das heifst die Oktave macht zwei Schwingungen, wenn der Grundton macht, die Sexte 5, wenn der Grundton 3, oder $\frac{5}{3}$, wenn letzterer 1 führt u. s. f.

Es folgt daraus, wenn man zwei Töne, deren Schwingungszahlen sich aalten wie zwei Zahlen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, ımmenklingen läfst, dafs man dann einen konsonierenden Accord erhält.

Man teilt diese Accorde in vollkommene und unvollkommene Kon-ınzen. Die vollkommenen sind die Oktave und die Quinte, welche den hältnissen 1, 2, 3 entsprechen, die übrigen sind die unvollkommenen ısonanzen. Wir sehen demnach, eine Konsonanz ist um so vollkommener, infacher das Schwingungsverhältnis der sie komponierenden Töne ist, Accord wird um so dissonierender, je komplexer das Verhältnis der len ist, welche ihn zusammensetzen. So gilt die Sekunde $\frac{9}{8}$ und noch ır die kleine Sekunde $\frac{16}{15}$ als Dissonanz.

§ 156.

Von den mehrfachen Accorden. Aus dem Gesetze der Konsonanz t sich nun leicht voraussehen, welche mehrfach zusammengesetzte Accorde unser Ohr einen wohlthuenden Eindruck machen, welche als Konsonanzen ken und welche als Dissonanzen eine Auflösung verlangen. Konsonierende orde können nur solche sein, in denen alle Töne in einfachen Verhält-ıen zu einander stehen.

Wir wenden zur Bestimmung der Tonverhältuisse die erwähnte Be-hnungsweise an, die Schwingungszahl eines Tones, und zwar, wenn ıts Anderes bemerkt wird, des tiefsten, wird gleich 1 gesetzt. Jeder der enden Brüche bezeichnet einen Ton und zwar denjenigen, welcher die ch den Bruch angedeuteten Schwingungen vollführt, wenn der mit 1 eichnete Ton eine Schwingung vollführt, oder der in derselben Zeit die Zähler angegebenen Schwingungen zurücklegt, wenn der Grundton die Nenner stehende Anzahl von Schwingungen zurücklegt.

Nach dem Vorigen können also nicht konsonierend sein

Prim Terz Quart $1 : \frac{5}{4} : \frac{4}{3}$
Prim Quart Quint $1 : \frac{4}{3} : \frac{3}{2}$
Prim Quint Sext $1 : \frac{3}{2} : \frac{5}{3}$;

ı wenn auch die beiden ersten Töne dieser Accorde konsonierend sind, ind es nicht die beiden letzten, da diese den Verhältnissen $\frac{16}{15}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ prechen.

Konsonierend sind die Accorde

1) Prim grofse Terz Quint $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$
2) Prim kleine Terz Quint $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}$
3) Prim grofse Terz Sext $1 : \frac{5}{4} : \frac{5}{3}$
4) Prim Quart Sext $1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3}$;

denn in allen diesen Fällen sind diese Töne sowohl mit dem Grundtone als unter sich in Konsonanz, denn bei den beiden letzten Tönen haben wir

in 1) grofse Terz Quint $\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 5 : 6$
„ 2) kleine Terz Quint $\frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 4 : 5$
„ 3) grofse Terz Sext $\frac{5}{4} : \frac{5}{3} = 3 : 4$
„ 4) Quart Sext $\frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 4 : 5$.

Die Accorde 3 und 4 sind übrigens nur Umkehrungen der Accorde 1 und 2, denn multiplicieren wir in 3 die Töne 1 und $\frac{5}{4}$ mit 2, setzen also für diese Töne die mit ihnen vollkommen konsonierenden Oktaven, so erhalten wir für 3

$$2, \frac{10}{4}, \frac{5}{3},$$

oder setzen wir jetzt $\frac{5}{3}$ als Grundton, also seine Schwingungszahl gleich 1,

$$1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}.$$

Multiplicieren wir in 4 nur die Prim mit 2 und dividieren dann alle Zahlen mit $\frac{4}{3}$, das heifst, machen wir die Quart zum Grundton, so erhalten wir

$$1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}.$$

Der Accord 3 ist also nur eine Umkehrung von 2, und der Accord 4 eine Umkehrung von 1.

Aufser den angegebenen vier konsonierenden Accorden erhalten wir durch nochmalige Umlagerung der beiden Accorde 1 und 2 noch zwei weitere konsonierende Accorde; indem wir nämlich den Accord 1 ebenso umlegen, wie der Accord 3 aus 2 entstanden ist, also nur für die Prim ihre höhere Oktave einsetzen, bekommen wir den fünften Accord

$$\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2,$$

oder indem wir diesen Accord vom Grundton uns gebildet denken, erhalten wir durch Multiplikation aller Zahlen mit $\frac{4}{5}$

$$1, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}.$$

Dafs von diesen drei Tönen der zweite mit dem ersten, der dritte mit dem zweiten in Konsonanz sind, ergibt sich unmittelbar, da es die Intervalle $\frac{6}{5}$ und $\frac{4}{3}$ sind, dafs der dritte mit dem ersten konsonant ist, folgt aus den im vorigen Paragraphen angeführten Intervallen nicht; wir können es aber schon aus der Bemerkung ableiten, dafs die Oktave mit dem Grundton die vollkommenste Konsonanz bildet, und dafs deshalb ein Intervall nicht dissonierend wird, wenn wir den Grundton durch seine Oktave ersetzen. Da nun das Intervall $\frac{8}{5}$ nichts Anderes ist als die Umlagerung der Terz, indem wir den Grundton durch die Oktave ersetzen, so folgt, dafs auch dieses Intervall konsonierend ist. Wir werden im übrigen sofort bei Ableitung der Tonleiter dieses Intervall als ein Sextenintervall kennen lernen.

Lagern wir den Accord 2 in derselben Weise um, wie wir zur Bildung von 4 den Accord 1 umlagerten, setzen wir also für Grundton und kleine Terz die höhere Oktave, so erhalten wir als sechsten Accord

$$\frac{3}{2}, 2, \frac{12}{5},$$

und bilden wir jetzt diesen Accord anstatt von der Quint von dem Grundton, indem wir alle Zahlen mit $\frac{2}{3}$ multiplicieren, so erhalten wir

$$1, \frac{4}{3}, \frac{24}{15} = \frac{8}{5}.$$

Nach der soeben gemachten Bemerkung wird man auch diesen Accord
ort als konsonierend erkennen.

Man nennt die konsonierenden Accorde, welche aus drei Tönen zu-
mmengesetzt sind, welche im Verhältnisse $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}$ oder $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$ stehen,
eiklänge und zwar den Dreiklang mit der grofsen Terz den grofsen oder
r-Dreiklang, den mit der kleinen Terz den Moll-Dreiklang; sie sind mit
en beiden Umlagerungen die einzigen konsonierenden Accorde, die sich
der Reihe der harmonischen Töne ergeben. Die Accorde 3 und 5,
lche, der erstere aus dem Moll-Dreiklange, der zweite aus dem Dur-
eiklange, durch Ersetzen des Grundtones durch die höhere Oktave ent-
nden gedacht sind, heifsen die Terzsextaccorde oder schlechthin Sext-
orde, die beiden andern die Quartsextaccorde jedesmal desjenigen Drei-
nges, aus dem sie entstanden sind.

Die beiden Dreiklänge sind aus ganz gleichen Intervallen aufgebaut,
de aus einer grofsen und einer kleinen Terz, der einzige Unterschied ist
, dafs beim Dur-Dreiklange die beiden untern, beim Moll-Dreiklange die
den obern Töne das Intervall der grofsen Terz bilden.

Auf die Frage, warum nur diese und keine andern Intervalle und
corde konsonierend sind, kommen wir im nächsten Kapitel nochmals
ück, wenn wir die Wahrnehmung der Töne überhaupt besprechen, es
ügt uns, an dieser Stelle die erfahrungsgemäfs bestimmten konsonieren-
Accorde und Intervalle zu kennen.

§ 157.

Die Tonleiter. Aufser den harmonischen Tönen 1, 2, 3, 4, 5, 6,
r wenn wir für die höhern Töne dieser Reihe die tiefern Oktaven ein-
zen, so dafs alle Schwingungszahlen entsprechen, welche zwischen 1 und 2
gen, den Tönen $1, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2$, sind in der Musik noch viele andere
bräuchlich, welche zwischen diesen eingeschaltet werden; die Musik ordnet
selben in eine Reihe, welche den Namen Tonleiter führt. Wenn wir den
undton 1 mit c bezeichnen, so ist die sogenannte diatonische Dur-Tonleiter

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & \frac{9}{8}, & \frac{5}{4}, & \frac{4}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{15}{8}, & 2 \\ c & d & e & f & g & a & h & c_1. \end{array}$$

Aufser der Terz, Quart, Quint, Sext tritt noch die Sekunde $\frac{9}{8} = d$ und
Septime $\frac{15}{8} = h$ hinzu. Von der Oktave c_1 wiederholt sich die Reihe
fach, indem ebenso, wie die Oktave die Verdoppelung des Grundtones
, so auch in der weitern Tonreihe die folgenden Töne die Verdoppelungen
r entsprechenden Töne in den nächst tiefern Oktaven sind. Um diese
hern Oktaven zu bezeichnen, werden wir rechts unten die Zahlen $1, 2 \cdots$
die Buchstaben setzen, welche die Töne unserer Grundoktave angeben;
se Zahlen sind dann jene Potenzen von 2, mit welcher wir die Töne der
undoktave multiplicieren müssen, um den Ton der entsprechenden Oktave
erhalten. Tiefere Oktaven bezeichnen wir dadurch, dafs wir der unten
chts geschriebenen Zahl das negative Vorzeichen geben, andeutend, dafs
r, um zu diesen Tönen zu gelangen, diejenigen der Grundoktave mit der
der Zahl angegebenen negativen Potenz von 2 multiplicieren resp.
rch die betreffende Potenz von 2 dividieren müssen.

Man hat viel darüber gestritten, wie diese Tonleiter entstanden es ist indes wahrscheinlich, dafs sie sich allmählich durch das musikali Bedürfnis gebildet und erweitert hat, und dafs nicht theoretische wicklungen darauf geführt haben. Indes kann man dieselbe auf mehrf Weise entstanden denken.

Setzt man die Reihe der harmonischen Töne fort, indem man z. B. Saite des Monochords, deren Schwingungen, wenn sie ungeteilt schwi mit 1 bezeichnet werden, immer weiter nach der Reihe der natürli Zahlen teilt, so erhält man Töne mit den Schwingungszahlen

$$7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,$$

und durch Division durch die verschiedenen Potenzen von 2, um die ti Oktaven der Töne zu erhalten, so dafs sie in die Oktave 1 — 2 fallen

$$1,\ \tfrac{9}{8},\ \tfrac{10}{8},\ \tfrac{11}{8},\ \tfrac{12}{8},\ \tfrac{13}{8},\ \tfrac{7}{4} = \tfrac{14}{8},\ \tfrac{15}{8},\ 2,$$

oder mit den vorigen $1,\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3}$ zusammen

$$1,\ \tfrac{9}{8},\ \tfrac{5}{4},\ \tfrac{11}{8},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{13}{8},\ \tfrac{7}{4},\ \tfrac{15}{8},\ 2,$$

also die Töne

$$c \quad d \quad e \quad — \quad g \quad — \quad — \quad h \quad c_1.$$

Nun unterscheiden sich die Töne $\frac{11}{8}$ und $\frac{4}{3}$ oder $\frac{5}{3}$ und $\frac{13}{8}$ u nur wenig von einander, man könnte daher denken, dafs jene für eingesetzt wären, und so die Tonleiter entstanden wäre. Indes das F des einfachen Intervalles $\frac{7}{4}$ in der Tonleiter spricht nicht für diese stehungsweise.

Nach dem Vorgange von Chladni[1]) gelangen wir auf andere V zur Tonleiter, wo wir es nicht nötig haben, anstatt der direkt erhalt Verhältnisse andere einzusetzen. Bilden wir nämlich von dem Grun der Quint und der Unterquint, also dem Tone, dessen Quinte der Grun ist, die grofsen Dreiklänge, so erhalten wir:

$$\begin{array}{llll}
\text{von der Unterquint} & \tfrac{2}{3}, \cdots & \tfrac{2}{3},\ \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{5}{4},\ \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2} & = \tfrac{2}{3},\ \tfrac{5}{6},\ 1 \\
\text{von dem Grundton} & 1, \cdots & 1,\ \tfrac{5}{4},\ \tfrac{3}{2}, & = 1,\ \tfrac{5}{4},\ \tfrac{3}{2} \\
\text{von der Quint} & \tfrac{3}{2}, \cdots & \tfrac{3}{2},\ \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4},\ \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{2} & = \tfrac{3}{2},\ \tfrac{15}{8},\ \tfrac{9}{4}
\end{array}$$

und durch Ordnung nach den Schwingungszahlen, wenn wir zugleich einzelne Töne die tiefern und höhern Oktaven einsetzen, um alle Tön der Oktave 1 — 2 zu erhalten,

$$\begin{array}{cccccccc}
1, & \tfrac{9}{8}, & \tfrac{5}{4}, & \tfrac{4}{3}, & \tfrac{3}{2}, & \tfrac{5}{3}, & \tfrac{15}{8}, & 2 \\
c & d & e & f & g & a & h & c_1.
\end{array}$$

Betrachten wir nun die aus dieser Tonleiter sich ergebenden Sekun Terzen, Quarten, Quinten, Sexten, Septimen, so werden wir finden, dieselben nicht alle gleichwertig sind, sondern dafs die Intervalle verschie sein können, ohne darum aufzuhören, Sekunden, Terzen etc. zu sein.

Der Wert der Intervalle ist folgender:

---

1) *Chladni*, Akustik. p. 18 ff.

Wert der musikalischen Intervalle.

Sekunden	Terzen	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen
$\frac{d}{c}\ \frac{9}{8}$	$\frac{e}{c}\ \frac{5}{4}$	$\frac{f}{c}\ \frac{4}{3}$	$\frac{g}{c}\ \frac{3}{2}$	$\frac{a}{c}\ \frac{5}{3}$	$\frac{h}{c}\ \frac{15}{8}$
$\frac{e}{d}\ \frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{f}{d}\ \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81} = \frac{5}{4} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{g}{d}\ \frac{4}{3}$	$\frac{a}{d}\ \frac{3}{2} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{h}{a}\ \frac{5}{3}$	$\frac{c_1}{d}\ \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{f}{e}\ \frac{16}{15} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{g}{e}\ \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{a}{e}\ \frac{4}{3}$	$\frac{h}{e}\ \frac{3}{2}$	$\frac{c_1}{e}\ \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{d_1}{e}\ \frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{g}{f}\ \frac{9}{8}$	$\frac{a}{f}\ \frac{5}{4}$	$\frac{h}{f}\ \frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$	$\frac{c_1}{f}\ \frac{3}{2}$	$\frac{d_1}{f}\ \frac{27}{16} = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80}$	$\frac{e_1}{f}\ \frac{15}{8}$
$\frac{a}{g}\ \frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{h}{g}\ \frac{5}{4}$	$\frac{c_1}{g}\ \frac{4}{3}$	$\frac{d_1}{g}\ \frac{3}{2}$	$\frac{e_1}{g}\ \frac{5}{3}$	$\frac{f_1}{g}\ \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{h}{a}\ \frac{9}{8}$	$\frac{c_1}{a}\ \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{d_1}{a}\ \frac{4}{3} \cdot \frac{81}{80}$	$\frac{e_1}{a}\ \frac{3}{2}$	$\frac{f_1}{a}\ \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{g_1}{a}\ \frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$
$\frac{c_1}{h}\ \frac{16}{15} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{d_1}{h}\ \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{e_1}{h}\ \frac{4}{3}$	$\frac{f_1}{h}\ \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{g_1}{h}\ \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$	$\frac{a_1}{h}\ \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{24}{25}$

Ein Überblick vorstehender Tabelle ergibt, dafs die gleichnamigen Intervalle keineswegs alle denselben Wert haben.

Die Sekunden haben drei verschiedene Werte, nämlich zunächst ist das Schwingungsverhältnis $\frac{9}{8}$, die Töne, zwischen denen dieses Intervall stattfindet, unterscheiden sich um einen grofsen ganzen Ton; zweitens ist dasselbe $\frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$, das Intervall ist das eines kleinen ganzen Tones, der sich von dem vorigen um $\frac{81}{80}$, ein syntonisches Komma unterscheidet. Der dritte Wert, den die Sekunde annehmen kann, $\frac{16}{15} = \frac{10}{9} \cdot \frac{24}{25}$, ist der grofse halbe Ton. Da nun der kleine ganze Ton $\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24}$, so kann man denselben in zwei Intervalle teilen, den grofsen halben Ton $\frac{16}{15}$ und den kleinen halben Ton $\frac{25}{24}$. Letzterer ist das kleinste in der Musik gebräuchliche Intervall.

Wie die Sekunden grofs und klein sein können, so auch die Terzen; die grofsen entsprechen dem Verhältnis $\frac{5}{4}$, die kleinen dem um einen kleinen halben Ton $\frac{24}{25}$ kleinern Verhältnis $\frac{6}{5}$. Aufserdem tritt von d zu f eine noch um ein Komma kleinere Terz auf.

Auch bei den Quarten unterscheiden wir drei Werte, die reinen Quarten $\frac{4}{3}$, die übermäfsige Quart f — h, welche um einen kleinen halben Ton und ein Komma gröfser ist als die reinen Quarten, und schliefslich die falsche Quarte a zu d, welche gegenüber den reinen Quarten um ein Komma zu grofs ist.

Ähnlich wie die Quarten verhalten sich die Quinten, sie sind rein $\frac{3}{2}$, oder vermindert h nach f_1 um einen kleinen halben Ton und ein Komma kleiner als die reinen Quinten, oder schliefslich falsch von d nach a um ein Komma kleiner als die reinen Quinten.

Bei den Sexten unterscheiden wir grofse $\frac{5}{3}$ und kleine $\frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$, um einen kleinen halben Ton kleiner als die grofsen, und aufserdem finden wir eine falsche Sexte, die um ein Komma gröfser ist als die grofse Sexte.

Unter den Septimen finden wir zwei grofse, deren Schwingungsverhältnis $\frac{15}{8}$ ist, zwei kleine, welche von den grofsen sich um einen kleinen halben Ton unterscheiden, $\frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$ und drei falsche, welche noch um ein Komma kleiner sind als die kleinen Septimen.

Die Oktaven schliefslich sind ihrem Wesen nach alle rein, und entsprechen dem Verhältnisse $\frac{2}{1}$.

Die auf diese Weise erhaltene Tonleiter heifst die diatonische Durtonleiter, sie besteht nur aus ganzen und zwei grofsen halben Tönen, welche zwischen der dritten und vierten und zwischen der siebenten und achten Stufe liegen. Ist der Grundton der Tonleiter c, so ist die Tonleiter jene in c-Dur.

Ebenso wie von dem Grundtone c können wir jetzt von jedem der in der c-Durtonleiter gegebenen Töne wieder die diatonische Durtonleiter bilden; wir müssen dann aber zu den bisher erhaltenen Tönen neue hinzufügen. Soll die Durtonleiter von d aus gerade so beschaffen sein wie die besprochene von c aus, so müssen die einzelnen Intervalle alle in denselben Verhältnisse stehen wie in der angegebenen Tonleiter, wir bekommen die d-Durtonleiter deshalb einfach dadurch, dafs wir die für die einzelnen Intervalle der c-Tonleiter gegebenen Zahlen alle mit $\frac{9}{8}$ multiplicieren. Die

auf diese Weise ergebender Zahlen für die einzelnen Töne der Ton-
r sind dann folgende:

$$\tfrac{9}{8};\ \tfrac{81}{64} = \tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{81}{80};\ \tfrac{45}{32} = \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{25}{24}\cdot\tfrac{81}{80};\ \tfrac{3}{2};\ \tfrac{27}{16} = \tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{81}{80};\ \tfrac{15}{8};$$
$$\tfrac{135}{64} = 2\cdot\tfrac{25}{24}\cdot\tfrac{81}{80}.$$

Von diesen Zahlen sind die erste, vierte und sechste schon in der
rtonleiter vorhanden als *d*, *g*, *h*; die zweite und fünfte dagegen sind
in Komma höher als die entsprechenden *e* und *a* in der Tonleiter von
ir wollen dieselben, um diese Erhöhung anzudeuten, mit $\bar{e}$ und $\bar{a}$ be-
nen. Wesentlich verschieden von den frühern Tönen sind der dritte
siebente, sie sind um einen kleinen halben Ton und ein Komma höher
ie entsprechenden Töne der ersten Tonleiter *f* und *c*. Der Grund dieser
hung liegt darin, dafs in der Durtonleiter zwischen der zweiten und
n Stufe sowie der sechsten und siebenten Stufe ein ganzer Ton liegen
, dagegen zwischen der dritten und vierten, wie zwischen der siebenten
achten Stufe ein halber Ton vom Werte $\frac{16}{15}$. Die um einen halben Ton
ten Töne bezeichnet man durch Anhängung der Silbe *is* an den den
ffenden Ton bezeichnenden Buchstaben. Der Ton, der $\frac{1}{2}$ Ton höher
s *f*, heifst demnach *fis*, der um $\frac{1}{2}$ Ton höher liegende als *c* heifst *cis*.
kalisch werden dieselben durch ein dem betreffenden Tone vorgesetztes
elkreuz bezeichnet, so dafs *cis* = ♯ *c* ist. Die in der *d*-Durtonleiter
nden *fis* und *cis* sind nun um ein Komma mehr als einen halben Ton
r als die betreffenden Töne der Tonleiter in *c*, wir wollen, um das
rzuheben, dieselben mit $\overline{fis}$ und $\overline{cis}$ bezeichnen. Darnach wird also die
iter in *d*

$$d\ \bar{e}\ \overline{fis}\ g\ \bar{a}\ h\ \overline{cis}_1\ d_1;$$

nthält also vier Töne, welche die Tonleiter von *c* nicht enthält.

Bilden wir ganz ebenso die Tonleiter in *e*-Dur, so erhalten wir folgende
erhältnisse:

$$\tfrac{5}{4};\ \tfrac{45}{32} = \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{25}{24}\cdot\tfrac{81}{80};\ \tfrac{25}{16} = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{25}{24};\ \tfrac{5}{3};\ \tfrac{15}{8};\ \tfrac{25}{12} = 2\cdot\tfrac{25}{24};$$
$$\tfrac{75}{32} = \tfrac{9}{4}\cdot\tfrac{25}{24},$$

in den für die Töne geltenden Bezeichnungen

$$e\ \overline{fis}\ gis\ a\ h\ cis_1\ dis_1\ e_1.$$

Es treten hier neu hinzu die um einen halben Ton erhöhten *gis* und
nd an die Stelle des $\overline{cis}$ in der Tonleiter von *d* das um ein Komma
e cis_1, welches genau um $\frac{1}{2}$ Ton höher ist als c_1.

Die diatonische Durtonleiter von *g* bietet kein neues Intervall, die ein-
in ihr vorkommende Erhöhung ist die von *f* zu $\overline{fis}$, um von der sieben-
ur achten Stufe einen halben Ton herzustellen, dieselbe wird dann

$$g\ \bar{a}\ h\ c_1\ d_1\ e_1\ \overline{fis}_1\ g_1,$$

nthält also aufser den Tönen der Tonleiter in *c* die Tör
in *d*.

Die Tonleiter in *a*-Dur liefert uns dagegen wieder ein
von den bisherigen nur wenig verschiedene Tör

$$\tfrac{5}{3};\ \tfrac{15}{8};\ \tfrac{25}{12} = 2\cdot\tfrac{25}{24};\ \tfrac{20}{9} = \tfrac{9}{4}\cdot\tfrac{80}{81};\ \tfrac{5}{2};$$
$$\tfrac{75}{24} = 3\cdot\tfrac{25}{24};\ \tfrac{10}{3}.$$

Die drei ersten Töne sind a, h, $\overline{cis}_1$, der vierte ist um ein Komma tiefer als das d_1 der Tonleiter in c-Dur, wir bezeichnen ihn mit $\underline{d}_1$; der folgende ist e_1 und dann folgt fis_1, das um genau $\frac{1}{2}$ Ton erhöhte f_1, weiter das genau um $\frac{1}{2}$ Ton erhöhte g_1 oder gis_1, und schliesslich die Oktave von a oder a_1.

In den Tonzeichen wird demnach die Tonleiter in a-Dur

$$a\ h\ cis_1\ \underline{d}_1\ e_1\ fis_1\ gis_1\ a_1.$$

Die Tonleiter von h an liefert uns, wie eine der bisherigen ganz gleiche Berechnung ergibt, die Töne

$$\begin{array}{cccccccc} h & \overline{cis}_1 & dis_1 & e_1 & \overline{fis}_1 & gis_1 & \overline{ais}_1 & h_1 \\ \frac{15}{8}; & 2 \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}; & \frac{9}{4} \cdot \frac{25}{24}; & \frac{5}{2}; & \frac{8}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}; & 3 \cdot \frac{25}{24}; & \frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}; & \frac{15}{4}. \end{array}$$

Sehen wir zunächst von den um ein Komma verschiedenen Tönen ab, so haben wir, um diese Durtonleitern zu bilden, alle Töne, aufser e und h, um einen halben Ton erhöhen müssen. Für diese wird aber auch diese Erhöhung erforderlich, wenn wir die Durtonleiter von cis bilden, wir erhalten dann

$$cis\ dis\ eis\ fis\ gis\ ais\ his\ cis_1.$$

Um also von allen Tönen der diatonischen Durtonleiter von c ebenfalls die diatonischen Durtonleitern zu bilden, bedarf es einer Anzahl neuer Intervalle, wir müssen die Töne teils um ein Komma erhöhen, a und e, teils um ein Komma vertiefen, d; ferner müssen wir sie alle um einen halben Ton, zum Teil auch um einen halben Ton und ein Komma erhöhen.

Stellen wir alle bis jetzt erhaltenen Töne zusammen, so ergibt sich folgende Reihe:

$$\begin{array}{c} \overline{cis}\quad \overline{e}\quad \overline{fis}\quad \overline{a}\ \overline{ais} \\ c\ cis\ d\ dis\ e\ eis\ f\ fis\ g\ gis\ a\ ais\ h\ his, \\ \underline{d} \end{array}$$

es kommen also d, e und a, sowie cis, fis und ais in zwei um ein Komma verschiedenen Werten vor. Wollte man nun in ähnlicher Weise auch von den bisher neu hinzugetretenen Tönen die Durtonleiter bilden, und beschränkte man sich dabei auf die reinen halben Töne, so würden zu den in obiger Zusammenstellung vorkommenden Tönen noch hinzukommen zunächst $\underline{cis}$ und $\underline{dis}$ und aufserdem die doppelt erhöhten Töne $cisis$ und $\overline{cisis}$, von denen der erstere $\frac{25}{24}$ höher ist als cis, der zweite als $\overline{cis}$ und $disis$, $fisis$, $gisis$, $aisis$. Wir müfsten also noch 9 Töne hinzufügen, so dafs wir im ganzen 29 Töne erhielten.

Die so erhaltenen 29 Töne würden indes dem musikalischen Bedürfnisse noch nicht genügen; schon wenn wir die Durtonleiter von f bilden wollen, bedürfen wir eines neuen Intervalles. Wir erhalten dieselbe ganz in der bisherigen Weise, indem wir die Tonzahlen der c-Durreihe mit $\frac{4}{3}$ multiplicieren, dieselbe wird dann

$$\frac{4}{3};\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{3};\ \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81};\ 2;\ \frac{20}{9} = \frac{9}{4} \cdot \frac{80}{81};\ \frac{10}{4}.$$

Mit Ausnahme des vierten Tones finden sich diese Töne bereits in den ühern Tonleitern, sie sind

$$f\ g\ a\ c_1\ \underline{d}_1\ e_1;$$

r vierte ist indes nicht nur neu, sondern auch in ganz anderer Weise bildet, nämlich durch Vertiefung eines Tones $h = \frac{15}{8}$ um einen halben n und ein Komma. Die Vertiefung eines Tones um einen halben Ton rd in der Musik dadurch bezeichnet, dafs man vor denselben ein *b* setzt, Namen der vertieften Töne erhält man, indem man an denjenigen des nes, zu welchem die Vertiefung gehört, die Silbe *es* oder den Buchstaben hängt; nur die Vertiefung von *h* führt den Namen *b*. Das in die *f*-Durleiter eintretende *b* ist, wie wir sahen, um einen halben Ton und ein mma tiefer als *h*, wir müssen deshalb diesen Ton als $\underline{b}$ bezeichnen.

Ebenso wie in der Durtonleiter von *f* für *h*, so erhalten wir für alle rigen Töne vertiefte Töne, wenn wir in ähnlicher Weise wie durch den rdreiklang eine Tonleiter ableiten durch Anwendung des Molldreiklangs t der kleinen Terz. Bilden wir die drei Molldreiklänge von Grundton, int und Unterquint, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{lllll} 1) \text{ aus der Unterquint} & \frac{2}{3} \cdots\cdots \frac{2}{3}, & \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}, & \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} & = \frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ 1 \\ 2) \text{ aus dem Grundton} & 1 \cdots\cdots 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{2} & = 1,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{2} \\ 3) \text{ aus der Quint} & \frac{3}{2} \cdots\cdots \frac{3}{2}, & \frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}, & \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} & = \frac{3}{2},\ \frac{9}{5},\ \frac{9}{4} \end{array}\right.$$

er wenn wir die Verhältnisse der Gröfse nach ordnen und wiederum von n nicht zwischen 1 — 2 fallenden Tönen die entsprechenden Oktaven hmen

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{6}{5},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5},\ 2.$$

Von diesen Intervallen ist das siebente

$$\frac{9}{5} = \frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = b$$

d das sechste

$$\frac{8}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25},$$

so die um einen halben Ton vertiefte Sext, welche mit *as* bezeichnet wird.

Nach den musikalischen Zeichen ist somit die Molltonleiter

c d es f g as b c

d das Verhältnis der einzelnen Töne darin

$$\frac{9}{8},\ \frac{16}{15},\ \frac{10}{9},\ \frac{9}{8},\ \frac{16}{15},\ \frac{9}{8},\ \frac{10}{9},$$

n der zweiten zur dritten und von der fünften zur sechsten Stufe findet h ein halber Ton, die übrigen Intervalle sind ganze Töne.

Diese Tonleiter, welche aus dem Molldreiklange entsteht wie die Durleiter aus dem Durdreiklange, ist die diatonische Molltonleiter. Es ist och zu bemerken, dafs man die Molltonleiter häufig auch so bildet, dafs n von der Oberquint den Durdreiklang nimmt, wodurch in die Tonleiter tt *b* der Ton *h* eintritt. Dann wendet man aufsteigend statt *as* auch den n *a* an, absteigend pflegt man dann aber doch für *h* den Ton *b* zu men, so dafs dann die Tonleiter wird

aufsteigend *c d es f g a h c*
absteigend *c d es f g as b c*

e wir sie oben hinschrieben.

Bilden wir nun auch hier von den verschiedenen Tönen der Molltonleiter in c die Molltonleitern, so erhalten wir aufser den angegebenen noch weitere vertiefte Töne. Die Molltonleiter von d verlangt von neuen Intervallen nur $\bar{f}$ und $\bar{c}_1$, sie wird nach unserer Bezeichnung

$$d\ \bar{e}\ \bar{f}\ g\ \bar{a}\ b\ \bar{c}_1\ d_1.$$

Die Molltonleiter von es wird

$$\frac{6}{5},\ \frac{4}{3}\cdot\frac{81}{80},\ \frac{3}{2}\cdot\frac{24}{25},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5},\ 2\cdot\frac{24}{25},\ \frac{9}{4}\cdot\frac{24}{25},$$

oder in Zeichen

$$es\ \bar{f}\ ges\ as\ b\ ces\ des;$$

es treten als neue Vertiefungen hinzu ges, ces und des.

Die Molltonleiter von f enthält folgende Töne

$$\begin{matrix} \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{8}{5} & \frac{16}{9} & 2 & \frac{32}{15} & \frac{36}{15} & \frac{8}{3} \\ f & g & as & \underline{b} & c_1 & \underline{des}_1 & es_1 & f_1; \end{matrix}$$

es tritt also hier ein gegen das des der e-Molltonleiter um ein Komma vertieftes des auf. In der Tonleiter von g tritt kein neues Intervall auf, sie ist

$$g\ \bar{a}\ b\ c_1\ d_1\ es_1\ \bar{f}_1\ g_1$$

und schliefslich wird die Tonleiter in as-Moll,

$$\begin{matrix} \frac{8}{5} & \frac{9}{5} & 2\cdot\frac{24}{25} & \frac{9}{4}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{80}{81} & \frac{12}{5} & \frac{8}{3}\cdot\frac{24}{25} & 3\cdot\frac{24}{25} & \frac{16}{5}, \\ as & b & ces_1 & \underline{des}_1 & cs_1. & fes_1 & ges_1 & as_1 \end{matrix}$$

sie besteht also aus allen vertieften Tönen, und zwar mit Ausnahme von $\underline{des}_1$ aus gerade um $\frac{1}{2}$ Ton vertieften Tönen. Stellen wir die bis jetzt durch die Molltonleitern erhaltenen neuen Intervalle zusammen, so sind dieselben

$$\begin{matrix} \bar{c} & ces & des & es & \bar{f} & fes & ges & as & b \\ & & \underline{des} & & & & & & \underline{b}, \end{matrix}$$

wir erhalten also aufser den sieben gerade um einen halben Ton vertieften Tönen zwei, die um einen halben Ton und ein Komma vertieft sind. Die Tonleiter in b-Moll würde zu diesen noch $\overline{as}$ hinzufügen, so dafs wir auch drei Arten von vertieften halben Tönen zu unterscheiden haben, solche, welche genau um einen halben Ton unserer Töne der c-Durtonleiter vertieft sind, und solche, welche ein Komma mehr oder ein Komma weniger vertieft sind. Eine weitere Fortsetzung in der Bildung dieser Tonleitern würde uns nun, wenn wir uns auch hier auf die genau um $\frac{1}{2}$ Ton vertieften Töne beschränken, zu den oben hingeschriebenen Tönen noch liefern $\overline{ces}$, $\bar{es}$, $\overline{fes}$ und aufserdem die doppelt vertieften Töne $ceses = \frac{24}{25}\cdot\frac{24}{25}\cdot c$, $deses$ und $\underline{deses}$, $eses$, $geses$, $ases$, bb und $\underline{bb}$, so dafs wir also durch die Bildung der Molltonleitern im ganzen zu den frühern noch 23 neue Intervalle hinzubekämen. Unser Tonsystem, oder die vollständige Tonleiter einer Oktave würde somit aus 52 Tönen, oder wenn wir die Oktave als Schlufston hinzunehmen, aus 53 Tönen bestehen. Das Tonsystem vom tiefsten zum höchsten in den gewählten Zeichen würde sein:

$c \; \overline{cis} \; \overline{cisis} \qquad \overline{es} \; \bar{e} \; \overline{eis} \; \overline{fes}$

$c \; cis \; cisis \; deses \; des \; d \; dis \; disis \; eses \; es \; e \; eis \; fes$

$\underline{deses} \; \underline{des} \; \underline{d} \; \underline{dis}$

$\bar{f} \; \overline{fis} \; \overline{fisis} \qquad \overline{as} \; \bar{a} \; \overline{ais}$

$f \; fis \; fisis \; geses \; ges \; g \; gis \; gisis \; ases \; as \; a \; ais \; aisis$

$\overline{ces}_1$

$bb \; b \; h \; his \; ceses_1 \; ces_1 \; c.$

$\underline{bb} \; \underline{b}$

Die Schwingungszahlen der Hauptreihe, jedoch ohne die doppelt ver-
ften und erhöhten Töne, gibt folgende Zusammenstellung:

	c	1	Prim
#	*c* = *cis*	$\frac{25}{24}$	übermäſsige Prim
b	*d* = *des*	$\frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{27}{25}$	kleine Sekunde
	d	$\frac{9}{8}$	groſse Sekunde
#	*d* = *dis*	$\frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{64}$	übermäſsige Sekunde
b	*e* = *es*	$\frac{6}{5}$	kleine Terz
	e =	$\frac{5}{4}$	groſse Terz
#	*e* = *cis*	$\frac{5}{4} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{96}$	übermäſsige Terz
b	*f* = *fcs*	$\frac{4}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{96}{75} = \frac{32}{25}$	verminderte Quarte
	f	$\frac{4}{3}$	reine Quarte
#	*f* = *fis*	$\frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{100}{72} = \frac{25}{18}$	übermäſsige Quarte
b	*g* = *ges*	$\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{72}{50} = \frac{36}{25}$	verminderte Quinte
	g	$\frac{3}{2}$	reine Quinte
#	*g* = *gis*	$\frac{3}{2} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{48} = \frac{25}{16}$	übermäſsige Quinte
b	*a* = *as*	$\frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{120}{75} = \frac{8}{5}$	kleine Sexte
	a =	$\frac{5}{3}$	groſse Sexte
#	*a* = *ais*	$\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{72}$	übermäſsige Sexte
b	*h* = *b*	$\frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{360}{200} = \frac{9}{5}$	kleine Septime
	h	$\frac{15}{8}$	groſse Septime
#	*h* = *his*	$\frac{15}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{375}{192} = \frac{125}{64}$	übermäſsige Septime
b	*c* = *ces*	$2 \cdot \frac{24}{25} = \frac{48}{25}$	verminderte Oktave
	c_1	2	reine Oktave.

Die doppelt erhöhten oder doppelt vertieften Töne erhält man aus
ser Tabelle, indem man die entsprechenden einfach erhöhten oder ver-
ften Töne mit $\frac{25}{24}$ respektive $\frac{24}{25}$ multipliciert, die Töne der obern Reihe
rch Multiplikation der Töne der Hauptreihe mit $\frac{81}{80}$, die Töne der untern
ihe durch Multiplikation mit $\frac{80}{81}$[1]).

[1]) Über die Berechnung der Tonleiter sehe man auch: *Helmholtz*, Lehre
den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 418 ff. *G. Schubring:* Schlö-
ch, Zeitschrift für Mathematik und Physik. Supplementheft 1868. Gegenüber
ger Berechnung der Tonleiter aus den einfachen konsonierenden Accorden hat
nu gezeigt (Cornu und Mercadier. Comptes Rendus T. LXVIII. p. 301 u. 424.
LXX. p. 1168. T. LXXII. p. 178. T. LXXVI. p. 431), daſs im melodischen
ge die Terz und die von ihr abgeleiteten Intervalle anders und zwar höher
ommen werden als in der harmonischen Musik. Bei dem Fortschreiten in
Melodie soll die groſse Terz um ein Komma höher genommen werden, so
also die melodische Tonleiter eine andere wäre als die harmonische, in der
ik somit zwei verschiedene Tonleitern neben einander beständen.

§ 158.

Die musikalische Temperatur. Die in dem vorigen Paragraphen berechnete Tonleiter würde wegen ihrer zu grofsen Reichhaltigkeit im Gebrauche äufserst unbequem, ja sie würde in der Musik geradezu unbrauchbar sein, da die vielen kleinen Intervalle auf den verschiedensten Instrumenten durchaus nicht darzustellen wären. Zudem würde das Beibehalten aller jener Intervalle auch überflüssig sein, da selbst musikalisch gebildete Ohren kleine Unreinheiten eines Intervalls in einem Accorde nicht mehr wahrzunehmen imstande sind. Unsere jetzige Musik vereinfacht daher das Tonsystem sehr bedeutend, anstatt 52 Töne wendet sie in der Tonleiter nur 12 Töne an. Zunächst läfst sie auf allen Instrumenten mit festen Tönen alle doppelt erhöhten und doppelt vertieften Töne fort, und ersetzt sie durch die nächstliegenden ganzen Töne; so setzt sie

cisis = *d*, *deses* = *c*, *disis* = *e*, *eses* = *d* etc.

Der Fehler, welcher dadurch begangen wird, ist zwischen *c* und *d*, *f* und *g*, *a* und *h* $= \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$, indem

$$\frac{d}{cisis} = \frac{deses}{c} = \frac{g}{fisis} \ldots = \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$$

ist, zwischen *d* und *e*, sowie zwischen *g* und *a* beträgt er $\frac{128}{125}$.

Ferner verzichtet die Musik nicht nur auf die verschieden erhöhten Töne *fis* und $\overline{fis}$ etc., sondern sie unterscheidet in der praktischen Ausführung auch nicht die einander nahe liegenden halben erhöhten und vertieften Töne, wie *cis* und *des*, *dis* und *es*. Die zwischen diesen Tönen vorhandenen Intervalle sind

$$\frac{des}{cis} = \frac{27}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{81}{80} \cdot \frac{128}{125} \qquad \frac{es}{dis} = \frac{6}{5} \cdot \frac{64}{75} = \frac{128}{125}$$

$$\frac{fes}{e} = \frac{32}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{128}{125} \qquad \frac{f}{eis} = \frac{4}{3} \cdot \frac{96}{125} = \frac{128}{125}$$

$$\frac{ges}{fis} = \frac{b}{ais} = \frac{81}{80} \cdot \frac{128}{125} \qquad \frac{ces}{h} = \frac{c}{his} = \frac{128}{125}.$$

Die hierdurch begangenen Fehler, wenn man die Töne als gleich setzt, also als *des* den Ton *cis* u. s. w. gebraucht, würden also ebenso grofs sein, wie die durch Vernachlässigung der doppelt erhöhten oder vertieften. Würde man nun aber die eine Reihe der Töne, etwa die erhöhten, rein erhalten, so würden die Unreinheiten für die andere Reihe so stark werden, dafs dieselbe ganz unbrauchbar würde; um das zu vermeiden läfst man keinen der Töne rein, sondern setzt anstatt des reinen *cis* oder *des* einen zwischen beiden liegenden Ton, dessen Wert wir sofort ableiten werden.

Schliefslich unterscheidet man auch nicht die um ein Komma verschiedenen Töne *c* und $\bar{c}$ u. s. f., sondern behält nur die Töne *c*, *d*, *e* etc. bei, so dafs damit das Tonsystem auf 12 Töne reduciert wird, welche alle die von uns abgeleiteten 52 repräsentieren.

Damit ist nun aber auch eine Temperatur der Töne der *c*-Durtonleiter notwendig, da sonst die Unreinheit der doppelt erhöhten und vertieften Töne so grofs wäre, dafs man alle sie enthaltenden Tonarten absolut nicht gebrauchen könnte.

Will man nur diese 12 Töne beibehalten, so ist die Temperatur der
.upttöne der Tonleiter noch aus einem andern Grunde erforderlich. Es
nämlich in der Musik notwendig, von einem Tone zu irgend einem an-
rn auf verschiedenen Wegen, das heifst durch Fortschreiten nach ver-
iedenen Intervallen zu gelangen. So gelangt man, wenn man von irgend
iem Grundtone nach Oktaven fortschreitet, immer zu den höheren Oktaven

$$\begin{matrix} c & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128. \end{matrix}$$

So soll man aber auch durch 12 reine Quinten von c aus zu einer
hern Oktave gelangen

$$c \; g \; d_1 \; a_1 \; e_2 \; h_2 \; fis_3 \; cis_4 \; gis_4 \; dis_5 \; ais_5 \; f_6 \; c_7$$

d das c, zu welchem man gelangt, mufs das durch Oktaven erreichte
sein.

Berechnet man nun aber c_7 durch 12 reine Quinten, so findet man
n Wert

$$c_7 = \frac{531441}{4096},$$

ihrend nach Oktaven

$$c_7 = \frac{524288}{4096} = 128$$

. Man findet also beim Fortschreiten nach Quinten c_7 im Verhältnis von

$$\frac{531441}{524288} = \frac{129{,}7}{128},$$

ler nahezu im Verhältnis von $\frac{65}{64}$ zu hoch.

Gleiches zeigt sich bei andern Fortschreitungen, und zwar in noch er-
ihtem Mafse; so sollte ein Fortschreiten durch drei grofse Terzen

$$c \; e \; gis \; c_1$$

e nächst höhere Oktave liefern; diese Fortschreitung ergibt indessen

$$1 \; \tfrac{5}{4} \; \tfrac{25}{16} \; \tfrac{125}{64},$$

statt $c_1 = \frac{128}{64}$ erhalten wir demnach einen um das Komma $\frac{125}{128}$ zu
edrigen Ton.

Schreiten wir demnach nach reinen Intervallen fort, so verlieren die
heren Töne ihre Reinheit gegen den Grundton, man gelangt niemals zu
ier reinen Oktave, will man aber die Intervalle gegen den Grundton fest-
lten, so werden die einzelnen Intervalle unrein. Dasselbe ist bei auf- und
steigender Bewegung und Benutzung verschiedener Intervalle der Fall.
gibt Chladni in seiner Akustik folgendes Beispiel. Bei der Tonfolge

$$g \; c \; f \; d \; g \; c$$

at man zunächst eine reine Quint abwärts, dann eine Quart aufwärts,
e kleine Terz abwärts, eine Quarte aufwärts und schliefslich eine Quinte
wärts. Das Verhältnis der Töne zum Grundton c ist

$$\tfrac{3}{2} \; 1 \; \tfrac{4}{3} \; \tfrac{9}{8} \; \tfrac{3}{2} \; 1.$$

Gehen wir dagegen nach reinen Intervallen, so werden die entsprechenden Zahlen

$$\tfrac{3}{2};\ 1;\ \tfrac{4}{3};\ \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{5}{6} = \tfrac{10}{9};\ \tfrac{10}{9}\cdot\tfrac{4}{3} = \tfrac{40}{27};\ \tfrac{40}{27}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{80}{81}.$$

Wir gelangen also weder zu dem reinen *g* zurück, von dem wir ausgingen, noch zum Grundtone. Eine weitere Fortsetzung solcher Fortschreitungen nach reinen Intervallen würde die nachkommenden immer weiter von den reinen Tönen entfernen. Deshalb und besonders weil die Fortschreitungen nach verschiedenen Intervallen ganz verschiedene Abweichungen von den reinen Tonverhältnissen, so z. B. die reinen Quinten zu hohe, die reinen Terzen zu tiefe Töne geben, können in der Musik, wenn man das Tonsystem auf 12 Töne beschränkt, die reinen Intervalle gar nicht angewandt werden, selbst wenn man auf allen Instrumenten die Töne alle ganz rein hervorbringen könnte. Man mufs daher alle Töne modificieren, oder wie es in der Musik heifst, temperieren.

Die Temperatur kann nun nach verschiedenen Principien hergestellt werden; man nimmt entweder einige Intervalle rein und verteilt die andern Intervalle, so dafs man dadurch bei den verschiedenen Fortschreitungen immer zu denselben Tönen kommt. So sind z. B. in der Kirnbergerschen Temperatur neun Quinten ganz rein, drei dagegen *fis* — *cis*, *d* — *a*, *a* — *e* unrein, und zwar ist der Fehler, der beim Fortschreiten durch 12 Quinten entsteht, auf diese drei Quinten verteilt.

Indes sind die sogenannten ungleichschwebenden Temperaturen zu verwerfen, da dadurch auf Kosten einiger Intervalle die andern um so unreiner werden.

Die in der Musik gebräuchliche Temperatur verändert alle Intervalle aufser den Oktaven; diese müssen rein sein, da die Oktaven dem Einklange am nächsten stehen, deshalb ebenso, wie eine Unreinheit des Einklanges, auch die der Oktaven am leichtesten gehört wird und am störendsten ist. Die zwölf innerhalb einer Oktave liegenden Töne werden dann alle als gleichweit von einander abstehend betrachtet, so dafs das Tonverhältnis zweier auf einander folgender Töne konstant oder

$$\frac{cis}{c} = \frac{d}{cis} = \frac{dis}{d} = \frac{e}{dis} = \frac{f}{e} \cdots\cdots = \frac{c_1}{h} = i$$

gesetzt wird.

Dieses Intervall i wird dann als halber Ton betrachtet, dessen Wert sich daraus ergibt, dafs

$$cis = i\cdot c,\ d = i\cdot cis = i^2\cdot c \cdots\cdots c_1 = i\cdot h = i^{12}\cdot c.$$

Setzen wir nun $c = 1$, so wird

$$c_1 = 2 = i^{12}$$

$$i = \sqrt[12]{2} = 1{,}059\,46.$$

Nach der gleichschwebenden Temperatur erhalten wir darnach statt der reinen Schwingungsverhältnisse folgende, zusammengestellt mit den reinen Schwingungsverhältnissen und dem Fehler der temperierten gegen die reinen Töne. Letztere sind in Form von Decimalbrüchen gegeben, deren Zähler jedesmal die temperierte, deren Nenner die reine Schwingungszahl ist. Ist demnach in der Rubrik Fehler des temperierten Tones die Zahl

größer als 1, so ist der temperierte Ton zu hoch, ist die Zahl ein echter Bruch, so ist der temperierte Ton zu tief.

Name des Tones	Reines Schwingungsverhältnis	Temperiertes Schwingungsverhältnis	Fehler des temperierten Tones
c	$1 = 1$	1	1
cis	$\frac{25}{24} = 1{,}041\,66$	. . . . 1,059 46	1,017 08
des	$\frac{27}{25} = 1{,}080\,00$		0,980 98
d	$\frac{9}{8} = 1{,}125\,00$	. . . . 1,122 46	0,997 74
dis	$\frac{75}{64} = 1{,}171\,87$	. . . . 1,189 21	1,014 79
es	$\frac{6}{5} = 1{,}200\,00$		0,991 01
e	$\frac{5}{4} = 1{,}250\,00$	. . . . 1,259 92	1,010 26
fes	$\frac{32}{25} = 1{,}280\,00$		0,984 33
eis . . .	$\frac{125}{96} = 1{,}302\,08$	. . . . . 1,334 84	1,025 16
f	$\frac{4}{3} = 1{,}333\,33$		1,001 13
fis	$\frac{25}{18} = 1{,}388\,89$	. . . . 1,414 21	1,018,23
ges	$\frac{36}{25} = 1{,}440\,00$		0,982 09
g	$\frac{3}{2} = 1{,}500\,00$	. . . . 1,498 31	0,998 88
gis	$\frac{25}{16} = 1{,}562\,50$	. . . . 1,587 40	1,015 93
as	$\frac{8}{5} = 1{,}600\,00$		0,992 12
a	$\frac{5}{3} = 1{,}666\,66$	. . . . 1,681 79	1,009 07
ais	$\frac{125}{72} = 1{,}736\,11$	. . . . 1,781 80	1,026 31
b	$\frac{9}{5} = 1{,}800\,00$		0,989 89
h	$\frac{15}{8} = 1{,}875\,00$	. . . . 1,887 75	1,006 80
ces	$\frac{48}{25} = 1{,}920\,00$		0,983 20
his	$\frac{125}{64} = 1{,}953\,13$	. . . . 2,000 00	1,024 07
c_1	$2 = 2{,}000\,00$		1

Wie man sieht, weichen die temperierten Verhältnisse von den reinen stellenweise nicht unbeträchtlich ab; in demselben und zum Teil noch höherem Maße weichen dieselben von den reinen doppelt erhöhten und doppelt vertieften ab, an deren Stelle die temperierten Töne gesetzt werden. So wird das temperierte *d* für *eses* eingesetzt, obwohl die Schwingungszahl des temperierten *d* nur 0,973 96 des reinen *eses* beträgt. Wenn nun auch das Ohr in Accorden sehr kleine Unreinheiten nicht mehr wahrnehmen kann, so sind die oben berechneten doch zu groß, als daß nicht der Wohlklang der Accorde dadurch wesentlich beeinträchtigt werden sollte. Deshalb ist es durchaus wünschenswert, daß an Stelle der gleichschwebenden Temperatur eine andere eingeführt werden könne, welche diese Unreinheiten nicht zeigt. Die Möglichkeit dazu ist aber nur gegeben, wenn man das Tonsystem erweitert, und statt 12 eine größere Zahl von Tönen beibehält. Es hat das eigentlich nur Schwierigkeit für die Instrumente mit festen Tönen, da z. B. an den Streichinstrumenten die verschiedenen Töne doch verschieden gegriffen werden, *es* anders als *dis* u. s. f. Für ein Instrument mit festen Tönen hat Helmholtz[1]) und später Appunn[2]) vor

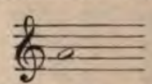
[1]) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 483 ff.

[2]) *Appunn*, die Beschreibung des Appunnschen Harmoniums gibt *Schubring* in Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik. Supplementheft 1868. p. 124 ff.

kurzem eine Tonreihe gegeben und praktisch ausgeführt, welche fast den reinen Tönen gleichkommt; die Tonreihe von Helmholtz hat 30 Töne, die von Appunn 36, der Wohlklang der Accorde soll auf diesen Instrumenten, wie zu erwarten stand, viel höher sein, als auf den temperierten. Ob in der Instrumentalmusik eine ähnliche Tonreihe möglich ist, müssen die Musiker entscheiden.

§ 159.

Absolute Schwingungszahl der Töne. Bisher haben wir das Verhältnis der Töne zu einander ins Auge gefaſst. Da wir vorhin sahen, daſs das Verhältnis der musikalischen Töne ganz dasselbe ist für die hohen und tiefen Regionen, so ist es natürlich einerlei, von welchem Tone man ausgeht, welche Schwingungszahl man als diejenige des Grundtones annimmt. Um indes die verschiedenen Instrumente mit einander stimmen zu können und überhaupt durch die oben erwähnten Zeichen bestimmte Töne zu bezeichnen, hat man für einen bestimmten Ton, der ungefähr in der Mitte der in der Musik gebräuchlichen Töne liegt, eine bestimmte Höhe angenommen. Es ist der als eingestrichenes *a* bezeichnete Ton



Von diesem Tone aus werden die übrigen Töne bestimmt. Der um eine Sext tiefere Ton ist das eingestrichene *c*. Die in der Musik meist gebrauchten Töne liegen teils höher, teils tiefer als dieses *c*, und zwar steigt die Musik drei Oktaven hinab und vier hinauf. Die unterhalb diesen *c* liegende Oktave heiſst die kleine Oktave, die in ihr liegenden Töne werden mit den kleinen Buchstaben des Alphabets bezeichnet; die nächst tiefere mit den groſsen Buchstaben bezeichnete, ist die groſse Oktave und unter dieser die Kontraoktave, welche man durch groſse Buchstaben mit einem kleinen Querstrich darunter bezeichnet. Die höhern Oktaven werden mit den kleinen Buchstaben des Alphabets bezeichnet und zur Angabe ihrer Höhe mit kleinen Querstrichen darüber versehen. Die auf die kleine Oktave folgende ist die eingestrichene, die nächsthöhere die zweigestrichene u. s. f. Wir wollen indes unsere bisherige Bezeichnungsweise beibehalten und die eingestrichene Oktave durch eine kleine 1, die zweigestrichene durch eine kleine 2 etc. unten rechts an den den Ton angebenden Buchstaben bezeichnen. Die in der Musik angewandten Töne liegen, nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, zwischen den Oktaven

$$\underline{C}\quad C\quad c\quad \overline{c}\quad \overline{\overline{c}}\quad \overline{\overline{\overline{c}}}\quad \overline{\overline{\overline{\overline{c}}}}$$

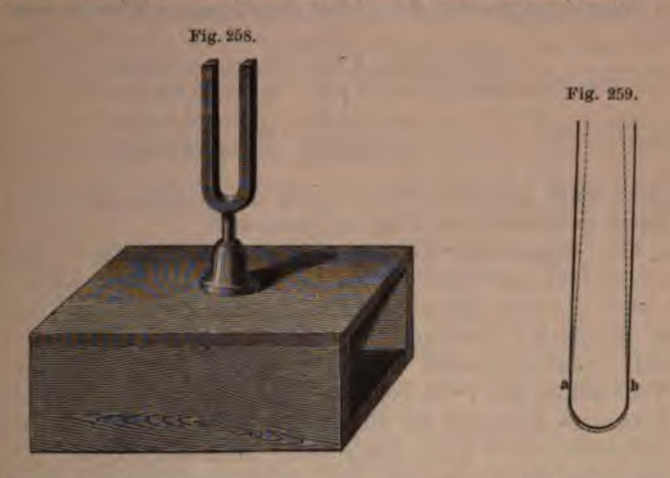
Nur wenige Instrumente gehen über diese sieben Oktaven hinaus.

Um den Ton des eingestrichenen a_1, nach welchem die Stimmung geregelt wird, zu bestimmen und zu fixieren, hat man die Stimmgabel konstruiert. Dieselbe besteht aus einem gabelförmig gebogenen Stahlstabe, an welchem unten an der Biegung ein Stäbchen angebracht ist (Fig. 258). Die Gabel wird dadurch zum Tönen gebracht, daſs man sie mit einer der Zinken an einen festen Körper anschlägt, sie schwingt dann so, wie Fig. 25

zeigt, mit zwei Schwingungsknoten in der Nähe der Biegung, wie ein an iden Enden freier, in transversale Schwingungen versetzter Stab. Die iden Zinken schwingen zugleich nach innen und die Biegung nach unten, nn die Zinken nach aufsen und die Biegung nach oben hin. Die Töne r Stimmgabel allein sind sehr schwach; um sie zu verstärken, setzt man auf einen Tisch, der dann, wie wir später sehen werden, durch Resonanz

Fig. 258.

Fig. 259.



n Ton verstärkt. Gröfsere Stimmgabeln, welche nicht a_1, sondern c_1 ler c geben, sind meist auf besonderen Resonanzkästchen befestigt, in denen e Luftsäule für sich schwingend denselben Ton gibt als die Gabel und shalb durch ihre Schwingungen den Ton ganz bedeutend verstärkt. Man reicht solche Gabeln mit einem Bafsbogen an, den man parallel der hwingungsebene an den Zinken der Gabel vorüberführt.

Messungen der Schwingungszahl des durch die a_1-Stimmgabel bemmten Tones haben nun ergeben, dafs dieser Ton keineswegs überall die iche Schwingungszahl hat. Fischer fand im Jahre 1822, dafs die Schwinngszahl des Tones a_1 im Orchester des Berliner Theaters gleich 437 war; jenige des Tones a_1 des Orchesters der grofsen Oper zu Paris war 431, n Théatre Feydeau = 428 und des Théatre Italien = 424 Schwingungen der Sekunde[1]).

Scheibler[2]) fand 1833 den Ton von fünf Pariser a_1-Gabeln von 426,7 s 440,7, von einer Gabel des Berliner Orchesters 441,62 und von sechs beln des Wiener Orchesters zwischen 433,66 und 444,87 Schwingungen.

Scheibler machte darauf 1834 auf der Versammlung deutscher Naturscher und Ärzte zu Stuttgart den Vorschlag, den Ton a_1 zu 440 Schwinngen festzusetzen, indes ist die Stimmung der Orchester darnach nicht rmiert worden und sie blieb nach wie vor schwankend. Neuerdings[3]) ist n in Frankreich bestimmt worden, dafs der Ton a_1 zu 435 Schwingungen setzt werden solle, um dort überall eine gleichmäfsige Stimmung her-

[1]) *Fischer* in den Denkschriften der Berliner Akademie für 1824.
[2]) Nach der Angabe von *Röber*. Dove, Repertorium. III.
[3]) Nach dem Moniteur universel 25. février 1859.

zubringen, und seitdem ist auch bei einer grofsen Anzahl deutscher Orc[illegible] dieselbe Stimmung angenommen worden.

Gehen wir von dieser Schwingungszahl aus, so wird darnach

$$c_1 = \frac{a_1}{1,681\,79} = \frac{435}{1,681\,79} = 258,65.$$

Die Schwingungszahlen der vorhin angegebenen Töne werden da[illegible] folgende

$$\begin{array}{rlrl} \underline{C} = c_{-2} = & 32,33 & c_2 = & 517,30 \\ C = c_{-1} = & 64,66 & c_3 = & 1034,60 \\ c = & 129,32 & c_4 = & 2069,20 \\ c_1 = & 258,65 & c_5 = & 4138,40 \end{array}$$

wonach man leicht imstande sein wird, die Schwingungszahlen aller ü[illegible] in der Musik gebräuchlichen Töne zu berechnen.

Die hier angegebenen Töne sind indes nicht die überhaupt hö[illegible] Töne, sowohl Töne unterhalb c_{-2} als oberhalb c_5 sind noch hörbar. [illegible] grölsern Orgeln findet sich noch eine ganze Oktave tieferer Töne bi[illegible] c_{-3}, dem Subkontra C, welches 16 Schwingungen in der Sekunde vol[illegible] und Savart behauptete nach seinen Versuchen[1]), dafs bei hinreic[illegible] Stärke Töne selbst bei 7—8 Schwingungen in der Sekunde hörbar [illegible] Savart liefs einen Eisenstab um eine horizontale Axe sich drehen und [illegible] ihn so auf, dafs er bei jeder Umdrehung durch einen Spalt eines B[illegible] schlug und dabei die Ränder berührte. Jeder Durchtritt gab einen he[illegible] Schlag und war die Umdrehungsgeschwindigkeit so grofs, dafs der Eis[illegible] in der Sekunde 7—8 mal die Spalte passierte, so hörte man einen tiefen und lauten Ton. Savart glaubte, dafs dieser Ton Folge der Stöfse des Eisenstabes in der Brettspalte sei.

Schon Despretz[2]) indessen widersprach dem und bemerkte dag[illegible] dafs, wenn Savarts Schlufs richtig sei, die doppelte Umdrehungsgeschwi[illegible] keit oder die Anwendung zweier Spalten auch die höhere Oktave des [illegible] gehörten Tones hätte erzeugen müssen. Der Versuch ergibt aber eine[illegible] dem vorigen nur wenig verschiedenen Ton, so dafs der Ton sich nich[illegible] den einzelnen Schlägen zusammengesetzt haben kann.

Helmholtz[3]) wies nach, dafs die Methode von Savart zur Untersu[illegible] dieser Frage ganz ungeeignet sei, da die Dauer jedes einzelnen St[illegible] gegen die Zwischenzeit zweier Stöfse, also die Schwingungsdauer der [illegible] sie erzeugten Schwingungen zu kurz sei. Es müssen deshalb die Obe[illegible] sehr stark entwickelt sein, so dafs die tiefsten gehörten Töne nicht [illegible] Obertöne sind. Er hat deshalb die Frage nach den tiefsten Tönen w[illegible] aufgenommen, und gelangt zu einem wesentlich andern Resultat, er f[illegible] dafs die Tonempfindung erst beginnt bei etwa 30 Schwingungen und erst bei etwa 40 Schwingungen der Ton eine bestimmte musikalische [illegible] hat. Helmholtz schlofs dieses besonders aus einem Versuch mit ein[illegible] der Mitte belasteten Saite, welche infolge der Belastung fast nu[illegible]

---

[1]) *Savart*, Annales de chim. et de phys. Tome XLVII. Poggend. Ann[illegible]

[2]) *Despretz*, Comptes rendus de l'Académ. de France. Tome XX. Pog[illegible] Ann. Bd. LXV.

[3]) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 288. ff.

gsamsten Schwingungen, bei denen die Saite der ganzen Länge nach wingt, vollführt. Die Saite wurde auf einen Resonanzkasten ausgespannt, nur eine Öffnung hatte, und diese konnte mit dem Gehörgange verden werden, so dafs die Luft des Resonanzkastens nur in das Ohr hin weichen konnte. Die Töne einer Saite von gewöhnlicher Höhe sind unter sen Umständen von unerträglicher Stärke. Dagegen war die Tonempfindung, die Saite 37 Schwingungen machte, nur mehr schwach, und hatte auch se etwas Knarrendes, was darauf schliefsen läfst, dafs das Ohr anfing, einzelnen Stöfse zu fühlen. Bei 31 Schwingungen war kaum noch etwas hören.

Später hat Helmholtz[1]) dasselbe mit zwei von König hergestellten mmgabeln gezeigt, deren Stimmung durch an den Zinken verschiebbare wichte geändert werden konnte. Die Zahl der jeder Lage des Gewichts sprechenden Schwingungen ist auf einer an den Zinken angebrachten ala angegeben; die eine Gabel gibt in der Sekunde je nach der Lage des wichtes 25—35, die andere 35—61 Schwingungen. Die Gewichte haben Form von Platten. Bringt man das Ohr ganz nahe an diese Platten, hört man die tiefen Töne sehr gut. Bei 30 Schwingungen hört man n noch deutlich einen schwachen dröhnenden Ton, bei 28 kaum noch Spur, obgleich man leicht Oscillationen von 9^{mm} Amplitude in dieser ise ganz dicht vor dem Ohr erzeugen kann.

Preyer[2]) glaubt indes die untere Grenze der Hörbarkeit doch noch erheb tiefer setzen zu können. Er nahm mit solchen Stimmgabeln noch 24 Schwingen als Ton wahr und glaubt mit schwingenden belasteten Zungen noch Schwingungen als Ton empfunden zu haben. Gegen die letztern Verle von Preyer wendet aber Helmholtz[3]) ein, dafs solche belastete Zungen jeder ihrer Schwingungen dem Befestigungspunkte zwei longitudinale se erteilen und zwar jedesmal wenn sie mit dem Maximum der Gewindigkeit die Gleichgewichtslage passieren, er sieht es deshalb noch t als bewiesen an, dafs unser Ohr erheblich unter der Zahl 30 liegende wingungen als Ton empfinden kann.

Darnach würde also das c_{-2} der tiefste musikalische Ton sein, und ganze Subkontraoktave der Orgel keine eigentlichen Töne, sondern nur n ein Geräusch geben, indem das Ohr die einzelnen Stöfse fühlt. Es in der That für diese Töne selbst einem musikalisch gebildeten Ohre t möglich, eine bestimmte Tonhöhe anzugeben.

Nach oben hin ist die Reihe der hörbaren Töne weniger begrenzt, indes et sich hier, dafs verschiedene Personen für solche Töne verschieden findlich sind, und selbst eine Person mit dem einen Ohr oft höhere e wahrnehmen kann als mit dem andern. So gibt Brewster an, dafs das Heimchenzirpen nur mit einem Ohre hörte, während für gewöhnliche e beide Ohren gleich empfindlich waren[4]).

Sind die Töne hinreichend stark, so können noch sehr hohe Töne ge t werden; so brachte Savart[5]) mit seinem gezahnten Rade noch deut-

[1]) *Helmholtz*, Tonempfindungen III. Ausgabe. p. 279.
[2]) *Preyer*, Physiologische Abhandlungen I. Reihe Heft I. p. 1.
[3]) *Helmholtz*, Tonempfindungen IV. Ausgabe. p. 295.
[4]) *Brewster*, Philosophical Magazin. vol. XXV.
[5]) *Savart*, Annales de chim. et de phys. T. XLIV.

lich das fis_7 mit 24000 Schwingungen hervor, und Despretz[1]) fand, dafs mittels Stimmgabeln, welche auf Resonanzkasten standen, noch das d_8 mit über 36000 Schwingungen hörbar war.

§ 160.

Analyse des Klanges. Wir haben bereits im § 153 darauf hingewiesen, dafs Töne gleicher Höhe sich durch Verschiedenheit ihrer Klangfarbe unterscheiden, und bemerkt, dafs die Verschiedenheit des Klanges ihren Grund darin habe, dafs die Form der Schwingungen bei gleicher Periode eine verschiedene sei; eine Verschiedenheit, welche darauf beruht, dafs die Schwingungen zusammengesetzt periodische sind, dafs innerhalb der durch den Grundton angegebenen Periode die Luftteilchen gleichzeitig nach andern höhern Tönen angehörigen Perioden schwingen. Bei der Besprechung der zusammengesetzten Schwingungen (§ 145) sahen wir schon, dafs bei den Schwingungen der meisten Körper nicht einfache Schwingungen, welche durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt sind, sich finden, sondern dafs zu diesen stets solche hinzutreten, deren Schwingungsdauern Vielfache der ersten sind, dafs also die Schwingungen im allgemeinen durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} + b \cdot \sin 4\pi \frac{t}{T} + c \cdot \sin 6\pi \frac{t}{T} + \cdots\cdots p \cdot \sin n\pi \frac{t}{T}$$

gegeben sind. Bei den verschiedenen schwingenden Körpern können die Verhältnisse zwischen den Amplituden der einzelnen Schwingungen, sowie die Anzahl der Glieder dieser Reihe je nach Art und Stelle der Erregung sehr verschieden sein.

Wie wir nun § 155 sahen, stellen die einzelnen Glieder der zuletzt hingeschriebenen Reihe die harmonischen Obertöne des durch das erste Glied dargestellten Tones vor, also wenn wir den letztern mit c bezeichnen, die Reihe

$$c,\ c_1,\ g_1,\ c_2,\ e_2,\ g_2,\ \text{Ton } 7,\ c_3,\ d_3 \cdots$$

Ist demnach die vorhin ausgesprochene Annahme über die Ursache der Klangverschiedenheit die richtige, so würde das bedeuten, dafs die verschiedenen Klänge nicht einfache Töne, sondern Accorde sind, welche von der Reihe der harmonischen Töne gebildet werden, und dafs ihre Verschiedenheit darin beruht, dafs in diesen Accorden mehr oder weniger Töne der Reihe vorhanden sind, und dafs die Stärke der einzelnen Töne eine verschiedene ist.

Ohm[2]) war der erste, der den Satz aufstellte, dafs das Ohr die Fähigkeit habe, jede in einer zusammengesetzten vorhandene einfache Schwingung als Ton gesondert wahrzunehmen, ohne jedoch daran den Schlufs zu knüpfen, dafs in der Wahrnehmung der verschiedenen Obertöne der Grund der Klangverschiedenheit liege. Seebeck[3]) nahm dem gegenüber an, dafs in einer

[1]) *Despretz* a. a. O.
[2]) *Ohm*, Poggend. Ann. Bd. LIX und LXII.
[3]) *Seebeck*, Poggend. Ann. Bd. LX und LXIII. Doves Repertorium. Bd. VIII.

mmengesetzt periodischen Schwingung die einzelnen Töne nicht zu rscheiden wären, dafs aber in der durch das Hinzutreten der weitern ringungen bedingten Veränderung des Schwingungsgesetzes eine Ursache Klangverschiedenheit der Töne gleicher Höhe zu suchen sei. Erst nholtz[1]) war es, der den Nachweis lieferte, dafs in einem Klange, dessen ingende Bewegung durch obige Gleichung dargestellt ist, alle die Töne, sie das Gesetz von Ohm verlangt, wirklich vorhanden und dem Ohre rnehmbar sind, und dafs die Verschiedenheit des Klanges wesentlich den vorhandenen Obertönen bedingt ist.

Zum Nachweis der objektiven Existenz der Partialtöne benutzte Helm- z das Phänomen des Mittönens, dessen Theorie wir im nächsten Kapitel is ausführlicher besprechen werden. Die Erscheinung besteht darin, wenn in der Nähe eines Körpers, welcher Schwingungen einer ganz be- mten Periode vollführen, das heifst also einen einfachen Ton bestimmter e geben kann, Schwingungen dieser Periode erzeugt werden, der Körper rch mit in Schwingungen gerät, welche man entweder direkt oder rch wahrnehmbar machen kann, dafs man den erregenden Ton auf- n läfst, wodurch dann der Ton des mitschwingenden Körpers allein ar bleibt. Spannt man z. B. auf einem Monochord zwei Saiten genau Einklang, und bringt die eine zum Tönen, so tönt auch die andere, oder gt man von zwei ganz genau gleichen Stimmgabeln, wie Fig. 258, die zum Tönen, so wird auch die andere in Schwingung versetzt. Dieses önen tritt aber nur ein, wenn die Schwingungen des mittönenden Körpers u dieselbe Dauer haben, wie die Schwingungen des ursprünglich nden Körpers, schon bei geringem Unterschiede der Schwingungen tritt elbe nicht ein. Wenn man deshalb bei Erzeugung eines Klanges einen mmten Körper zum Mittönen bringt, dessen Schwingungszahl jener des em Klange vorhandenen Grundtones nicht entspricht, so kann man us mit Sicherheit schliefsen, dafs neben dem Grundtone der dem mit- nden Körper entsprechende Ton in dem Klange vorhanden ist.

Ein sehr bequemes Mittel, um das Mittönen zu zeigen, sind Membranen, he wie Fig. 260 als Boden auf einer Flasche ausgespannt sind. Hals der Flasche bei a ist , die Membran b vertritt die e des Bodens; man nimmt am n eine nasse Schweinsblase, leichmäfsig aufgespannt wird, die man dann trocknen läfst, c wird mit Wachs ein Cocon- a befestigt, der an seinem rn Ende ein Siegellackkügel-

Fig. 260.



trägt, das gerade vor der Mitte der Membran hängt. Wenn die bran in Schwingungen gerät, so macht das Pendelchen die heftigsten nge. Wenn die Spannung der Membran und die Gröfse der Flasche ig getroffen sind, so gibt die Membran fast nur ihren Grundton an, velchem sie als Ganzes schwingt, die Obertöne treten dann nur schwach or. Um dieselben zu erkennen, mufs man die Flasche vertikal stellen,

[1]) *Helmholtz*, Tonempfindungen. Abschnitt II, III, IV, V, VI.

und die Membran zur Beobachtung der Klangfiguren mit Sand bestreuen. Die möglichen Schwingungsformen der Membran mit den dazu gehörigen Schwingungszahlen zeigt folgende kleine Tabelle:

Die Membran schwingt	Schwingungszahl
ohne Knotenlinie	1
mit einem Kreise	2,296
mit zwei Kreisen	3,599
mit einem Durchmesser	1,590
mit einem Durchmesser und einem Kreise	2,920
mit zwei Durchmessern	2,140.

Bezeichnen wir den Grundton der Membran mit c, so gibt dieselbe als Obertöne $d_1 +$, $b_1 +$, as, $g_1 -$, cis_1, die Zeichen $+$ und $-$ bei den Tönen sollen anzeigen, dafs der Ton der Membran etwas höher oder etwas tiefer ist als der hingeschriebene.

Die mitschwingenden Membranen haben den Vorzug, dafs sie die in einer Klangmasse vorhandenen Einzeltöne ganz ohne Mithülfe des Ohres zeigen, sie haben indes den Nachteil, dafs sie für schwächere Töne nicht sehr empfindlich sind. In der Beziehung werden sie weit übertroffen von den von Helmholtz angegebenen Resonatoren. Es sind das Hohlkugeln oder Röhren, von Glas oder Messing (Fig. 261 a und b), mit zwei Öffnungen. Die eine Öffnung a hat scharf abgeschnittene Ränder, die andere b ist trichterförmig und so geformt, dafs man sie in das Ohr einsetzen kann. Man umgibt zu dem Ende die Öffnung b mit geschmolzenem Siegellack, und wenn dasselbe soweit erkaltet ist, dafs man es mit den Fingern ungestraft berühren kann, aber doch noch weich ist, drückt man die Öffnung in den Gehörgang. Das Siegellack formt sich dann nach der innern Oberfläche des letztern, und wenn man dann später den Resonator an das Ohr setzt, so schliefst er leicht und vollständig dicht.

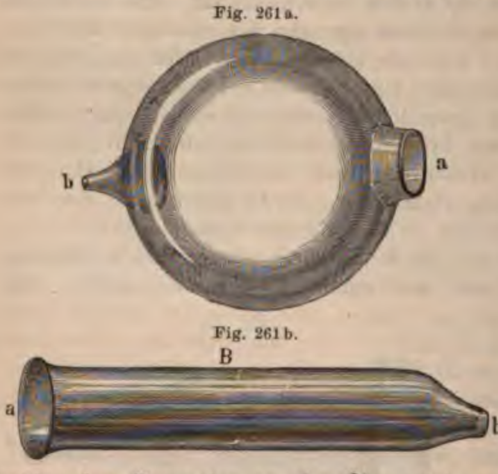


Fig. 261 a.

Fig. 261 b.

Ein solcher in das Ohr gesetzter Resonator gibt einen bestimmten Grundton und aufserdem mehrere sehr viel höher liegende Obertöne. Wird der Grundton desselben aufserhalb angegeben, so wird die Luft des Resonators sehr kräftig zum Mittönen gebracht, und der Ton dringt dann unmittelbar und deshalb sehr kräftig ins Ohr.

Verstopft man das eine Ohr und setzt an das andere den Resonator, so hört man die meisten in der Umgebung angegebenen Töne sehr gedämpft, wird dagegen der Ton des Resonators angegeben, so schmettert derselbe mit gewaltiger Stärke in das Ohr hinein.

Eine abgestimmte Reihe solcher Resonatoren, wie man sie jetzt von önig in Paris beziehen kann, die harmonische Reihe der Töne von c_{-1} an thaltend, ist deshalb ein vortreffliches Mittel, um die in einer Klangmasse thaltenen Töne zu bestimmen. Es ist dabei zu bemerken, dafs das Aufeten des Tones im Resonator ganz ebenso die objektive Existenz des Tones ſserhalb des Resonators beweist, als die mitschwingende Membran. Denn r Ton tritt in dem Resonator nur hervor, wenn derselbe von Schwingungen troffen wird, welche mit denen, welche die Luftmasse des Resonators anhmen kann, isochron sind; wird deshalb der Resonator zum Tönen geacht, so beweist das, dafs in den zusammengesetzten Schwingungen, welche n zum Tönen bringen, die dem Resonator entsprechende einfache Schwingung rhanden ist, und als solche aus den zusammengesetzten abgeschieden erden kann.

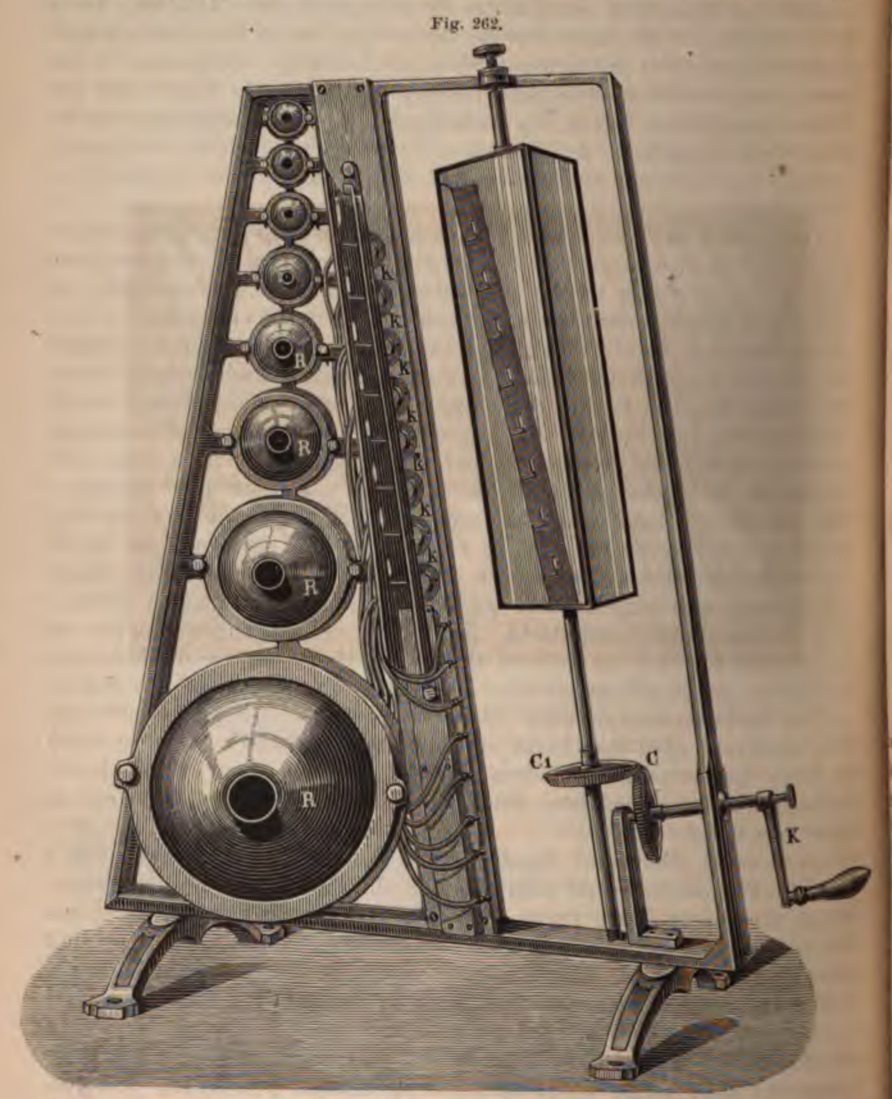
Den Vorzug der Membranen, die Zusammensetzung der Klänge unabngig vom Ohr zu zeigen, mit der Empfindlichkeit der Resonatoren, verndet ein von R. König in Paris konstruierter Apparat. Eine Reihe von gestimmten Resonatoren, 8 oder 10 von c an sind auf einem Stative über nander befestigt R, R (Fig. 262). Das Ende der Resonatoren, welches nst ins Ohr gesteckt wird, ist durch einen Kautschukschlauch mit einer ihe kleiner Kapseln kk in Verbindung. Mit Ausnahme der Eintrittsstelle s Kautschukschlauches sind die Kapseln rings geschlossen, und zwar an n Seitenwänden und hinten, wo der Schlauch eintritt, fest, vorn, der ndung des Schlauches gegenüber durch eine sehr feine elastische Membran. ird nun durch einen aufsen angegebenen Ton die Luftmasse des Reators in Schwingung versetzt, so pflanzt sich die Bewegung bis in die psel fort, und die die Kapsel vorn abschliefsende Membran wird gerade in Schwingungen versetzt, wie das Trommelfell, wenn man den Resona- in den Gehörgang einschiebt. Um diese Schwingungen sichtbar zu chen, wendet König ein äufserst sinnreiches Mittel an; vor der Membran rd eine zweite Kapsel angebracht, so dafs die Membran selbst die Hinternd der vorderen Kapsel bildet. Durch ein seitliches Ansatzrohr läfst man die vordere Kapsel Leuchtgas eintreten, welches durch die (Fig. 262) en den Resonatoren sichtbaren Brenner, die aus einer kleinen kreisnigen, auf der obern Seite dünner Cylinder angebrachten Öffnung behen, entweicht.

Angezündet gibt dieser Gasstrom eine kleine spitze leuchtende, ruhig nnende Flamme. Sobald aber der mit dieser Flamme in Verbindung hende Resonator durch einen Ton in Schwingungen versetzt wird, gegt auch die Flamme in isochrone Vibrationen, indem sie abwechselnd ſser und kleiner wird. Denn indem die Membran durch die Schwingungen Luft im Resonator abwechselnd etwas in die das Gas haltende Kapsel eingedrückt, abwechselnd aus ihr zurückgezogen wird, wird der Druck Gases in der Kapsel abwechselnd etwas vergröfsert, abwechselnd etwas kleinert. Dem vergröfserten Druck entspricht ein verstärktes, dem vernderten ein geschwächtes Ausströmen des Gases und ersterem eine Verſserung, letzterem eine Verkleinerung der Flamme. Diese Vibrationen Flamme erfolgen indes mit einer solchen Geschwindigkeit, dafs sie bei ekter Betrachtung der Flamme nicht sichtbar sind.

Um sie sichtbar zu machen, benutzt König die schon mehrfach er-

wähnte Eigentümlichkeit unseres Auges, dafs Lichteindrücke eine gewisse Zeit dauern und die aus dem Reflexionsgesetze sich ergebende Erscheinung, dafs das Spiegelbild einer Flamme je nach der Stellung eines Spiegels an verschiedenen Orten erscheint. Das an der Seite der Flamme sich befindende Parallelepiped ist auf seinen vier Seitenflächen mit Spiegeln belegt, so

Fig. 262.



dafs, wenn es in der Stellung ist, welche die Figur zeigt, die Spiegelbilder der Flammen, wie es in der Figur angedeutet ist, sichtbar sind. Durch zwei mittels der Kurbel K gedrehte konische Zahnräder C und C_1 kann das spiegelnde Parallelepiped in Rotation versetzt werden. Dreht man Spiegel langsam, während die Flamme ohne Vibrationen brennt, so

it man die Flamme nach und nach an verschiedenen Stellen neben einler, dreht man ihn rasch, so sieht man alle diese Bilder einer Flamme ichzeitig, und infolge dessen sieht man sie als ein horizontales Lichtid, gerade wie man eine rasch im Kreise geschwungene glühende Kohle leuchtenden Kreis sieht.

Anders jedoch, wenn die Flamme vibriert, wenn die leuchtende Spitze Flamme nur immer einen Moment sichtbar ist; sie gibt dann im Spiegel r jedesmal ein Bild, wenn sie aufzuckt, diese Bilder fallen aber, da der iegel zwischen dem jedesmaligen Aufzucken gedreht ist, neben einander, d man sieht dann im Spiegel eine Reihe von Flammenbildern neben einder, wie es Fig. 263 zeigt.

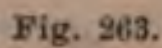
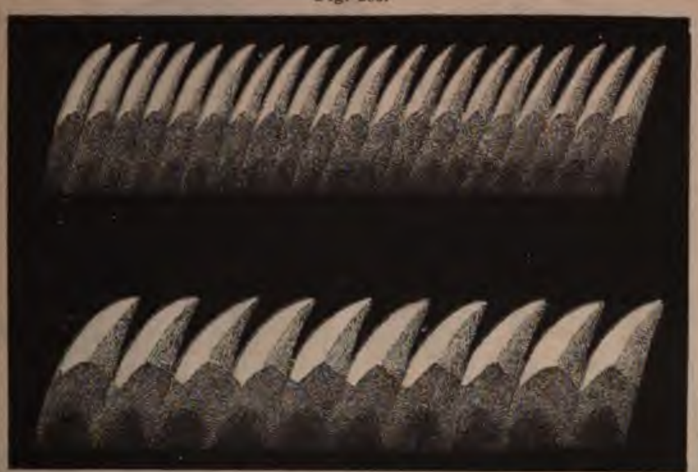


Fig. 263.



Der Abstand der einzelnen Flammenbilder hängt ab von der Schnellig-, mit der die Vibrationen erfolgen und der Schnelligkeit der Rotation Spiegels, oder wenn die Schnelligkeit der Rotation des Spiegels geen ist, nur von der Schnelligkeit, mit der sich die Vibrationen folgen. egeln sich z. B. in einem Spiegel zwei Flammen, von denen die eine pelt so rasch vibriert als die andere, so sieht man auch von der erstern pelt so viel Bilder als von der letztern. So zeigt Fig. 263 die Erscheig in dem rotierenden Spiegel, wenn man gleichzeitig c und c_1 ertönen t, die untere Flamme gibt die halbe Anzahl Bilder als die darüber ende, da die Luft im untern Resonator nur halb so viel Schwingungen cht als im darüberliegenden.

Die Anwendung des Apparates ergibt sich darnach von selbst; man den zu untersuchenden Klang auf den Grundton c an und setzt den gel in Rotation. Alle die in dem Klange enthaltenen Obertöne bringen Luft der ihnen entsprechenden Resonatoren in Vibration, welche sich zugehörigen Flammen mitteilt. Man sieht dann die entsprechenden nmen im rotierenden Spiegel als einzelne Bilder, ähnlich wie Fig. 263, rend die Flammen, deren Resonatoren nicht mittönen, im Spiegel als tinnierliche Lichtbänder erscheinen.

ichter S versehen ist. Jeder einfache Ton versetzt die Flamme in Schwin-
ingen, wenn er mit hinreichender Stärke in den Trichter und durch diesen
die Kapsel eindringt; betrachtet man die Flamme im rotierenden Spiegel,
erhält man ein Bild, wie Fig. 263a oder b. Dringen dagegen gleichzeitig
ehrere Töne in das Rohr, so wird die Flamme von jedem Tone in Schwin-
ung versetzt, und die Flammenbilder werden andere. Treten z. B. Grund-
n und Oktave in die Kapsel, so zeigt der Spiegel das Bild Fig. 265.
asselbe besteht aus einer hohen Flamme, die schmaler ist, als wenn der
rundton allein tönt, und einer kleinen Flamme, welche regelmäfsig ab-
echseln. Die Entstehung dieses Bildes ergibt sich leicht aus der Über-
gung, dafs jede Bewegung der Membran gegen die vordere Hälfte der
apsel die Flamme aufflackern machen mufs. Wenn man gleichzeitig Grund-
n und Oktave und Duodecime in die Kapsel eindringen läfst, so erhält
an das Bild Fig. 266. Zwischen die Flammenbilder Fig. 265 tritt jedes-
al noch eine kleinere Flamme. Das Flammenbild Fig. 265 bildet sich z. B.,
enn man das obere Ende einer offenen Orgelpfeife nahe an die Öffnung
es Schalltrichters S hält und nicht zu stark in die Peife bläst; wenn man
agegen stärker in die Pfeife hinein bläst, wodurch neben dem Grundton
nd der Oktave die Duodecime deutlich hörbar wird, so erhält man das
ild Fig. 266.

Fig. 266.



Hat man auf diese Weise die Flammenbilder der Klänge einmal studiert,
erkennt man leicht, wie man dieses Mittel zur Analyse eines Klanges
nutzen kann; man hat das durch ihn erzeugte Flammenbild mit dem durch
ssend zusammengesetzte einfache Töne zu vergleichen, um zu erkennen,
lche Töne den Klang zusammensetzen.

Schliefslich kann man auch die auf einem Monochord oder in einem
avier oder überhaupt auf einem Resonanzboden ausgespannten Saiten be-
tzen, um die in einem Klange vorhandenen Einzeltöne zu bestimmen, da
Saiten sehr leicht und stark mittönen. Da indes die Saiten nicht nur
rch ihren Grundton, sondern auch durch jeden ihrer harmonischen Ober-
ne in Schwingung versetzt werden, so läfst sich mit Hülfe derselben
ht direkt über die einzelnen Töne entscheiden, welche in der ganzen
angmasse vorhanden sind.

Mit Hülfe des einen oder des andern Verfahrens kann man nun zu-
chst leicht den Nachweis führen, dafs in einer zusammengesetzten Schwin-
ng die einfachen Schwingungen als solche angenommen werden müssen,
ss also die einzelnen Partialtöne eine objektive Existenz haben, indem sie
s Mittönen bewirken, also ihre Schwingungen an andere Körper abgeben.
fs in der That alle Töne, die in einem Klange vorhanden sind, in dieser

Weise existieren, kann man mit Hülfe von gezupften Saiten zeigen. Wie wir im § 145 bemerkten, treten in gezupften oder geschlagenen Saiten sehr verschiedene Schwingungen auf, je nach der Stelle, die gezupft oder geschlagen wird. Alle die Schwingungszahlen fehlen, welche an der geschlagenen Stelle einen Knotenpunkt haben, alle übrigen treten auf. Wird eine Saite in der Mitte geschlagen, so fehlen die Töne 2, 4, 8 u. s. f. Die Töne 3, 5, 7 etc. und ihre Vielfachen treten auf, das heifst die zusammengesetzten Schwingungen der Saite kann man als aus diesen Schwingungen zusammengesetzt betrachten. Dafs in der That diese zusammengesetzten Schwingungen bei ihrer Ausbreitung in der Luft sich wirklich in die in ihnen vorhandenen einfachen Schwingungen zerlegen, das beweisen die Versuche über das Mittönen, denn die denselben entsprechenden Membranen oder Resonatoren werden in Schwingung versetzt.

Wie nun zuerst Brandt[1]) und dann im Verlaufe seiner Untersuchung Helmholtz[2]) nachgewiesen haben, nimmt das einigermafsen geübte Ohr bei dahin gerichteter Aufmerksamkeit diese einzelnen Töne in einer Klangmasse auch ohne Hülfe der Resonatoren wahr, so dafs damit das Ohmsche Gesetz vollständig bewiesen ist. Ist man in solchen Versuchen nicht geübt, so kann man, wie Helmholtz angibt, das Ohr zunächst mit Resonatoren unterstützen.

Man schlage z. B. eine Saite, die c gibt, aufserhalb der Mitte, etwa in $\frac{1}{3}$ der Saitenlänge, so liefert dieselbe aufser dem Grundton c auch c_1, c_2 etc. Nimmt man den Ton c_1 nicht sofort wahr, so halte man einen auf c_1 abgestimmten Resonator an das Ohr, und man hört den Ton sehr laut. Ist so das Ohr auf diesen Ton aufmerksam geworden, so hört es denselben auch nach Entfernung des Resonators, allerdings schwächer aber unzweifelhaft deutlich.

Da das Ohr in einer zusammengesetzten Schwingung in der That die einzelnen Töne wahrnimmt, so wird der Schlufs berechtigt sein, dafs es in der That die verschiedenen und verschieden starken Obertöne, die den Grundton begleiten, sind, welche die Klangfarbe eines Tones ausmachen. Die von den musikalischen Instrumenten gelieferten Klänge sind deshalb keine einfachen Töne, diese können keine verschiedene Klangfarbe haben, sondern Zusammenklänge verschiedener Töne. Helmholtz bezeichnete dieselben daher auch nicht als Töne, sondern als Klänge, indem er das Wort Ton für die durch einfache Schwingungen bewirkte Empfindung wählt. Die Töne unterscheiden sich demnach nur durch ihre Höhe, die Klänge, deren Höhe durch die des Grundtones bezeichnet wird, durch die von ihrer Zusammensetzung abhängige Klangfarbe.

Dafs dieser Schlufs über das Wesentliche der musikalischen Klangfarbe berechtigt ist, hat Helmholtz[3]) schliefslich dadurch nachgewiesen, dafs er aus einfachen Tönen die Klänge zusammensetzte, nachdem er vorher die in denselben vorhandenen Teiltöne erkannt hatte. Wir werden auf die wichtigsten Versuche, die künstliche Zusammensetzung der Vokale, in einem spätern Paragraphen zu sprechen kommen, hier erwähnen wir nur einen

---

1) *Brandt*, Poggend. Ann. Bd. CXII.
2) *Helmholtz*, Tonempfindungen. Abschnitt IV.
3) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 109 ff.

dahin zielenden Versuch. Bläst man eine Glasflasche an, welche in der Weise wie Fig. 267 eingerichtet ist, welche also mit einem Anblaserohr, am besten aus Guttapercha, dessen am Halse der Flasche liegende Mündung abgeplattet ist, versehen ist, indem man das Rohr mit einem Blasebalge in Verbindung setzt, so erhält man einen fast einfachen Ton, der in seinem Klange einem dumpfen *U* sehr ähnlich ist.

Stimmt man nun zwei solcher Flaschen so ab, daſs die eine genau die Oktave der andern gibt, so liefern sie zusammen angeblasen einen Klang, dessen Höhe der des Grundtones entspricht, dessen Farbe aber derjenigen des Vokales *O* gleich ist. Läſst man nun abwechselnd bald die eine, bald beide Flaschen tönen, so kann man in dem Zusammenklange zunächst die einzelnen Töne leicht unterscheiden, sehr bald aber bei dauerndem Zusammenklange verschmelzen sie sich zu dem Klange *O*. Wenn man erst den höhern Ton angegeben hat, dann den tiefern hinzukommen läſst, hört man anfangs den höhern Ton noch in seiner ganzen Stärke weiter, daneben klingt der tiefe in seiner natürlichen Klangfarbe wie ein *U*. Allmählig aber, wie sich die Erinnerung des isoliert gehörten Tones verliert, wird jener immer undeutlicher und dabei auch schwächer, während der tiefe Ton scheinbar stärker wird und wie *O* lautet.

Fig. 267.



Gerade diese Verschmelzung eines Obertones mit einem Grundtone unter Änderung der Klangfarbe beweist, daſs der Klang wesentlich durch die Obertöne bedingt ist.

Wie wir im § 131 nachwiesen, hängt das Gesetz der Schwingungen in einer schwingenden Punktreihe nicht allein ab von der Periode der Teilschwingungen, sondern auch von der Phase, mit welcher die Schwingungen zusammentreten, es wäre deshalb auch möglich, daſs die Phase der komponierenden Teiltöne auf die Farbe eines Klanges von Einfluſs ist. Helmholtz[1]) hat gezeigt, daſs das nicht der Fall ist. Er benutzte dazu die Zusammensetzung von Klängen mit Hülfe von Stimmgabeltönen. Zwei im Verhältnis von Grundton und Oktave stehende Stimmgabeln geben zusammen zum Tönen gebracht und durch Resonanzröhren verstärkt (siehe § 167) einen dem *O* sehr ähnlichen Klang. Verstimmt man die eine Stimmgabel nur sehr wenig, so kommen die einzelnen Stöſse nach und nach in immer anderer Phase zusammen, wie wir bereits § 145 sahen. Die Klangfarbe ändert sich indes damit durchaus nicht. Dadurch ist dann bewiesen, daſs die Klangfarbe des musikalischen Teils eines Klanges nur abhängt von

[1]) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 190 ff.

der Zahl und Stärke der Partialtöne, nicht von den Phasenunterschieden derselben. Wir sagen ausdrücklich, des musikalischen Teiles des Klanges, denn aufserdem wird auch die Klangfarbe mit bestimmt durch die bei der Klangerzeugung eintretenden Geräusche, auf welche wir im nächsten Paragraphen noch hinweisen werden.

§ 161.

Klänge durch Schwingungen fester Körper. Wir sahen im zweiten Kapitel des vorigen Abschnitts, dafs die festen Körper in drei verschiedene Schwingungsarten versetzt werden können, in longitudinale, in transversale und in drehende, entsprechend den verschiedenen Richtungen, nach denen sich die Elasticität äufsert. Alle diese Schwingungen bringen Töne oder vielmehr, da sie in den seltensten Fällen einfache sind, Klänge hervor, indem durch sie die umgebende Luft in Schwingungen versetzt und durch diese der Ton bis zu unserm Ohre fortgepflanzt wird.

Als allgemeinen Ausdruck für die Schwingungszahl eines longitudinal schwingenden Stabes hatten wir

$$N = \frac{1}{A \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}},$$

worin L die Länge, E den Elasticitätskoefficienten in den Einheiten des absoluten Mafssystems, s die Dichtigkeit des Stabes und A eine von der Befestigungsweise und der Art des Streichens abhängige Konstante bedeutet.

Die Schwingungszahl und somit der Longitudinalton eines Stabes hängt also aufser von der Materie des Stabes bei gleicher Befestigungsweise und gleichem Streichen nur von der Länge des Stabes ab; die Dicke oder der Querschnitt des Stabes haben auf die Höhe des Klanges keinen Einflufs.

Diesen Satz bestätigen schon die Versuche Chladnis, welcher die longitudinalen Schwingungen der Stäbe und deren Töne untersuchte, bevor die Theorie dieser Bewegungen entwickelt war[1]).

Unter übrigens gleichen Umständen mufs nach unserem Ausdrucke die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von longitudinal schwingenden Stäben sich verhalten wie die Quadratwurzel aus dem Quotienten der Elasticität und der Dichtigkeit; auch dieses wird schon durch die Versuche Chladnis bestätigt.

Chladni liefs mehrere zwei Fufs lange an beiden Ende freie Stäbe frei schwingen und erhielt als Töne:

Mit einem Stabe 15lötigen Silbers . . . d_4
" " " von Kupfer . . . g_4
" " " von Eisen . . . . cis_5.

Die Schwingungszahlen dieser Töne verhalten sich, diejenige des viergestrichenen c als Einheit gesetzt, wie

$$\tfrac{9}{8} : \tfrac{3}{2} : \tfrac{25}{12},$$

oder diejenige des viergestrichenen d als Einheit gesetzt, wie

$$1 : \tfrac{4}{3} : \tfrac{50}{27},$$

---

1) *Chladni*, Akustik. p. 103—109.

er wenn wir die temperierten Töne wählen, wie

$$1 : 1{,}33484 : 1{,}88775.$$

Nach § 48 ist der Elasticitätskoefficient

$$\begin{aligned} &\text{für Silber } E = 7004{,}3 \cdot 10^8 \frac{G}{CS^2} \quad s = 10{,}47 \\ &\text{„ Kupfer } E = 10319{,}1 \cdot 10^8 \quad \text{„} \quad s = 8{,}78 \\ &\text{„ Eisen } E = 20398{,}9 \cdot 10^8 \quad \text{„} \quad s = 7{,}74. \end{aligned}$$

Mit diesen Werten wird das Verhältnis der Schwingungszahlen

$$N_1 : N_2 : N_3 = 2587 : 3428 : 5133 = 1 : 1{,}326 : 1{,}985.$$

Die von Chladni beobachteten Töne entsprechen also der Theorie; die bweichung selbst beim höchsten Tone beträgt nur etwas mehr als ein mma; Chladni selbst gibt aber an, der Ton sei nur annähernd *cis* gesen. Indes ist die Übereinstimmung so grofs, wie sie bei so hohen Tönen r sein kann, wo geringe Höhenunterschiede nur sehr schwer wahrnommen werden können.

Für die Bestimmung der Schwingungszahl longitudinal schwingender äbe hatten wir drei Fälle zu unterscheiden.

1) Der Stab ist an einem Ende ganz fest. Dann wird

$$N = \frac{2n - 1}{4L} \sqrt{\frac{E}{s}}\,.$$

Die Schwingungszahlen des Stabes verhalten sich wie 1 : 3 : 5 u. s. w. Auch dieses bestätigen die Versuche Chladnis, der als Töne eines an em Ende festen longitudinal schwingenden Stabes, den Grundton, den langsamsten Schwingungen als c angenommen, gibt

$$c\ g_1\ e_2\ b_2 - d_3.$$

Das negative Zeichen bei b_2 bedeutet, dafs der Ton etwas tiefer war b_2, es ist eben der in der Tonleiter nicht vorkommende Ton 7 in der ithöhern Oktave von c.

2) Der Stab ist an beiden Enden frei.

3) Der Stab ist an beiden Enden fest.

In beiden Fällen ist die Schwingungszahl

$$N = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{s}}\,.$$

Die möglichen Schwingungen sind 1, 2, 3, 4 · · sie verhalten sich wie Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Der Grundton bei dieser Betigungsweise ist die Oktave des Tones, wenn der Stab an einem Ende t ist. Dem entsprechend gibt auch Chladni als Töne an

$$c_1\ c_2\ g_2\ c_3\ e_3,$$

an der Grundton, der die Oktave des Grundtones im vorigen Fal ; c_1 bezeichnet wird.

Wir können nach unserer Formel auch den Ton berechnen, welchen Chladni an seinen Stäben fand und so eine neue Bestätigung unserer früheren Theorie erhalten. Indes können wir hier keine absolut genaue Übereinstimmung erwarten, da wir einmal nicht annehmen dürfen, daſs Chladnis Längenbestimmung absolut genau ist, und da wir wissen, daſs E sowohl wie s selbst für die gleichen Substanzen je nach ihrer Behandlungsweise verschiedene Werte haben können.

Chladni bestimmt die absolute Schwingungszahl des c_5 zu 4086 Schwingungen, also kleiner, wie es nach der jetzigen Stimmung ist. Der Wert von cis_5 ergibt sich darnach zu 4296 Schwingungen. Berechnen wir aber die Schwingungszahl für den eisernen Stab, so wird dieselbe, wenn wir den rheinischen Fuſs, den Chladni als Längeneinheit zu Grunde legt, gleich $31{,}3^{\text{cm}}$ setzen,

$$N = \frac{513\,300}{125{,}2} = 4103.$$

Der von Chladni beobachtete Ton ist demnach nur um 1,04 gegen den von uns berechneten Ton zu hoch, eine Übereinstimmung, welche in Anbetracht der eben erwähnten Umstände fast vollkommen zu nennen ist.

Als allgemeinen Ausdruck für die Schwingungszahl transversal schwingender gespannter Saiten erhielten wir, mit Beibehaltung der frühern Zeichen (§ 140),

$$N = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{gP}{qs}}\,.$$

Es folgt daraus, die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von Saiten gleicher Länge ändert sich der Quadratwurzel der Spannung proportional und bei gleicher Spannung umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Gewichte der Längeneinheit der Saite. Die Erfahrung bestätigt dieses vollkommen, und in der praktischen Akustik werden gerade diese Sätze zur Regelung der Tonhöhe bei den Saiteninstrumenten angewandt.

So sind bei allen Streichinstrumenten die Saiten, welche die tiefern Töne geben sollen, dicker und weniger straff gespannt, und meist sind die tiefern Saiten, um ihr Gewicht zu vergröſsern, mit einem feinen Drahte umwickelt. Bei allen diesen Instrumenten wird die Stimmung nur durch die Spannung der Saiten erhalten, welche an dem einen Ende befestigt sind und mit ihrem andern Ende in einen drehbaren Wirbel eingesteckt sind, durch dessen Drehung man die Spannung ändern kann. Gleiches ist bei den Klavieren der Fall, wo auſserdem die Saiten noch eine verschiedene Länge haben. Bei den Streichinstrumenten werden die verschiedenen Töne ebenfalls durch Verkürzung der Saiten hervorgebracht, indem der Spieler die Saite an den betreffenden Punkten auf das Griffbrett niederdrückt.

Nach unserer Gleichung für die Schwingungszahl gespannter Saiten ist die Tonhöhe bei einer und derselben Saite der Länge des schwingenden Teiles umgekehrt proportional und die Saite zerlegt sich, wenn sie nicht ihrer ganzen Länge nach schwingt, in n schwingende Teile. Die Versuche von Chladni und G. Weber geben die Tonreihe einer gespannten Saite genau der Theorie gemäſs. Setzen wir den Grundton der Saite gleich 1 und bezeichnen wir ihn mit c_{-1}, so ist nach Chladni die Reihe der Töne[1]):

[1]) *Chladni* a. a. O. p. 67.

1	2	3	4	5	6	7	8
c_{-1}	c	g	c_1	e_1	g_1	$b_1 -$	c_2
9	10	11	12	13	14	15	16
d_2	e_2	$f_2 +$	g_2	$a_2 -$	$b_2 -$	$h_2 -$	c_3.

G. Weber[1]) geht bis zu einer Teilung der Saite in $\frac{1}{32}$, somit bis zum viergestrichenen c.

Weil man meist die Tonreihe nach Saitenlängen des Monochords bestimmt, findet man auch häufig die Töne anstatt durch die Schwingungszahlen durch die Länge der Saite für den entsprechenden Ton bestimmt; es ist klar, dafs dann die den Ton bezeichnenden Zahlen einfach die reciproken Werte der im Frühern angewandten Zahlen sind, oder dafs nach dieser Bezeichnungsweise werden

c	d	e	f	g	a	h	c_2
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$.

Die Klänge der Saiteninstrumente können, wie sich schon aus den Erfahrungen des § 145 ergibt, äufserst verschieden sein und auf dieser Verschiedenheit beruht auch die vielfache Anwendung der Saiteninstrumente in der Musik. Die musikalischen Saiteninstrumente können wir in zwei Gruppen teilen, in solche, deren Töne durch Zupfen oder Schlagen der Saiten erregt werden, wie Guitarre, Zither und besonders das Klavier, und solche, deren Töne durch Streichen mit dem Bogen erregt werden, die sämtlichen Streichinstrumente. Für die wichtigsten derselben hat Helmholtz[2]) die Klänge ziemlich ausführlich untersucht, wir begnügen uns hier damit, als Ergänzung zur Besprechung der Saitenschwingungen des § 145 die von Helmholtz für das Klavier und die Violine erhaltenen Resultate mitzuteilen.

Wir erwähnten in § 145 bereits, dafs die Stärke und Anzahl der in den zusammengesetzten vorhandenen Einzelschwingungen, also der im Saitenklange vorhandenen Obertöne wesentlich abhänge von der Art und Stelle des Anschlags, sowie von der Dicke, Steifigkeit und Elasticität der Saite.

Was zunächst die Art des Anschlages betrifft, so ergibt sich aus Helmholtz Untersuchungen, dafs die Zahl und Stärke der höhern Obertöne desto bedeutender wird, je mehr und schärfere Diskontinuitäten die Art der Bewegung zeigt. Wird die Saite gezupft, entfernt der Finger sie, ehe er sie losläfst, in ihrer ganzen Länge aus der Gleichgewichtslage, so entsteht eine Diskontinuität nur dadurch, dafs die Saite an der Stelle, wo sie gezupft wird, eine mehr oder weniger scharfe Ecke bildet, schärfer, wenn sie wie bei der Zither mit einem Stift als wenn sie wie bei der Guitarre mit dem weichen runden Finger gerissen wird. Deshalb gibt die erste Art des Reifsens auch einen schärfern Klang mit einer gröfsern Menge klimpernder hoher Obertöne als im letztern; die Intensität des Grundtones ist aber immer gröfser als die jedes Obertones.

Wird die Saite mit einem scharfkantigen harten Hammer geschlagen, der sofort wieder abspringt, so wird nur der vom Schlage getroffene Punkt sofort in Bewegung gesetzt. Unmittelbar nach dem Schlage ist der übrige

[1]) *Bindseil*, Akustik. p. 110.
[2]) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 128 ff. und p. 536.

Teil der Saite noch in Ruhe, er gerät erst in Bewegung, indem die durch den Schlag erregte Welle auf der Saite hin und her läuft. Die Beschränkung der ursprünglichen Bewegung auf nur einen Punkt gibt der Saite die schärfste Diskontinuität, und deshalb viele und hohe Obertöne, deren Intensität zum Teil die des Grundtones übertrifft.

Ist der schlagende Hammer weich und elastisch, so hat die Bewegung Zeit, auf der Saite sich auszubreiten, ehe der Hammer wieder zurückspringt, und zugleich wird durch den Anschlag eines solchen Hammers der geschlagene Teil der Saite nicht ruckweise in Bewegung gesetzt, sondern seine Geschwindigkeit wächst allmählich und stetig mit dem Drucke des Hammers. Die Diskontinuität der Bewegung ist deshalb viel kleiner und dem entsprechend ist die Stärke der Obertöne gegen jene des Grundtones viel geringer.

Mit scharfem Metall gerissen oder geschlagen ist deshalb der Klang der Saite schärfer und leerer, indem die mit Leerheit bezeichnete Eigentümlichkeit des Klanges eben in der verhältnismäfsigen Stärke der Obertöne gegen den Grundton begründet ist. Ist der Grundton kräftig gegen die Obertöne und sind besonders die höhern unpaarigen Töne schwach, so ist der Klang voll und harmonisch.

Bei den Klavieren wird deshalb, um dies zu erreichen, der Hammer mit einer dicken Lage stark geprefsten und dadurch elastisch gewordenen Filzes bedeckt, und gleichzeitig werden die für die tiefern Töne bestimmten Hämmer schwerer gemacht als die für die höhern Oktaven, damit erstere länger an der Saite haften als letztere. Denn einmal ist das längere Haften des Hammers in den tiefern Lagen zur relativen Verstärkung des Grundtones deshalb notwendig, weil die Schwingungsdauer desselben gröfser ist als in der höhern, dann aber auch, weil bei der stärkern Spannung der Saiten in den höhern Lagen die höhern Obertöne sich doch nicht so stark ausbilden.

Um bei den Klavieren die Klänge nicht allein voll, sondern auch weich zu machen, ist die Anschlagsstelle der Saiten $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{9}$ von dem einen Ende. Damit fallen die Töne 7 und 9, die ersten, welche nicht in den Dreiklang hineingehören, und welche mit den andern keine konsonierenden Intervalle haben, aus der Reihe der Obertöne fort. Es treten dann nur die ersten sechs Töne auf, der fünfte und sechste indes schon sehr schwach.

Folgende kleine Tabelle gibt die Intensität der Partialtöne, von Helmholtz berechnet, wenn in $\frac{1}{7}$ der Saitenlänge der Ton in der über jeder Kolumne angegebenen Weise erregt wird.

Tabelle der Intensität der Partialtöne bei Saiten.

Ordnungszahl des Partialtones	Anschlag durch Reifsen	Anschlag durch einen elastischen Hammer, dessen Berührung dauert, in Bruchteilen der Schwingungsdauer des Grundtones			Anschlag mit einem ganz harten Hammer
		$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{14}$	
1	100	100	100	100	100
2	81,2	99,7	189,4	249	324,7
3	56,1	8,9	100,9	242,9	504,9
4	31,6	2,3	17,3	118,9	504,9
5	13,0	1,2	0,0	26,1	324,7
6	2,8	0,01	0,5	1,3	100,0
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Für das Klavier gelten die drei mittlern Kolumnen, und Helmholtz nd, dafs die der mit $\frac{3}{7}$ überschriebenen Spalte entsprechende Kolumne in r Gegend des c_2 und noch höher hinauf gilt, dafs indes in den viel höhern agen die Obertöne noch schwächer werden. In der eingestrichenen Oktave wa gilt die Kolumne $\frac{3}{10}$, in dieser ist also der erste Oberton schon intenver als der Grundton, in den tiefern Lagen der kleinen, der grofsen und r Kontraoktave gilt die mit $\frac{3}{14}$ überschriebene Kolumne. Die Intensitätsrhältnisse können indes je nach der Güte und richtigen Stellung der ämmer beträchtlich schwanken.

Dafs in den höhern Lagen die Obertöne so sehr weit zurücktreten, s hat seinen Grund in der stärkern Spannung und der Steifigkeit der laviersaiten, denn bei steifen Saiten von einiger Dicke treten dieselben r sehr schwach mehr hervor, da diese Saiten sich nicht leicht in so viele nterabteilungen zerlegen, wie sie zu den hohen Obertönen erforderlich sind.

Dafs der Klang der gestrichenen Saiten ein ganz anderer sein mufs jener der geschlagenen, ergibt sich nach den ausführlichen Besprechungen r Schwingungsform von Violinsaiten im § 145 unmittelbar. In den geichenen Saiten ist der Grundton stärker als jeder der Obertöne, deshalb der Klang der Streichinstrumente auch ein viel vollerer als der des aviers. Gleichzeitig ist aber auch die Stärke der höhern Obertöne, bei n meisten Tönen der Violine schon von dem dritten an, beim Violoncell m fünften an relativ gröfser als beim Klavier, und deshalb ist der vollere n gleichzeitig ein schärferer. An welcher Stelle zwischen Steg und Griffett man streicht, ist auf den Klang nicht von wesentlichem Einflufs, nn man dem Griffbrett nur nicht zu nahe kommt, die Stelle, an welcher n gewöhnlich streicht, liegt in etwa $\frac{1}{10}$ der Saitenlänge, rückt man bis das Griffbrett, so streicht man in $\frac{1}{5}$, und da dann der fünfte und sechste n mehr oder weniger fehlen, so wird der Klang dumpfer.

Auf den Klang der Streichinstrumente hat die Art des Streichens einen sentlichen Einflufs; jede Störung in der Bogenführung hat eine Diskontiität in den Schwingungen und damit ein kratzendes Geräusch zur Folge. shalb hängt bei keinem Instrument die Fülle und Reinheit des Klanges sehr von der Geschicklichkeit des Spielers ab, als gerade bei den Streichtrumenten. Wesentlich hängt dieselbe indes auch ab von der Güte des struments, dem Bau des Resonanzkastens, ein Umstand, auf den wir später ch zu sprechen kommen werden.

Für die transversalen Schwingungen elastischer Stäbe erhielten wir s Ausdruck

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{s}}\,.$$

Die Schwingungszahlen verhalten sich demnach bei cylindrischen Stäben rekt wie der Radius und umgekehrt wie die Quadrate der Längen derlben. In demselben Verhältnisse müssen daher die Tonhöhen stehen.

Die Versuche von Savart über die absoluten Schwingungszahlen cylinrischer Stäbe haben wir bereits angegeben. Ein Messingstab von $0^m,103$ änge und $2^{mm},4$ Radius vollführte 1422 Schwingungen, ergab also einen on, welcher etwas höher liegt als das dreigestrichene f; ein c[illegible]cher upferstab von gleicher Länge und $1^{mm},7$ Radius ergab eine

etwas höher lag als das dreigestrichene c. Die Übereinstimmung dies Zahlen mit der Theorie haben wir erwähnt.

Die Töne, welche ein schwingender Stab überhaupt geben kann, fand wir verschieden, je nachdem der Stab verschieden befestigt ist; wir unt schieden damals vier Fälle, nämlich:

1) Ein Ende des Stabes ist frei, das andere ist ganz fest. Die mö lichen Schwingungszahlen werden, für die langsamsten, wenn sie der Rei angehörten, n gleich 1 gesetzt:

$$N = \frac{(2n - 1)^2}{4}.$$

Die Töne müssen sich demnach bei einem und demselben Stabe v halten wie

$$1 : 9 : 25 : 49 : 81,$$

wobei aber, wie wir damals erwähnten, die ersten drei Töne gegen folgenden zu hoch werden.

Chladni[1]) erhielt als zweiten Ton einen um zwei Oktaven und e übermäfsige Quint höhern Ton als den Grundton, als dritten einen um e Oktave und eine verminderte Quint höhern als den zweiten, der vierte T war dann wieder nahe um eine Oktave, der fünfte wieder um eine Se höher. Diese Töne verhalten sich von dem Contra C als Grundton rechnet wie

$$c_{-2},\ gis,\ d_2,\ d_3 -,\ b_3,\ f_4 +,$$

deren Schwingungsverhältnisse sind

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{25}{4} & \frac{144}{8} & \frac{288}{8} & \frac{288}{5} & \frac{256}{3} \\ 1 & 6\frac{1}{4} & 18 & 36 & 57\frac{3}{5} & 85\frac{1}{3}. \end{array}$$

Diese Zahlen sind aber fast genau gleich der im § 142 p. 645 für d gleichen Fall aufgefundenen Zahlenreihe. Wir können dieselben schreib

$$1,\ 0{,}700 \cdot 9,\ 0{,}702 \cdot 25,\ 0{,}703 \cdot 49,\ 0{,}705 \cdot 81,\ 0{,}705 \cdot 121,$$

von der dritten an gerechnet verhalten sich also die Schwingungszahlen f genau wie die Quadrate der ungeraden Zahlen.

2) Beide Enden des Stabes sind frei oder ganz fest. Die Zahl d Schwingungen ist

$$N = \frac{(2n + 1)^2}{4}.$$

Die Töne werden demnach sich verhalten müssen bei gleicher Sta länge wie die Quadrate der ungeraden Zahlen von 3 an, wie

$$9 : 25 : 49 \cdots$$

Besitzt der Stab demnach die gleiche Länge und sonstige gleiche B schaffenheit wie in dem vorigen Falle, so mufs der tiefste Ton mit de zweiten bei der vorigen Befestigungsweise zusammenfallen. Das ergeb auch die Versuche Chladnis, der als Töne in diesem Falle angibt

$$gis,\ d_2,\ d_3 -,\ b_3,\ f_4 +,$$

[1]) *Chladni*, Akustik, p. 94—103.

›, wie wir soeben nachwiesen, Schwingungszahlen besitzen, welche in m geforderten Verhältnisse stehen.

3) Das eine Ende des Stabes ist aufgelegt, das andere ganz fest oder frei. In beiden Fällen ist die Schwingungszahl

$$N = \frac{(4n+1)^2}{16}.$$

Das Verhältnis zu einander ist demnach

$$25 : 81 : 169 \cdots$$

ıd der erste Ton mufs um zwei Oktaven tiefer sein als der dritte Ton ı ersten Falle, wo ein Ende fest, das andere frei ist, wenn der Stab dielbe Länge und sonstige gleiche Beschaffenheit hat, da wir hier im Nenner ›ch die Zahl 4 haben.

Nach der Angabe Chladnis sind die Töne des Stabes

$$d,\ b_1+,\ h_2-,\ gis_3,\ dis_4,\ a_4,$$

ın sieht, wie die beiden ersten Töne dem dritten und fünften Tone des sten Falles entsprechen, jedoch um zwei Oktaven tiefer sind. Eine Beıhnung der folgenden Schwingungszahlen weist auch für diese das gederte Verhältnis nach.

4) Der vierte Fall ist der einfachste, wenn beide Enden nur angestemmt d; der Stab schwingt entweder seiner ganzen Länge nach, oder teilt sich *n* Teile, die Schwingungszahl ist demnach

$$N = n^2.$$

Die Schwingungszahlen und somit die Tonhöhen müssen sich verten wie

$$1,\ 4,\ 9,\ 16 \cdots$$

Zu der ersten Schwingungsart, wo das eine Ende fest, das andere frei , würden sich die Schwingungszahlen des tiefsten Tones, der $n = 1$ entıicht, verhalten wie $1 : \frac{1}{4}$, wenn im ersten Falle der tiefste Ton der ıwingungsreihe angehörte. Wir sahen aber, dafs im ersten Falle der :ste Ton nicht der Schwingungszahl $\frac{1}{4}$ entspricht, sondern dem Quadrate ı 0,59686, oder nahezu 0,36; die Tonhöhe des tiefsten Tones bei dieser estigungsweise mufs sich daher zu der des ersten Tones im ersten Falle :halten wie 1 : 0,36, wie $\frac{25}{9}$. Bezeichnen wir demnach den Grundton im ten Falle mit c_{-2}, so mufs der Ton jetzt fis_{-1} die übermäfsige Quart : nächsthöheren Oktave werden.

Chladni bestimmte ohne Kenntnis der Theorie die gehörten Töne im :rhältnis zum Grundtone c_{-2} im ersten Falle als

$$\begin{matrix} fis_{-1} & fis_1 & gis_2 & fis_3 & d_4 & gis_4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36, \end{matrix}$$

› Töne verhalten sich demnach wie die Quadrate der natürlichen Zahlen d sind um zwei Oktaven höher als die entsprechenden Töne bei der ersten festigungsart, denn dort hatten wir den Schwingungsverhältnissen 9 und entsprechend die Töne *gis* und d_2.

Die Töne elastischer Stäbe werden selten in der Musik angewandt; es ›t aufser den später zu betrachtenden Zungenpfeifen nur einige wenige,

in der Orchestermusik jedoch nicht gebräuchliche Instrumente, deren Töne durch transversale Schwingungen elastischer Stäbe erzeugt werden. Einen praktischen Gebrauch von den Schwingungen an einem Ende fester, am andern freier Stäbe macht man in der Eisenvioline, welche aus eisernen Stiften besteht, die in einem halbkreisförmigen Steg auf einem Resonanzboden eingeschlagen sind und mit dem Violinbogen gestrichen werden. An beiden Enden freie Stäbe läfst man in der sogenannten Strohfiedel schwingen. Dieselbe besteht aus Stäben oder schmalen Streifen von Holz, Glas oder Stahl, die an ihren beiden Schwingungsknoten, welche bei dem tiefsten Tone auftreten, auf zusammengedrehtes Stroh oder andere weiche Unterlagen gelegt und mittels zweier Klöppel angeschlagen werden. In der Mozartschen Oper „Die Zauberflöte" wird gewöhnlich ein solches Instrument als Glockenspiel des Papageno angewandt[1]).

Die Töne schwingender Platten und Glocken finden in der Musik ebenfalls nur wenig Anwendung; die Töne schwingender Platten werden neuerdings bei der Militärmusik gebraucht, indem eine Anzahl kleiner Stahlplatten, auf einem Gestell in ihrer Mitte befestigt, mit einem elastischen Hammer geschlagen werden; die gespannter Membranen bei den Pauken und Trommeln. In allen diesen Fällen wird nur der Grundton dieser Instrumente benutzt, der bei einfachen Schlägen entsteht.

Die Töne der Platten hat Chladni[2]) sehr ausführlich untersucht und gefunden, dafs jedem andern Ton eine andere Teilungsart der Platte entspricht, nicht aber jeder andern Teilungsart auch ein anderer Ton, oder zwei verschiedene Töne geben nie dieselbe Klangfigur, einem Tone können aber mehrere Klangfiguren zukommen. Wir begnügen uns hier einige der Chladnischen Angaben mitzuteilen. Bei einer kreisförmigen Scheibe fand er den tiefsten Ton, wenn die Figur aus zwei sich kreuzenden Durchmessern besteht. Nannte er den Ton c_{-1}, so ergab die aus drei sich schneidenden Durchmessern bestehende Figur den um eine Oktave und eine Sekunde höhern Ton d, die aus vier sich schneidenden Durchmessern bestehende c_2, also die dritte Oktave des ersten Tones. Bei einem Kreise (Fig. 231 γ) gab die Scheibe gis_{-1}, der Ton war eine übermäfsige Quint höher als der Grundton (Fig. 231 δ), zwei Kreise gaben $gis_1 +$, einen um zwei Oktaven höhern Ton. Ein Kreis und ein Durchmesser (Fig. 231 ε) gab b, ein Kreis und das Kreuz (Fig. 231 ζ) g_1; zwei Kreise und ein Durchmesser oder die gleichbedeutende Figur 231 η gab $e_2 +$ und die Figur 231 ϑ, die mit zwei Kreisen und zwei Durchmessern gleichwertig ist, gab b_2.

Wir haben diese Töne in ihren Schwingungszahlen bereits mit den aus der Theorie Kirchhoffs sich ergebenden im § 143 zusammengestellt, auch dort gingen wir wie hier von der zwei Durchmessern entsprechenden Schwingungszahl als 1 aus.

Die Folge der Töne war eine andere bei quadratischen Scheiben. Auch für diese entwirft Chladni eine vollständige Tabelle der gehörten Töne. Das auf den Quadratseiten senkrechte Kreuz gibt den tiefsten Ton, den die transversal schwingende Scheibe überhaupt geben kann. Das aus den Diagonalen bestehende Kreuz gibt die Quint des Tones; war der erstere g_{-1},

---

[1]) *Chladni*, Akustik. p. 98.
[2]) *Chladni* a. a. O. p. 117 ff.

so wird dieser Ton *d*. Fig. 232 β, zwei Linien parallel einer Seite, eine Linie zu diesen senkrecht gibt den Ton *h*, nach beiden Richtungen zwei Linien, Fig. 232 γ gibt den Ton b_1 —. Die Fig. 232 ε gibt den Ton gis_1 + und Fig. 232 ζ die höhere Oktave des vorigen gis_2 +. Fig. 232 η entsprach dem Tone cis_3 und Fig. 232 ϑ der tiefern Oktave des letztern Tones.

Die Unbrauchbarkeit der durch Schwingungen von Stäben und Platten erzeugten Klänge für die künstlerische Musik leuchtet nach den Bestimmungen der Obertöne derselben unmittelbar ein; die Obertöne sind fast sämtlich unharmonisch zum Grundton, sie müssen deshalb die Accorde, in welchen die Klänge gebraucht werden, dissonierend machen, oder man mufs dieselben so anwenden, dafs die Obertöne nicht auftreten. Letzteres geschieht bei der Pauke durch die Verbindung der Membran mit einem gröfsern Luftraum, indem dieselbe über einen Kessel ausgespannt wird. Damit erhält dann der Klang das Dumpfe eines einfachen Tones.

Zur Erzeugung eines einfachen Tones sind deshalb die Schwingungen von Stäben, wie die der Stimmgabel sehr geeignet; Helmholtz hat die Stimmgabeln, verbunden mit einem Luftraum, deshalb vorzugsweise zu diesem Zwecke verwandt, besonders weil man in dieser Weise am leichtesten auch alle Nebengeräusche vermeiden kann.

Schliefslich sind unter den Tönen der festen Körper noch die durch drehende Schwingungen hervorgebrachten zu erwähnen. Wir erhielten als Ausdruck für die Schwingungszahl so bewegter Stäbe im § 144

$$N_1 = \frac{1}{4l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}$$

und allgemein für alle möglichen Schwingungen

$$N = n \cdot N_1,$$

wenn N_1 die langsamsten Schwingungen bedeutet. Wie wir ferner sahen, sind auch hier wieder die verschiedenen Befestigungsweisen der Stäbe in Betracht zu ziehen. Obige Gleichung für N_1 gilt, wenn der Stab an einem Ende befestigt ist. In gleichem Falle erhalten wir für denselben Stab für den Longitudinalton

$$N = \frac{1}{4l} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}},$$

somit für das Verhältnis des Longitudinaltones und des Torsionstones

$$\frac{N_1}{N} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}}.$$

Dieses Verhältnis gilt gleichzeitig für alle Töne und für alle Befestigungsweisen. Der Torsionston mufs also jedenfalls tiefer sein als der Longitudinalton, um wie viel, das hängt von dem Werte von μ ab.

Die Beobachtungen von Chladni[1]) führten ihn zu dem Schlusse, dafs der Ton der drehenden Schwingungen eines Stabes, „so weit ich es habe bemerken können", um eine Quinte tiefer sei als der Ton bei entsprechenden longitudinalen Schwingungen. Nach Chladni wären also die drehenden Schwingungen genau $\frac{2}{3}$ der longitudinalen. Savart[2]) fand, dafs der Ton

[1]) *Chladni*, Akustik. p. 110.
[2]) In *Poisson*, Mémoire sur les Mouvements des Corps élastiques. Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 456.

bei den drehenden Schwingungen nahezu eine Sexte tiefer war als bei den longitudinalen, oder dafs

$$N = 0{,}6000\, N'.$$

Wertheim[1]) fand den Longitudinalton um etwas mehr als eine kleine Sext höher wie den Torsionston, $N' = 1{,}635\, N$ im Mittel. Auf die Bedeutung dieses Tonverhältnisses zur Bestimmung des Wertes von μ haben wir schon hingewiesen.

Die Torsionstöne werden in der Musik niemals angewandt, sie bieten daher nur ein theoretisches Interesse.

§ 162.

Töne durch Schwingungen luftförmiger Körper. Eine Art Tonerzeugung durch Schwingungen luftförmiger oder flüssiger Körper haben wir bei Betrachtung der Sirene kennen gelernt. Von viel höherer Bedeutung sind aber die Töne, welche durch stehende Schwingungen von Luftsäulen erregt werden. Die gröfste Zahl der Blasinstrumente und die meisten Register der Orgel erzeugen ihre Töne auf diese Weise. Als Typus der Blasinstrumente können wir die Orgelpfeifen betrachten und an diesen die Bildung und die Reihe der Töne untersuchen.

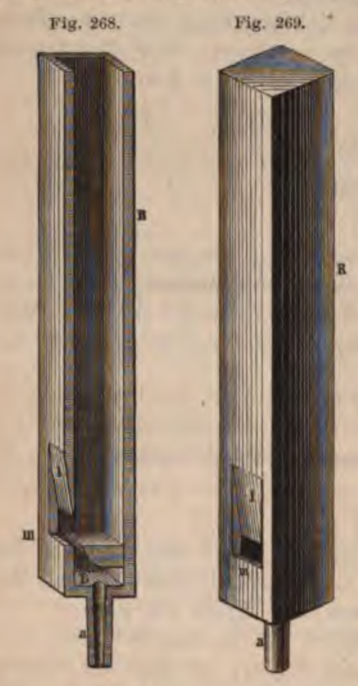


Fig. 268. Fig. 269.

Die Orgelpfeifen zerfallen in zwei Klassen, die Labialpfeifen und die Zungenpfeifen. In ersteren wird die schwingende Bewegung nur durch einen Luftstrom bewirkt ohne Zuhülfenahme eines festen Körpers, der Ton ist daher nur von der schwingenden Luftsäule abhängig; letztere sind eine Kombination elastischer Streifen und schwingender Luftsäulen, ihr Ton wird durch beide Schwingungsarten bedingt; wir werden sie demnächst besonders betrachten.

Die Labialpfeifen (Fig. 268 und 269) bestehen aus einem Fufse a, welcher auf die Mündung eines Windkastens gesetzt wird und durch welchen der Luftstrom in den Raum b unter der Bodenplatte der Röhre eintritt. Die Bodenplatte läfst an der Seitenwand einen Spalt, durch welchen der Luftstrom austritt, um sich an der obern Lippe l, welche die in der Seitenwand gelassene Mundspalte lm nach oben begrenzt, zu teilen. Durch den teilweise in die Röhre dringenden Luftstrom wird nun die in der Röhre zunächst über der Mundspalte befindliche Luft nach oben getrieben und verdichtet. Diese Verdichtung bewirkt dann, dafs die Luft nicht mehr

[1]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. L. p. 262.

in die Röhre eindringt, sondern nur vorbeistreicht, dadurch dehnt sich die vorher verdichtete Luft wieder aus und kehrt nach unten zurück, worauf dann neue Luft in die Röhre dringt und eine neue Verdichtung veranlafst. Die Luft erhält also zunächst an der Mundspalte eine hin und her gehende Bewegung. Diese pflanzt sich in der Luftsäule der Röhre fort und wird an der obern Grenze reflektiert. Durch diese in entgegengesetzter Richtung in der Röhre sich fortpflanzenden Bewegungen wird die Luftsäule der Röhre in stehende Schwingungen versetzt und gibt einen Ton, der verschieden ist nach der Länge der Röhre und nach der Art des Verschlusses an der obern Grenze[1]).

Die Schwingungen der Luft in der Röhre R sind longitudinale Schwingungen; ist die Pfeife gedeckt (Fig. 269), so tritt an der obern Grenze eine Reflexion derselben mit Änderung des Vorzeichens ein, der ankommende Wellenberg wird als Wellenthal reflektiert und das dem ankommenden Berge folgende Wellenthal als Wellenberg. Gerade wie bei den longitudinal schwingenden, an einem Ende festen, am andern Ende freien Stäben wird daher die ganze Luftsäule zugleich hin und her schwingen können, wenn die Impulse an der Lippe sich so folgen oder die Schwingungsdauer T so ist, dafs der Wellenberg bis zur Wand sich fortgepflanzt hat, während die Luftschicht bei l $\frac{1}{4}$ Schwingung zurückgelegt hat. Es entsteht dann nach § 147 eine stehende Welle, deren Länge gleich ist dem Doppelten der Röhrenlänge. Da die stehende Welle halb so lang ist als eine gleichzeitig schwingende fortschreitende Welle, so ist die Länge der Pfeife gleich einem Viertel der gleichzeitig schwingenden fortschreitenden Welle. Bezeichnen wir daher die Länge der Röhre mit l, so wird die Schwingungsdauer dieser Welle

$$T = 4l \cdot \sqrt{\frac{d}{e}},$$

oder wenn wir nach § 146 die Werte für d und e einführen,

$$T = 4l \cdot \sqrt{\frac{s}{H\sigma g k}},$$

worin H die Höhe des Barometers in Centimetern, σ die Dichtigkeit des Quecksilbers, s die dem Drucke $H\sigma g$ entsprechende Dichtigkeit der Luft und $k = 1{,}405$ den konstanten Koefficienten bedeutet, mit dem wir den Quotienten $\frac{e}{d}$ multiplicieren mufsten, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung zu erhalten.

Für die Schwingungszahl erhalten wir demnach

$$N = \frac{1}{4l} \cdot \sqrt{\frac{H\sigma g}{s} \cdot k} = \frac{c}{4l}.$$

Da das Labialende der Röhre die Stelle ist, wo die Bewegung erzeugt wird, so kann, da an dem gedeckten Ende immer ein Schwingungsknoten entstehen mufs, in derselben keine stehende Schwingung b[illegible] n Länge gleich ist der Länge der Röhre, indem dann [illegible]

[1]) Über die Erregung der Schwingungen in [illegible] Poggend. Ann. Bd. CLII, *Strouhal*, Wied. [illegible]

die reflektierte Bewegung die neu erregte vernichten würde. Lassen wir durch stärkeres Blasen in dem Fuſse der Röhre die Impulse bei so rascher auf einander folgen, so wird keine stehende Schwingung entstehen können, wenn sich die Bewegung bis zur obern Wand fortgepflanzt hat, während die erste Schicht eine halbe Schwingung zurückgelegt hat, wenn sich also zugleich von der Wand und von dem Labium Wellenthäler oder Wellenberge in der Röhre fortpflanzen, da dann eine stehende Welle sich bilden würde von der Länge der Röhre, an dem Labium somit ein Schwingungsknoten, ein Ort immerwährender Ruhe entstände.

Folgen sich aber die Impulse so rasch auf einander, daſs die schwingende Bewegung erst dann den Boden der Röhre erreicht hat, wenn die erste Schicht $\frac{3}{4}$ ihrer Schwingung zurückgelegt hat, so daſs also zugleich von der festen Wand ein Wellenberg, von dem Labium die zweite Hälfte eines Wellenthals sich fortpflanzt, so bilden sich stehende Wellen, deren Längen $\frac{2}{3}$ von der Röhrenlänge betragen, in der Röhre bildet sich $\frac{1}{3}$ der Länge vom Labium entfernt ein Schwingungsknoten und an dem Labium befindet sich die Mitte einer stehenden Welle, ein Schwingungsmaximum. Die Schwingungsdauer dieser Welle wird

$$T = \tfrac{4}{3} l \cdot \frac{1}{c}$$

und die Schwingungszahl

$$N = 3 \cdot \frac{c}{4l} \cdot$$

Weiter können Schwingungen in der Röhre stehende werden, deren Wellenlänge $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{9}$ von der Länge der Röhre beträgt, aus denen also durch die Interferenz der eintretenden und der reflektierten Bewegung stehende Wellen von der Länge

$$\tfrac{2}{5} l,\ \tfrac{2}{7} l,\ \tfrac{2}{9} l \dots$$

entstehen (§ 138). Die Schwingungszahlen dieser Wellen sind

$$N = 5 \frac{c}{4l},\ 7 \frac{c}{4l},\ 9 \frac{c}{4l},$$

oder allgemein, es können sich in der Röhre stehende Wellen bilden mit der Schwingungszahl

$$N = (2n - 1) \cdot \frac{c}{4l},$$

worin n jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann.

Ist somit der Grundton der Röhre c_{-1}, so sind die Töne, welche wir mit dieser Röhre erhalten können,

$$\begin{matrix} c_{-1} & g & e_1 & b_1 - & d_2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9. \end{matrix}$$

Man kann sich leicht von der Richtigkeit dieser Folgerungen überzeugen. Denn bläst man eine gedeckte Pfeife nur schwach an, so erhält man den tiefsten Ton, den sie geben kann, bläst man stärker, so erhält man die Quint der nächsthöhern Oktave, weiter die Terz der folgenden Oktave u. s. f., wie es die Entwicklung der Schwingungsgesetze verlangt.

Die Grundtöne, welche verschieden lange Pfeifen geben können, hängen von der Länge der Pfeife ab, und zwar sind nach den obigen Rechnungen

owohl, wie nach der Erfahrung die Schwingungszahlen der Länge der Pfeife umgekehrt proportional. Man kann daher leicht durch Herstellen iner Pfeifenreihe von verschiedener Länge sich die ganze Tonleiter mit llen ihren Tönen verschaffen.

Indes findet man, dafs in diesem Falle sich die Töne nicht genau umgekehrt wie die Längen der Pfeifen verhalten, dafs je nach der Gestalt und Gröfse des Mundlochs und des Querschnittes der Pfeife die Töne mehr oder weniger von der Theorie abweichen. Noch deutlicher tritt das hervor, wenn man den Ton theoretisch berechnet, den die Pfeife bei gegebener Länge geben soll. Nach § 146 ist

$$\sqrt{\frac{H\sigma g}{s}} \cdot k = 331\,80^{\text{cm}} = 331{,}8^{\text{m}},$$

vorausgesetzt, dafs die Luft eine Temperatur von 0^0 hat.

Ist daher die Länge der Röhre in Metern angegeben $= l$, so soll der Ton der Röhre eine Schwingungszahl haben

$$N = \frac{331{,}8}{4l}.$$

Der Versuch gibt aber stets einen etwas tiefern Ton, dessen Schwingungszahl

$$N = \frac{331{,}8}{4(l+x)}.$$

Liscovius[1]) hat nachgewiesen, dafs unter übrigens gleichen Umständen e Vertiefung des Tones mit der Weite der Röhre zunimmt, und Wertheim[2]) hat gefunden, dafs die Gröfse x bei gleichgearbeitetem Mundstücke m Durchmesser der Pfeife proportional, bei gleichem Mundstück und eichem Durchmesser aber von der Länge der Pfeife unabhängig sei. Der influfs auf die Tonhöhe ist daher um so gröfser, je kleiner l ist. Ferner t von wesentlichem Einflusse Form und Gröfse des Mundstückes.

Diese Angaben über die Umstände, welche die Gröfse x beeinflussen, ben uns Aufschlufs über die Ursache der Abweichung der beobachteten öne von der Theorie.

Die theoretische Entwicklung setzt nämlich voraus, dafs die ganze unre Schicht zugleich in Vibrationen gerate, und sich die Schwingungen nn einfach von Schicht zu Schicht fortpflanzen, ferner dafs die Pfeife ihrem untern Ende ganz offen sei. Beides ist nicht der Fall, da der uftstrom zunächst nur die in der Nähe der Lippe liegenden Teile der ächsten Schicht nach oben hin treibt, und dann erst die entfernteren in hwingung versetzt werden, und da andererseits die Mundspalte die Pfeife ten nur teilweise öffnet. Durch letzteren Umstand treten auch am Boden r Pfeife partielle Reflexionen ein, welche bewirken, dafs sich nicht gerade n Boden der Pfeife das Schwingungsmaximum bildet und dafs deshalb r erste Knoten nicht genau um $\frac{1}{4}L$, wenn wir mit L die Wellenlänge r schwingenden Bewegung bezeichnen, von der Mundspalte entfernt ist, ndern um etwas weniger, oder mit anderen Worten, dafs die beim Grundne sich bildende Welle nicht genau gleich dem Vierfachen der Pfeifennge ist, sondern etwas länger.

[1]) *Liscovius*, Poggend. Ann. Bd. LVIII und LX.
[2]) *Wertheim*, Ann. de chim. et de phys. III. Série. Tome XXIII. Poggend. nn. Bd. LXXVII.

Mit dieser Entwicklung stimmen die Angaben von Wertheim über die Gröfse x vollkommen überein, denn die einzige Störung liegt sonach in der Anwesenheit des Bodens; es mufs daher bei gleichen sonstigen Verhältnissen x von der Länge der Pfeife unabhängig sein, ferner aber mufs x um so gröfser sein, je gröfser der Querschnitt der Pfeife ist; denn da das Mundloch immer nur an der einen Seite der Pfeife ist, wird auch die Pfeife an der untern Seite um so weniger offen, je gröfser der Querschnitt der Pfeife ist. Je vollkommener aber das Mundloch ist, um so mehr mufs auch die Störung zurücktreten.

Man kann sich auch durch direkte Beobachtung von der Richtigkeit dieser Erklärung überzeugen. Bringt man eine Pfeife zum Tönen, welche anstatt eines festen Deckels einen verschiebbaren Stempel hat, und erzeugt man z. B. den vierten Ton mit der Schwingungszahl

$$N = 7 \frac{c}{4(l+x)},$$

so erhält man daraus

$$\tfrac{4}{7}(l+x) = \frac{c}{4N}.$$

Bestimmt man nun auf irgend eine Weise die Schwingungszahl N des gehörten Tones, so kann man mit Hülfe des berechneten c die Gröfse

$$\tfrac{4}{7}(l+x) = \tfrac{1}{4} L$$

oder die Wellenlänge L des gehörten Tones erhalten. Die Länge der stehenden Wellen ist nun gleich $\frac{1}{2} L$ oder

$$\tfrac{1}{2} L = \tfrac{2}{7}(l+x).$$

Dieser Ton ist der vierte Ton der Röhre von der Länge l; verkürzen wir die Röhre um $\frac{2}{7}(l+x)$ dadurch, dafs wir den Stempel tiefer in die Röhre einschieben, so erhalten wir eine Röhre, deren dritter Ton gleich dem vorigen vierten sein mufs, verkürzen wir nochmals um $\frac{2}{7}(l+x)$, so mufs jetzt der zweite, und verkürzen wir nochmals um $\frac{2}{7}(l+x)$, der Grundton mit dem frühern übereinstimmen. Der Versuch zeigt dieses nun in der That, so dafs dadurch feststeht, die einzelnen Knoten stehen um $\frac{L}{2}$ von einander ab; der erste Knoten aber um weniger als $\frac{L}{4}$ von der Mundöffnung, die Wellenlänge des Grundtones ist also gröfser als die vierfache Länge der gedeckten Pfeife[1]).

Dulong[2]) wandte dieses Verfahren an, um die Gröfse x experimentell zu bestimmen; er nahm eine Pfeife mit Stempel und erzeugte z. B. den vierten Ton; dann verschob er den Stempel, bis der dritte Ton gleich dem vorigen vierten Ton war und erhielt durch Messung der Verschiebung die Gröfse $l + x$ oder die Länge der den Ton erzeugenden stehenden Welle. Er benutzte diese Versuche, wie wir später sehen werden, um die Gröfse c durch Beobachtung zu erhalten.

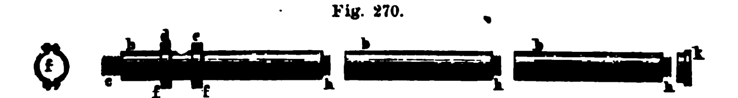
---

[1]) *Hopkins* Transakt. of the Cambridge Philosophical Society. Vol. V. Poggend. Ann. Bd. XLIV.

[2]) *Dulong*, Annales de chim. et de phys. T. XLI. Poggend. Ann. Bd. XVI.

Wertheim[1]) wandte ein anderes Verfahren an, um die Gröfse x zu bestimmen. Er nahm cylindrische Pfeifen, die aus mehreren Stücken zusammengesetzt waren, welche mittels Schrauben an einander befestigt werden konnten (Fig 270). Der Deckel k war mit einem gleichen Schrauben-

Fig. 270.



gewinde versehen, um jedes Stück der Pfeife gedeckt machen zu können. Auf diese Weise konnte also Wertheim Pfeifen herstellen, welche bei genau gleicher Weite und gleichem Mundstück sich nur durch ihre Länge L_1, L_2 . . unterschieden.

Wurde nun die Pfeife bei einer Länge L_1 zum Tönen gebracht, so hatte der erste Ton eine Schwingungszahl N_1 und es war

$$N_1 = \frac{c}{4(L_1 + x)}.$$

Wurde die Pfeife nun durch Ansatz eines Stückes b auf die Länge L_2 gebracht und wieder der erste Ton erzeugt, so hatte dieser eine andere Schwingungszahl N_2 und es war

$$N_2 = \frac{c}{4(L_2 + x)};$$

aus diesen beiden Gröfsen läfst sich x ohne Kenntnis von c direkt erhalten, denn daraus folgt

$$4N_1(L_1 + x) = 4N_2(L_2 + x)$$

$$x = \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2}.$$

Wertheim teilt in seiner Abhandlung eine Anzahl von solchen Werten x für verschiedene Pfeifen mit, wir lassen einige folgen, um die Bedeutung derselben zu überblicken.

Werte von x für verschiedene Pfeifen in Luft von der Temperatur 11,5 Grad C.

	Material der Pfeife	Durchmesser	Länge	Werte von x
		Millimeter	Millimeter	Millimeter
Cylindrische Pfeifen von	Blei	20	62	30,7
	—	24	107	34,8
	—	20	120	27,1
	—	42	120	68,1
	Messing	40	298	60,0
	—	20	281	28,5
	—	10	288	17,0
	Glas	20	256	32,0
	Zink	50	668	66,1
	Glas	17	875	40,0

[1]) *Wertheim* a. a. O.

Vorstehende Tabelle läfst erkennen, dafs der Wert der Berichtigung von der Weite der Röhre abhängig ist, dafs aber auch bei Röhren gleicher Weite der Wert von x verschieden sein kann, infolge verschiedener Weite des Mundstückes.

In einer weitern Untersuchung hat deshalb Wertheim[1]) die Abhängigkeit von x von diesen Umständen zu bestimmen versucht und gelangt zu folgender Beziehung für x. Nennen wir die Breite der Röhre B, die Dicke derselben D und den Querschnitt $B \cdot D = S$, ferner den Querschnitt der Mundöffnung s, so wird x

$$x = c\,(B + D)\left(1 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}}\right).$$

Hat die Röhre anstatt eines rechteckigen einen kreisförmigen Durchschnitt, so tritt an die Stelle der Summe $B + D$ der Ausdruck $2\sqrt{S}$. Der Faktor c in dem Ausdrucke bedeutet eine Konstante, welche mit dem Material der Röhre etwas veränderlich ist, ihr Wert ist für Metall oder Glas 0,210, für Holz 0,240. In wie weit die so berechneten Werte von x mit den aus den Schwingungszahlen der beobachteten Töne abgeleiteten übereinstimmen, zeigt folgende kleine Tabelle; zu den in ihr mitgeteilten Versuchen wurden cylindrische Pfeifen benutzt.

Werte von x bei verschiedenen Pfeifen mit verschiedenen Mundöffnungen.

$c = 0{,}210.$

Material der Wand	$\sqrt{S}$	s	Temperatur	Länge der Pfeife	x berechnet	x beobachtet
				298,0		96,9
Messing . . .	35,45	60,0	9°,0 C.	631,0	79,6	84,0
				965,0		96,9
				97,5		24,7
Messing . . .	17,72	36,0	9°,9	190,0	26,9	27,9
				281,0		22,8
				88,0		17,7
Messing . . .	8,86	13,7	21°,0	188,0	11,1	22,1
				288,0		18,4
				100,0		31,9
Glas	17,72	30,0	9°,3	256,1	29,7	37,7
				231,0		34,4
	17,72	36,0	11°,5	62,0	26,9	30,7
Blei	21,27	54,0	„	110,0	31,4	32,0
	17,72	63,0	„	120,0	20,8	25,8
	37,22	140,0	„	120,0	59,8	68,1

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist allerdings nicht vollkommen, jedoch so annähernd, dafs man diese aus den Versuchen abgeleitete Formel zu den Rechnungen benutzen kann.

[1]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XXXI. Krönigs Journal. Bd. II.

Dafs die berechneten Werte meist kleiner sind als die beobachteten, it seinen Grund zum Teil darin, dafs Wertheim die Geschwindigkeit des challes in Röhren jener in freier Luft gleich setzt, was nach den neuern, äter zu besprechenden Erfahrungen von Kundt und Regnault nicht mehr stattet ist.

Den Einflufs der Form und Gröfse der Mundöffnung benutzt man bei en Orgelpfeifen dazu, um den Ton der Pfeife etwas zu stimmen, wenn die feife nahezu den richtigen Ton angibt. Zu dem Ende sind neben der undöffnung an den Seiten zwei verschiebbare Lappen angesetzt, welche estatten, dieselbe etwas breiter oder schmäler zu machen, und so die Tonöhe zu verändern.

Die Töne einer offenen Pfeife sind andere, als die einer gedeckten feife von gleicher Länge; der Grundton einer offenen Pfeife ist die höhere ktave des Grundtones der gleichen gedeckten Pfeife, so dafs also die chwingungszahl N des Tones gleich ist

$$N = \frac{c}{2l}.$$

Aufser dem Grundtone können auch alle Töne erzeugt werden, welche r Reihe

$$N = n \cdot \frac{c}{2l}$$

tsprechen, also wenn wir den Grundton mit c_{-1} bezeichnen, die Töne

$$\begin{matrix} c_{-1} & c & g & c_1 & e_1 & g_1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

er gehen wir von dem Grundtone der gedeckten Pfeife gleicher Länge c_{-2} s 1 aus, die Töne

2 4 6 8 10 12.

Der erste, dritte, fünfte, überhaupt $(2n - 1)$ Ton ist also die nächst here Oktave der ersten, zweiten etc. $(2n - 1)$ Tones der gedeckten Pfeife; fserdem gibt dann aber auch die offene Pfeife die dazwischen liegenden öne $2n$.

Die offene Pfeife ist dem longitudinal schwingenden, an beiden Enden eien Stabe zu vergleichen; die an das offene Ende gelangenden Schwingungen erden reflektiert, weil die Luft aufserhalb der Pfeife freier beweglich nd deshalb gewissermafsen dünner ist als im Innern der Pfeife. Die ewegung wird demnach ohne Änderung des Vorzeichens, der ankommende ellenberg als Wellenberg, das ankommende Wellenthal als Wellenthal flektiert. Die erste mögliche Schwingungsart, welche in der Röhre stehende ellen erzeugen kann, ist daher diejenige, deren Wellenlänge gleich ist em Doppelten der Röhrenlänge. Eine Schwingung z. B., deren Länge wie ei den gedeckten Pfeifen die vierfache Pfeifenlänge hätte, würde, wie man icht nach § 138 und 147 entwickelt, an der Mundöffnung einen Schwingungsnoten zur Folge haben, würde also als stehende Welle in der Pfeife sich icht erhalten können.

Diejenige Schwingungsbewe[illegible] doppelte Pfeifenlnge beträgt, erzeugt dageger [illegible]ungsnoten und bildet als steher [illegible]en

Länge gleich der Länge der Pfeifen ist. Die Schwingungsdauer und Schwingungszahl ist demnach

$$T = \frac{2l}{c}, \quad N = \frac{c}{2l}.$$

Eine schwingende Bewegung, deren Welle so lang ist, als die Länge der Pfeife, erzeugt in der Pfeife zwei Schwingungsknoten, welche von den Enden der Pfeife um $\frac{1}{4}$ Pfeifenlänge entfernt sind. Zwischen ihnen befindet sich eine stehende Welle von der Länge $\frac{1}{2}\ l$, und von jedem Schwingungsknoten bis zum Ende eine halbe Welle von der Länge $\frac{1}{4}\ l$; an beiden Enden befinden sich also Schwingungsmaxima. Es wird überflüssig sein, die weitern Teilungen der Pfeife, welche den Tönen g_1, $c_1 \cdots$ entsprechen, abzuleiten, da dieselben nach den Entwicklungen des § 138 und 147 unmittelbar hervortreten.

Für die offenen Pfeifen gilt das früher über den Einfluſs des Mundlochs Gesagte gerade wie für die gedeckte Pfeife, auch bei diesen ist demnach die Länge der Welle länger als das Doppelte der Röhre oder

$$N = \frac{c}{2(l + x)},$$

und zwar muſs diese Gröſse x hier ganz dieselbe sein, wie bei der gedeckten Pfeife. Vergleicht man nun die so berichtigte Schwingungszahl N mit derjenigen N' der gedeckten Pfeife, so müſste

$$N = 2N'$$

oder der Ton der gedeckten Pfeife soll genau die tiefere Oktave des Tones der offenen Pfeife sein. Indes hört man bald bei einem Versuche, daſs das nicht der Fall ist, daſs der Ton der offenen Pfeife immer etwas tiefer ist als die höhere Oktave. So fand Wertheim bei einigen Versuchen, daſs bei einer Pfeife von 24^{mm} Durchmesser der gehörte Ton bei der offenen Pfeife sich zu dem Tone $2N'$ verhielt wie 23 zu 24, und in einem andern Falle bei einem Durchmesser von 50^{mm} wie 43,9 : 46,1, den Ton also verhältnismäſsig noch tiefer.

Es muſs daher bei der offenen Pfeife noch ein anderer Umstand störend einwirken, der die gehörten Töne von der Theorie abweichend macht. Wertheim sieht denselben darin, daſs die Reflexion der schwingenden Bewegung nicht ganz genau in dem obern Querschnitt der Röhre stattfindet, sondern daſs sich die schwingende Bewegung noch ein klein wenig über diesen Querschnitt hinaus erstreckt, die schwingende und tönende Luftsäule also etwas länger wird, als die Theorie annimmt. Daſs diese kleine Verlängerung stattfindet, davon kann man sich durch den Versuch überzeugen, denn hält man ganz nahe über die Öffnung der Röhre eine feine schwach gespannte und mit Sand bestreute Membran, so sieht man an dem Hüpfen des Sandes die Ausdehnung der Bewegung über der Pfeife. Um den Ton der offenen Pfeife genau im Verhältnis zur Länge der Pfeife zu bestimmen, muſs man daher für die Schwingungszahl desselben setzen

$$N = \frac{c}{2(l + x + y)}.$$

die Summe der beiden Berichtigungen $x + y$ zu bestimmen, vereim gerade so, wie bei den gedeckten Pfeifen.

ind L_1 und L_2 die Länge zweier verschiedener Pfeifen von genau em Durchmesser, N_1 und N_2 die Schwingungszahlen ihrer Grundtöne, man gerade wie vorhin

$$c = 2 N_1 (L_1 + x + y)$$
$$c = 2 N_2 (L_2 + x + y),$$

araus nach Elimination von c

$$x + y = \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2},$$

usdruck, der dem vorigen für x ganz analog ist.

ür den Wert $x + y$ gelang es Wertheim ebenfalls[1]) eine von dem chnitt der Röhre und der Gröfse der Mundöffnung abhängige Beziehung inden. Bedeuten wieder B die Breite, D die Dicke der Röhre, ist S uerschnitt derselben und s der Querschnitt der Mundöffnung, so gibt die Korrektion der Pfeifenlänge den Ausdruck

$$x + y = c_1 (B + D) \left(2 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}}\right),$$

c_1 eine von dem Material dèr Röhre unabhängige Konstante ist, h $c_1 = 0{,}187$.

n folgender Tabelle ist eine Anzahl von Versuchen Wertheims zu- engestellt, welche zeigen, dafs die für offene Pfeifen an der Länge ben anzubringende Korrektion in der That mit grofser Annäherung obige Gleichung wiedergegeben ist. Die benutzten Pfeifen sind auch ylindrische, so dafs an Stelle von $B + D$ in jener Gleichung ein- en ist $\sqrt{S}$.

Tabelle der Korrektionen an offenen Pfeifen.

aterial : Röhre	$\sqrt{S}$	s	Tempera-tur	Länge der Pfeife	Korrektion berechnet	Korrektion beobachtet
ssing . . .	35,45	120,0	8°,0 C.	332,5		65,1
				666,0	65,4	67,4
				1000,5		68,6
ssing . . .	35,45	60,0	26°,6	332,5		88,9
				666,0	84,2	84,8
				1000,5		87,8
ssing . . .	17,72	36,0	9°,9	97,5		28,0
				190,0	30,6	28,0
				281,0		28,1
ssing . . .	8,86	13,7	21,°0	88,0		18,0
				188,0	13,2	22,1
				288,0		19,0
s	17,72	30,0	17°,0	100,0	32,7	39,1
				245,0		35,9
i	21,27	54,0	11°,5	110,0	36,6	37,1

[1]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome XXXI. Krönigs d. Bd. *II.*

Wie man sieht, stimmen bei offenen Pfeifen die nach jener Beziehung berechneten Korrektionen mit den beobachteten zum Teil noch besser als bei gedeckten Pfeifen, so dafs man bei jenen durch die Rechnung mit sehr grofser Annäherung richtige Resultate erhält[1]).

Da nach diesen Erfahrungen die schwingende Bewegung nicht in der geometrischen Endfläche der Pfeife endigt, so wird eine teilweise Schliefsung der Endfläche die Tonhöhe der Pfeife ebenfalls verändern, und zwar, wie sich aus den Bemerkungen über die Korrektion an gedeckten Pfeifen ergibt, mufs ein derartiger partieller Verschlufs die Töne der Pfeife vertiefen. Dafs eine solche Vertiefung stattfindet, hat die Erfahrung die Orgelbauer längst gelehrt, sie versehen die offenen Orgelpfeifen oben gewöhnlich mit schrägstehenden Blechen, welche man auf- und abbiegen kann; biegt man sie herab, so wird der Ton vertieft.

Wertheim[2]) ist es gelungen, auch für diesen Fall eine empirische Relation herzustellen, welche die an der Länge der Pfeife anzubringende Korrektion zu berechnen gestattet, so dafs die Tonhöhe sich durch die Gleichung

$$n = \frac{c}{2(L + x + y)}$$

berechnen läfst.

Haben B, D und S dieselbe Bedeutung wie früher, und ist s_1 der Querschnitt der Mundöffnung, s_2 derjenige der obern Öffnung der Pfeife, so ist nach Wertheim

$$x = c\,(B + D)\left(1 - \sqrt{\frac{s_1}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s_1}}\right),$$

$$y = c_1\,(B + D)\left(1 - \sqrt{\frac{s_2}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s_2}}\right),$$

worin c_1 wie bei ganz offenen Pfeifen den Wert von 0,187 hat.

Nachstehende Tabelle enthält eine Anzahl Versuche, welche Wertheim an einer quadratischen Orgelpfeife von Holz zur Prüfung obiger Relation angestellt hat. Die Länge der Pfeife betrug 240^{mm}, die Seite des quadratischen Querschnittes 120^{mm}; dieselbe Breite hatte die untere, die Mundöffnung, deren Höhe $5^{mm},5$ betrug. Das Verhältnis $\frac{s_1}{S}$ ist darnach 0,0458; die Temperatur war bei allen Versuchen 15^0. Die Tabelle stellt die von Wertheim beobachteten und die mit den nach obigen Gleichungen bestimmten Werten von x und y berechneten Schwingungszahlen zusammen.

---

[1]) Eine sehr einfache empirische Regel, welche für offene Orgelpfeifen in der That mit grofser Annäherung die Schwingungszahl zu bestimmen gestattet, ist von dem französischen Orgelbauer Cavalier Colle aufgefunden. Bezeichnet man als theoretische Länge der Orgelpfeife die Länge der stehenden Welle des von ihr gelieferten Tones, so dafs die Schwingungszahl

$$N = \frac{c}{2\,l_1}$$

jene des tiefsten Tones ist, so ist l_1 gleich der Summe der wirklichen Länge der Pfeife und der doppelten Tiefe derselben.

[2]) *Wertheim* a. a. O.

Schwingungszahlen partiell gedeckter Pfeifen.

b_2	h_2	$\frac{s_2}{S}$	Schwingungszahl berechnet	Schwingungszahl beobachtet
120	120	1,000 0	644,0	679,0
100	96	0,666 7	622,5	640,0
100	72	0,500 0	607,6	606,6
100	60	0,416 7	597,2	592,6
80	60	0,333 3	586,7	579,2
60	60	0,250 0	571,4	550,5
60	40	0,166 7	549,1	522,5
40	30	0,083 3	507,5	481,2
30	20	0,041 7	460,9	449,2
20	15	0,020 8	408,9	423,1
12	10	0,008 3	335,4	343,6
0	0	0,000 0	307,7	320,0

Die Spalten b_2 und h_2 enthalten die Seitenflächen der obern Öffnung der Pfeife. Wie die Tabelle zeigt, stimmen auch hier die berechneten Zahlen mit den beobachteten ziemlich gut überein, indes doch nur soweit, dafs wir die von Wertheim gegebene Relation nur als eine angenähert richtige betrachten dürfen.

Die letzten Erfahrungen zeigen, dafs die einfache von uns vorgetragene Theorie der Luftschwingungen in Pfeifen nur für sehr enge Röhren Gültigkeit hat, dafs sobald der Querschnitt der Röhren einigermafsen grofs ist, die anzubringenden Korrektionsglieder sehr beträchtlich sind. Es tritt das noch mehr hervor, wenn die Länge der Pfeifen gegen die Dimensionen des Querschnitts nicht mehr sehr grofs ist, wenn die Länge der Pfeife nicht gröfser oder gar kleiner ist als die Breite der Röhre oder bei cylindrischen Röhren, als der Durchmesser. Würde man bei solchen Röhren den Ton einfach aus der Länge berechnen, so würde man ihn oft mehr als eine Oktave höher finden, als der Versuch ihn ergibt. Für derartige Röhren läfst sich indes wiederum mit sehr grofser Annäherung die Tonhöhe nach den Wertheimschen Gleichungen berechnen, wie sich aus einer grofsen Anzahl von Versuchen, welche Wertheim mit Röhren der verschiedensten Form angestellt und in der schon mehrfach citierten Abhandlung mitgeteilt hat, deutlich ergibt. Wir begnügen uns hier damit, um zu zeigen, wie weit die Versuche mit den Formeln Wertheims übereinstimmen, eine Versuchsreihe an Holzpfeifen mitzuteilen. Die Pfeifen waren Röhren von rechteckigem Querschnitt, deren Länge 350^{mm} und deren eine Seite des Querschnitts $H = 200^{mm}$ betrug. Parallel dieser Seite konnten in den Kasten Schieber eingesetzt werden, welche so den Querschnitt der Röhre zu ändern gestatteten, indem man die Breite B desselben verkleinerte. Die Röhre war unten geschlossen, oben offen, und der obere offene Querschnitt konnte durch einen parallel der Kante H beweglichen Schieber, der die ganze Breite der Röhre einnahm, mehr oder weniger verkleinert werden. Die Pfeife wurde dann durch ein mit einem platten Mundstück von Messing versehenes Blaserohr, ähnlich wie Fig. 267, und in der dort dargestellten Weise angeblasen.

In nachfolgender Tabelle gibt die mit h überschriebene Spalte d
Seite H parallele Ausdehnung der Öffnung, deren Breite b immer
jener der Röhre war. Die zur Berechnung der Töne benutzte Konst
ist $= 0{,}240$, da die Pfeife von Holz war.

Töne kubischer Pfeifen.

h	$\frac{s}{S}$	Breite $B = 200^{mm}$ Schwingungszahl		Breite $B = 100^{mm}$ Schwingungszahl		Breite $B = 5$ Schwingungsz	
		berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beob
200	1,000	382,5	382,1	404,3	404,4	416,2	41
180	0,900	374,3	379,8	397,2	398,7	409,9	40
160	0,800	365,0	364,7	389,5	384,4	403,0	40
140	0,700	355,2	353,1	381,0	381,0	395,4	38
120	0,600	344,3	336,8	371,6	368,9	386,9	36
100	0,500	332,0	314,5	361,6	358,5	377,2	35
80	0,400	317,7	304,0	348,0	348,8	365,5	33
60	0,300	299,9	299,4	334,5	336,3	350,5	31
40	0,200	276,2	264,5	309,8	281,3	329,8	28
20	0,100	237,2	224,6	272,2	261,2	293,8	26
10	0,050	199,8	203,2	234,4	220,7	256,6	24

Für sehr kleine Mundöffnungen weichen die beobachteten und be
neten Zahlen nicht unbeträchtlich von einander ab, für gröfsere M
öffnungen stimmen die Resultate ziemlich gut.

Als ein allgemeines Resultat ergibt sich aus diesen Versuchen,
die Töne kubischer Pfeifen mit abnehmendem Volumen der Röhre l
werden, und weiter läfst sich aus den Versuchen und der Formel Wert
der Satz ableiten, dafs bei ähnlichen Formen der Pfeife und der M
öffnung die Töne der Pfeife sich umgekehrt verhalten wie die Längen
homologen Seiten.

Es genüge an diesen kurzen Andeutungen über das Verhalten kubi
Pfeifen[1]), da dieselben ausreichend sind, in den wenigen Fällen, in d
wir diese Pfeifen benutzen, uns die erforderliche Kenntnis derselbe
liefern. Das ergibt sich aus diesen Erfahrungen zur Genüge, dafs die
fache Theorie der Pfeifentöne zur Bestimmung derselben nicht ausre
und zwar deshalb nicht, weil die in Pfeifen schwingenden Luftsäulen n
so isolierte für sich schwingende Körper sind, wie longitudinal schwing
Stäbe, weil vielmehr die schwingende Bewegung auch der aufserhalb
Pfeifen vorhandenen Luft sich mitteilt und dadurch die Schwingungen
Luftsäulen in den Pfeifen selbst modificiert wird.

Helmholtz[2]) hat deshalb die Theorie der Luftschwingungen in Rö
einer neuen Behandlung unterzogen, bei welcher auf den eben her
gehobenen Umstand, dafs die Luftsäule in Röhren nicht ein ganz selbstä

[1]) Man sehe auch *Sondhauss*, Poggend. Ann. Bd. LXXIX und LX
Masson, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome XL. *Zamminer*, Pogg
Annalen. Bd. XCVII.

[2]) Helmholtz, Crelles Journal. Bd. LVII. p. 1.

wingender Körper ist, Rücksicht genommen ist. Er behandelt gleich-
ig die Schwingungen im Innern der Röhre und in der umgebenden Luft,
es ist ihm dadurch gelungen, mehrere der vorhin besprochenen Er-
rungen teils theoretisch zu begründen, teils näher zu bestimmen. Es ist
indes durch die hier uns gesteckten Grenzen versagt, auf diese Unter-
hungen Helmholtz's näher einzugehen.

Das Tonbildende in den Pfeifen ist die schwingende Luftsäule, die
nde der Pfeifen dürfen deshalb auf die Tonhöhe von keinem wesentlichen
lufs sein. So lange die Wände aus ganz festem Material bestehen, ist
auch nicht der Fall, die Tonhöhe ist wesentlich dieselbe in metallischen,
ernen oder hölzernen Pfeifen.

Sind jedoch die Wände der Pfeifen nicht aus festem Material, so ändern
die Höhe des Tones ab, und zwar wird der Ton bei weichen Wänden
er. Savart[1]) hat gezeigt, dafs Pfeifen mit Pergamentwänden tiefer tönen
solche mit starren Wänden, und dafs der Ton um so tiefer wird, je
r man die Wände durch Benetzen erschlafft. Dasselbe zeigte Liscovius[2]),
cher gleichzeitig nachwies, dafs man durch verstärkte Spannung des
gaments den Ton erhöhe. Wird eine Pergamentwand derart gedrückt,
sie nicht mitschwingen kann, wenn die Luftsäule schwingt, so gibt
Pfeife denselben Ton als eine solche mit starren Wänden.

Gerade dieser letzte Versuch beweist, dafs der Einflufs einer nicht ganz
en Wand darin begründet ist, dafs die Wand gleichzeitig mit der Luft-
e schwingt, und dafs die Schwingungszahl der Luftsäule dadurch, dafs
schwingende Wand auf sie einwirkt, eine andere wird. Die Einzeln-
en der Erscheinung lassen sich indes noch nicht näher übersehen.

Wenn feste Wände auf die Tonhöhe keinen Einflufs haben, so sind
doch von wesentlicher Bedeutung für den Klang der Pfeifen[3]). Bei
en cylindrischen oder rechteckigen offenen Pfeifen bildet sich neben dem
ndton auch die Reihe der harmonischen Töne in ähnlicher Weise wie
den gestrichenen Saiten aus, deshalb haben sie einen vollen und schär-
, dem der gestrichenen Saiten ähnlichen Klang, bei weiteren offenen
fen, den Principalstimmen der Orgel, besonders den hölzernen, tritt nur
Oktave noch deutlich zum Grundton, die höhere fast gar nicht, deshalb
der Ton dieser Pfeife viel dumpfer. Die gedeckten Pfeifen geben die
e 1, 3, 5 ..., indes sind die Obertöne nur bei engen Pfeifen deutlich,
weiten tritt fast nur der Grundton auf, woher der dumpfe Klang der
eckten Register rührt.

Der Klang in Holzpfeifen ist immer dumpfer und weicher als in Metall-
fen, hauptsächlich, weil die rascheren Schwingungen der Obertöne sich
Holz mitteilen und deshalb rasch verschwinden.

§ 163.

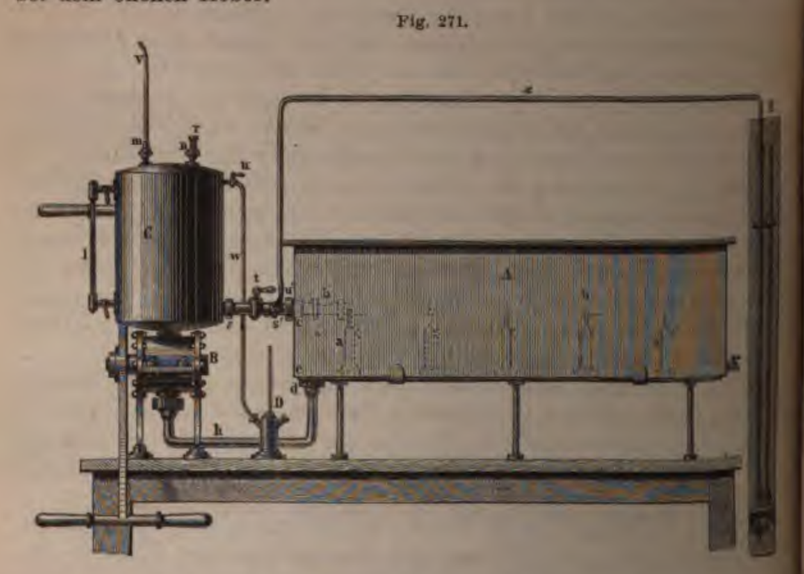
Töne durch Schwingung von Flüssigkeitssäulen. Wir haben er-
nt, dafs man durch einen Flüssigkeitsstrom, der durch die durchlöcherte
ibe einer in eine Flüssigkeit getauchten Sirene getrieben wird, einen

1) *Savart*, Annales de chim. et de phys. T. XXX.
2) *Liscovius*, Poggend. Ann. Bd. LVII.
3) *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 150.

Ton erzeugen kann. Cagniard Latour und später in noch ausgezeichneter Weise Wertheim ist es gelungen, in Flüssigkeiten stehende Wellen und dadurch Töne hervorzubringen.

Cagniard Latour[1]) brachte Flüssigkeitssäulen, welche in Glasröhren eingeschlossen waren, dadurch zum Tönen, dafs er die Glasröhren longitudinal rieb. Die Höhe des erzeugten Tones bewies, dafs nicht die longitudinalen Schwingungen des Glases es waren, welche gehört wurden, sondern die der Flüssigkeitssäule. Er wies durch den Versuch nach, dafs der Ton die höhere Oktave ist, wenn die Röhre an beiden Seiten offen, die Flüssigkeitssäule also an beiden Enden frei ist, von dem Tone, den eine Flüssigkeitssäule gibt, welche in einer an einem Ende geschlossenen Röhre schwingt, deren eines Ende also an einer festen Wand anliegt. Die Töne einer an beiden Enden freien Flüssigkeitssäule konnten nicht dadurch erhalten werden, dafs man eine an beiden Enden offene Röhre einfach in Wasser tauchte und longitudinal rieb, sondern wurden dadurch erzeugt, dafs man ein Rohr heberförmig, gleichschenkelig bog und dann longitudinal rieb. Wurde das eine Ende des Hebers zugeschmolzen und derselbe bis zur gleichen Höhe mit Wasser gefüllt, als der offene, so war der Ton eine Oktave tiefer als bei dem offenen Heber.

Fig. 271.



Auch gelang es Cagniard Latour eine Pfeife unter Wasser zum Tönen zu bringen. Dies gelang aber in viel vollkommenerer Weise Wertheim, der in einer mit Flüssigkeit gefüllten Röhre durch einen Flüssigkeitsstrom den Grundton und die harmonischen Töne erzeugte[2]).

Der Apparat, welchen Wertheim zu seinen Versuchen mit Wasser verwandte, ist Fig. 271 abgebildet.

---

1) *Cagniard Latour*, Annales de chim. et de phys. LVI.

2) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome [illegible] Poggend. Ann. Bd. LXXVII.

Die offene Orgelpfeife bb liegt horizontal auf den Stützen a in dem grofsen gefüllten Wasserbehälter A. Der Fufs der Pfeife ist in c angeschraubt an eine in der Wand befestigte Mutter, welche der Pumpe gegenübersitzt. Eine Ventilpumpe B, welche durch den davor befindlichen Hebel getrieben wird, saugt die Flüssigkeit durch das weite Rohr h aus dem Behälter und pumpt sie in das davorstehende Reservoir C.

Das Innere des Reservoirs C steht durch den Hahn m und das Rohr v mit grofsen Gefäfsen voll komprimierter Luft in Verbindung. Durch den Druck dieser Luft bei geöffnetem Hahn m wird das im Behälter C angesammelte Wasser durch den Hahn t und das Rohr ss' in die unter Wasser befindliche Pfeife getrieben. Mittels des Hahnes t ist man imstande, den Zuflufs des Wassers beliebig zu regulieren.

Auf dem Behälter C befindet sich noch ein zweiter Hahn n, der geöffnet die komprimierte Luft des Behälters in die Atmosphäre entweichen läfst, und auf den man bei r eine Sirene aufstellen kann, um die absolute Schwingungszahl des in der Wasserpfeife gehörten Tones, also die Tonhöhe, zu bestimmen. Aufserdem dient dieser Hahn dazu, Versuche mit gewöhnlichen Orgelpfeifen in Luft anzustellen.

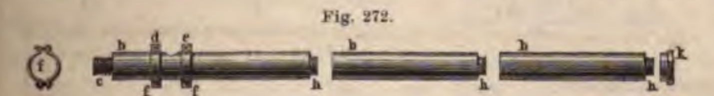
Um den Druck zu messen, unter welchem das Wasser in die Pfeifen eintritt, kommuniciert die Röhre ss' durch den Hahn u' und die Röhrenleitung x mit dem Manometer E und aufserdem die Luft im Gefäfse C durch den Hahn u und die Röhre uw mit dem Manometer D.

Ist nun der Apparat eingerichtet, so beginnt man die Versuche damit, dafs man bei geschlossenen Hähnen m, n, t, mittels der Pumpe B Wasser aus dem Behälter A in den Behälter C pumpt. Ist die Wassermasse dort hinreichend, so setzt man den Behälter C durch Öffnen des Hahnes m mit den mit komprimierter Luft gefüllten Behältern in Verbindung. Der Druck dieser Luft ist es dann, der bei geöffnetem Hahne t das Wasser in die Orgelpfeife treibt und ferneres Pumpen während des Versuches dient nur dazu, das Wasser in C auf konstantem Niveau zu erhalten.

Damit die Versuche gelingen, mufs auf die Konstruktion der Orgelpfeife besondere Aufmerksamkeit verwandt werden.

Wertheim wandte dazu die aus mehreren Stücken zusammengesetzte Pfeife (Fig. 272) an. Das erste Stück besteht aus der Schraube c, passend

Fig. 272.



für die Mutter bei c im Behälter A (Fig. 271) geschnitten, in deren Innern ein feines Drahtnetz angebracht ist, um zu verhindern, dafs allenfalls feste im Wasser schwebende Körperteilchen in die Pfeife eintreten können, ferner aus dem Mundstücke d und der Röhre b, an deren Ende sich der Schraubengang h befindet, um daran die folgenden Röhrenstücke b oder den Deckel k anzuschrauben. Die beiden Labien des Mundlochs bestehen aus den Platten d und e, welche mit den Klammern f befestigt werden.

Man kann die Platten, welche die Labien bilden, nicht sogleich durch Löten unveränderlich fest mit der Pfeife verbinden, da die Stellung der Labien von wesentlichem Einflufs auf die Leichtigkeit ist, mit der die Pfeife

anspricht, und man deshalb durch den Versuch erst die Lage ermi
mufs, bei der die Pfeife in den Flüssigkeiten tönt. Für Flüssigkeiten
im allgemeinen der Aufschnitt weniger breit und lang sein als für
das Licht, die Mündung des Fufses in der Pfeife gröfser und der S
etwas mehr gegen das Innere der Pfeife gerichtet sein.

Mit diesem Apparate ist es Wertheim gelungen, Orgelpfeifen i
Wasser mittels eines Wasserstromes zum Tönen zu bringen, und er
wie es nach § 147 zu erwarten ist, dafs die Töne derselben Reihe fo
wie bei Pfeifen, welche mit Luft angeblasen werden. Bei offenen Pfe
nur diese gaben ein gutes Resultat, waren die Töne

$$\begin{array}{cccccc} c_{-1} & c & g & c_1 & e_1 & g_1 \; \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Die Schwingungszahlen allgemein

$$N = n \frac{c}{2l},$$

wenn l die Länge der Pfeife bedeutet. Oder vielmehr genauer

$$N = \frac{c}{2(l + x + y)},$$

das heifst, es mufsten dieselben Berichtigungen angebracht werden,
bei den in Luft angeblasenen Pfeifen.

Für c erhielten wir § 146

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

oder, wenn wir E durch die von Grassi bestimmten Kompressionskoeffi
ten μ ausdrücken, denen der Druck einer Atmosphäre zu Grunde liegt,

$$c = \sqrt{\frac{Hg\sigma}{\mu s}}.$$

Für Wasser ergab sich so § 146

$$c = 141\,800^{\text{cm}} = 1418^{\text{m}}.$$

Die Schwingungszahl N des Grundtones einer offenen Pfeife von
Länge l sollte demnach sein

$$N = \frac{1418}{2l}.$$

Die Versuche von Wertheim gaben indes einen viel kleinern W
die Töne waren tiefer, als sie hiernach sein sollten und zwar so, dafs
beobachtete Schwingungszahl N' war

$$N' = \sqrt{\frac{2}{3}}\, N.$$

Wir werden auf diese Abweichung im nächsten Kapitel zurückkom
hier genüge die Bemerkung, dafs nach der Ansicht von Wertheim
Gröfse c, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudi
Wellen in dem Wasser bedeutet, hier einen andern Wert hat als de
uns berechneten, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine andere

ssigkeitssäulen, wie in Orgelpfeifen, als in einer unbegrenzten Flüssigit und zwar, dafs die Geschwindigkeit c' in Flüssigkeitssäulen gleich ist

$$c' = \sqrt{\frac{2}{3}}\, c.$$

§ 164.

Von den Zungenpfeifen. Die gewöhnlichen Zungenpfeifen unterieiden sich von den Labialpfeifen dadurch, dafs die Schwingungen nicht rch einen sich teilenden Luftstrom, sondern ähnlich wie bei der Sirene rch einen intermittierenden Luftstrom erregt werden. Die Zungenpfeife g. 273 und 274) besteht aus dem ndstück oder Rohrwerk $abcd$, welches dem Fufse der Pfeife F sich befindet l welches, wie Fig. 273 zeigt, in die ndung der meist kegelförmig nach n sich erweiternden Röhre R hineinsteckt ist.

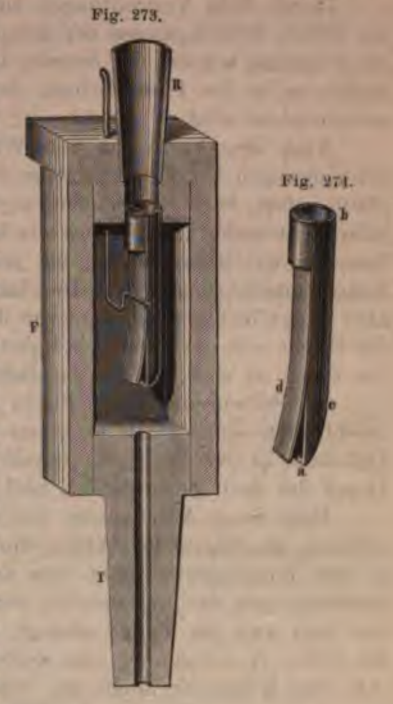


Fig. 273. Fig. 274.

Das Rohrwerk besteht aus einem lbcylinder von starkem Messingblech, an seiner Basis bei a geschlossen, n jedoch offen ist (Fig. 274). Die nittfläche des Messinghalbcylinders durch eine ebene Metallplatte bedeckt, lche jedoch nur ungefähr auf $\frac{1}{3}$ der nge der Röhre fest und von da ab beweglich ist und als schwingende nge in die Höhlung des Cylinders ein und heraus treten kann wie . 274, oder die Öffnung des Cylinders n Hin- und Herschwingen öffnen und schliefsen kann wie Fig. 273. Die rwerke der erstern Art mit durchagender Zunge, welche einen weniger hen Ton geben als die Rohrwerke der iten Art mit aufschlagender Zunge, ssen so gearbeitet sein, dafs die Zunge n Eintreten in den Messingcylinder das Rohr vollkommen verschliefst, e die Ränder der viereckigen Öffnung zu berühren. Im ruhenden Zuide ist die Zunge so gebogen, dafs sie etwas von den Rändern der Öffnung teht, so dafs die Luft des Fufses F mit derjenigen im Innern des singrohres und des Schallbechers der Röhre R kommuniciert. Der Fufs F rings, aufser an der Durchtrittsstelle des Rohres r, welches den Luftm aus dem Windkasten eintreten läfst, geschlossen. Die Röhre R ist n stets offen, damit die durch das Rohrwerk eintretende Luft entchen kann.

Um die Zungenpfeife zum Tönen zu bringen, setzt man das Rohr r den Kanal einer Windlade und läfst Luft einblasen. Die in den Fufs Pfeife eintretende Luft dringt dann zunächst durch die von der Zunge

gelassene Spalte in die Pfeife ein; allein da nicht schnell genug alle Luft durch diese Spalte dringen kann, verdichtet sich dieselbe im Fufs und treibt die Zunge in die Röhre hinein, so dafs auf einen Augenblick die Röhre ganz geschlossen ist und keine Luft aus dem Fufse mehr in die Röhre dringen kann. Durch das erste Eindringen der Luft in die Röhre gerät die Luft in derselben in Schwingung, und die Zunge dringt dann so weit in die Röhre ein, bis ihre eigene Elasticität und der von der schwingenden Bewegung der Luft in der Röhre sie treffende Impuls sie zurücktreibt, so dafs sie die Öffnung von neuem frei läfst. Darauf wird dann neuerdings die Zunge an oder in die Röhre und wieder zurückgetrieben und das Spiel wiederholt sich so lange als der Luftstrom anhält.

Durch diese Vorrichtungen entstehen also Schwingungen der Luft in der Röhre, Schwingungen der Zunge und ebenso ein intermittierender Luftstrom gerade wie bei der Sirene, indem bei jeder Öffnung des Rohres ein Luftstrom in die Pfeife dringt, bei jedem Schlusse desselben der Strom unterbrochen wird.

Nach den Versuchen von Wilhelm Weber[1]) sind es nun weder die Schwingungen der Platte, welche den lauten und starken Ton der Zungenpfeife geben, noch die Schwingungen der Luftsäule, sondern die Stöfse des intermittierenden Luftstromes wie bei der Sirene, der bei jeder Öffnung der Zunge in das Rohr eintritt, bei jedem Verschliefsen des Rohres durch die Zunge unterbrochen wird. Die Zahl der Luftstöfse und somit die Tonhöhe aber hängt in der Pfeife nur von den Schwingungen der Zunge ab, wie in der Sirene von der Geschwindigkeit der Scheibe, indem die Schwingungen der Zunge es sind, welche das Rohr abwechselnd öffnen und schliefsen.

Die Schwingungen der Platte werden aber aufser durch die Elasticität derselben wesentlich mit bestimmt durch die stehenden Schwingungen der Luftsäule in der Pfeife R, durch den abwechselnd zu- und abnehmenden Druck der dort schwingenden Luft.

Dafs diese Anschauung von der Tonbildung in der Zungenpfeife die richtige ist, begründet Weber durch folgende Versuche. Würde der Ton in der Zungenpfeife nicht von den Stöfsen der Luft, sondern von den Schwingungen der Luftsäule in der Pfeife oder den vereinten Schwingungen der Luft und der Zunge erzeugt, so müfste der Ton aufhören, wenn man die Röhre R fortnähme; man weifs aber, dafs das nicht der Fall ist. Bläst man das Rohrwerk allein an, wie es z. B. in der Mundharmonika immer geschieht, so ist der Ton der Höhe nach fast ganz derselbe, seinem Klange nach völlig derselbe, als wenn eine kurze Luftsäule mit schwingt.

Dafs der Ton nicht von den Schwingungen der Platte herrührt, ergab sich daraus, dafs wenn die Platte mit dem Violinbogen gestrichen wurde, also ohne die Luftstöfse in Schwingungen versetzt wurde, ein nur ganz schwacher und in unmittelbarer Nähe hörbarer Ton entstand, der keinenfalls mit dem vollen und starken Tone der Zungenpfeife vergleichbar war. Selbst als er die Zunge vor einer Röhre in Schwingung versetzte, in der die stehenden Schwingungen der Luft denselben Ton gaben wie die Zunge, fand Weber den Ton nur matt und viel schwächer.

Also nur durch den intermittierenden Luftstrom, durch die von diesem

[1]) *W. Weber*, Poggendorffs Annalen. Bd. XVI.

e bei der Sirene erzeugten und durch die umgebende Luft fortgepflanzten öfse entsteht jener laute und volle Ton, welcher bei dem Anblasen der ngenpfeife gehört wird.

Da indes ein Stofs nur beim Öffnen des Rohres entsteht, so sind die öfse mit den Schwingungen der Zunge gleichzeitig und man kann aus der he des gehörten Tones auf die Schwingungszahl der Zunge schliefsen d diese mit den Schwingungen vergleichen, welche die für sich schwingende atte vollführen würde. Eine solche Vergleichung beweist dann den zwei- n Satz von Weber, dafs die Schwingungen der Zunge bedingt werden rch die eigene Elasticität der Zunge und durch die in der Röhre auf- tenden stehenden Schwingungen der Luftsäule. Die Tonhöhe und somit e Schwingungszahl der Platte wird nämlich eine andere, wenn verschieden nge Röhren mit der Zunge zur Pfeife verbunden sind.

Um die Änderungen der Tonhöhe zu erkennen, ist es notwendig zu achten, dafs die Pfeife auf doppelte Weise zum Tönen gebracht werden nn, durch Blasen von unten, so dafs also in dem Fufs F der Pfeife die uft dichter ist als im Innern der Pfeife und durch Saugen von unten oder asen von oben, so dafs die Luft aufserhalb der Röhre im Fufse F der eife dünner ist als innerhalb.

Der Vergleich der Töne der Zungenpfeife mit dem Tone der isoliert hwingenden Zunge ergibt nun folgendes.

1) Ist die Pfeife so lang, dafs die in ihr erregten stehenden Schwingungen nau den Ton der isoliert schwingenden Zunge geben, so wird durch den nsatz der Pfeife an das Rohrwerk der Ton seiner Höhe nach nicht wesent- h anders als der Ton der isoliert schwingenden Zunge. Es ist das sowohl r Fall, wenn der Grundton der Röhre, als wenn einer ihrer harmonischen bertöne mit dem Tone der Zunge übereinstimmt. Ist also l die Länge der öhre, deren Grundton mit dem Tone der Zunge gleiche Höhe hat, so hat der zweite Ton der Röhre $2l$, der dritte derjenigen von der Länge u. s. f. Alle diese Röhren, deren Länge l oder irgend ein Vielfaches n l ist, ändern mit dem Rohrwerke zur Zungenpfeife verbunden die Höhe s Tones, den die Zunge für sich geben würde, nicht ab, die Schwingungen r Zunge erfolgen also unter vereinigter Wirkung der Elasticität der Zunge d der wechselnden Drucke der Luft gerade so, als bewegte sie sich nur olge ihrer eigenen Elasticität. Das ist sowohl der Fall, wenn die Pfeife rch Blasen, als wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Hat die Röhre aber irgend eine andere Länge als l, $2l$, $3l$ ... so wird Tonhöhe der Zunge geändert, sie wird tiefer, die Schwingungszahl iner, die Schwingungsdauer gröfser, wenn die Pfeife durch Blasen zum nen gebracht wird, sie wird höher, die Schwingungszahl gröfser, die uer kleiner, wenn die Röhre durch Saugen zum Ansprechen gebracht wird.

Setzt man eine kurze Röhre an die Zunge, so wird beim Anblasen von ten der Ton nur unmerklich tiefer, wenn man die Röhre bis zu $\frac{1}{4}l$ ver- gert, bei weiterm Verlängern wird er merklich tiefer, bis die Länge der hre $\frac{1}{2}l$ ist, bei noch weiterm Verlängern sinkt der Ton immer rascher $\frac{3}{4}l$, fast ebenso rasch als die Länge der Röhre zunimmt, und zwischen und l sinkt die Tonhöhe der Verlängerung proportional. Ist die Länge Röhre nahe l, so ist der Ton fast eine Oktave tiefer als der Ton der sich schwingenden Zunge.

So fand Weber bei einer Zunge, welche denselben Ton gab als eine Pfeife von 195,3 Pariser Linien oder 44,1 Centimeter, nämlich das eingestrichene g, folgende Tonreihe, als die Zunge mit Röhren von den daneben angegebenen Längen zur Pfeife verbunden angeblasen wurde:

Länge der Röhre	Ton	Länge der Röhre	Ton
1″ 6‴ $< \frac{1}{4} l$	g_1	9″ 4‴ $> \frac{1}{2} l$	d_1
2″ 1‴ "	g_1	10″ 9‴ "	c_1
3″ 5‴ "	g_1	12″ 3‴ $> \frac{3}{4} l$	*ais*
4″ 9‴ $> \frac{1}{4} l$	fis_1	13″ 8‴ "	*gis*
6″ 11‴ "	f_1	14″ 7‴ "	g
7″ 10‴ "	e_1		

Bei weiterer Verlängerung sprang der Ton zum eingestrichenen g zurück, so daſs bei der Länge l der Ton der Pfeife wieder das eingestrichene g_1 war.

Wurde das Rohr über l hinaus verlängert, so war zwischen l und $2l$ der Gang des Tones derselbe, nur reichte die Vertiefung viel weniger weit. Die gröſste Vertiefung nahe bei $2l$ betrug eine Quarte. Die von Weber beobachteten Töne waren folgende:

Länge der Röhre	Ton	Länge der Röhre	Ton
16″ 2‴ $= l$	g_1	27″ $> \frac{6}{4} l$	e_1
19″ 4‴ $> l < \frac{5}{4} l$	g_1	28″ 10‴ $> \frac{7}{4} l$	dis_1
21″ 4‴ $> \frac{5}{4} l$	fis_1	30″ 9‴ $> \frac{7}{4} l$	d_1
24″ $> \frac{5}{4} l$	f_1	32″ $> \frac{7}{4} l$	d_1.

Bei einer Länge von etwas über $2l$ wurde zuweilen noch cis_1 erhalten, sonst sprang der Ton bei $2l$ wieder zu g_1 zurück. Wurde die Röhre von $2l$ auf $3l$ verlängert, so sank der Ton wieder anfangs langsamer, dann rascher bis zur tiefern Terz, in den Weberschen Versuchen bis zum eingestrichenen e_1.

Man erkennt darin ein bestimmtes Gesetz, nach welchem die Tonhöhe durch den Ansatz der Röhren sich ändert. Jedesmal, nachdem die Röhre um l verlängert ist, springt der Ton zurück, vor dem ersten Sprunge war er um eine Oktave, vor dem zweiten um eine Quart, vor dem dritten um eine Terz vertieft, so daſs also das Schwingungsverhältnis vor und nach dem Sprunge sich verhielt

beim ersten Sprunge wie 1 : 2
" zweiten " " 3 : 4
" dritten " " 5 : 6,

vor den folgenden Sprüngen würde er demnach so vertieft sein, daſs die Töne vor und nach dem Sprunge sich verhielten wie 7 : 8, dann wie 9 : 10 und so weiter. Für einige weitere Sprünge bestätigen die Versuche von Weber das Gesetz.

Weber folgert aus diesen Erscheinungen, daſs wirklich die Luft in den Zungenpfeifen in stehende Schwingungen gerät. Denn zunächst tritt es hervor, daſs jedesmal dann, wenn die Röhre die Länge l oder ein Vielfaches von l besitzt, die Schwingungen der Röhre also mit denen der Zunge zusammenfallen, der Ton wieder seine ursprüngliche Höhe erhält. Ähn-hes ist auch bei den übrigen Tönen der Fall, auch dort bilden sich in Röhre schwingende Abteilungen und jedesmal, wenn die Röhre um eine

schwingende Abteilung gröfser geworden ist, wird der Ton der Zungenpfeife auch wieder derselbe, und zwar ist die Länge dieser schwingenden Abteilungen gleich der Länge der in stehenden Schwingungen befindlichen Luftsäule, welche dieselbe Schwingungszahl haben würde.

Setzen wir nämlich in Pariser Fufsen die Gröfse c des § 162, welche uns durch

$$N = \frac{c}{2l}$$

die Schwingungszahl der Luftsäule einer offenen Pfeife von der Länge l gibt,

$$c = 1052,$$

so erhalten wir als Länge der Röhre, welche den Ton g_1 gibt, den Weber zu 388 Schwingungen in der Sekunde bestimmte,

$$l = \frac{1052}{776} = 1{,}356 \text{ Fufs} = 193{,}3 \text{ Linien.}$$

Für die tiefern Töne bestimmte Weber nun ebenfalls die Schwingungszahlen und zugehörigen Röhrenlängen und verglich dann die Längen der Zungenpfeifen, bei denen diese Töne jedesmal auftraten. So fand er z. B., dafs ein Ton auftrat von 365 Schwingungen bei der Länge der Röhre 87,3 Linien, dann bei 293,0 und 504,0 Linien, also jedesmal, wenn die Länge der Röhre um 205,7 und um 416,7 Linien zugenommen hatte. Berechnen wir nun aber die Länge l der diesen Ton gebenden offenen Röhre, so wird

$$l = \frac{1052}{730} = 1{,}441 \text{ Fufs} = 207{,}5 \text{ Linien.}$$

Die beobachteten Längenzunahmen weichen von diesem berechneten l und $2l$ nur um 1,9 und 1,5 Linien ab, erstere ist um so viel zu klein, letztere zu grofs.

Man sieht also, wie die Luftsäule der Röhre in gleichzeitige Schwingungen mit denen der Zunge versetzt wird, indem jedesmal, wenn die Länge der Röhre um die Länge einer mit dem Tone gleichen stehenden Welle vergröfsert wird, derselbe Ton wiederkehrt.

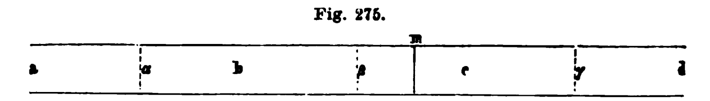
Der Vorgang der Bewegungen in den Zungenpfeifen wird durch diese Erfahrungen so festgestellt, wie wir ihn vorhin aussprachen. Der Ton rührt her von dem intermittierenden Luftstrome, der durch das abwechselnde Öffnen und Schliefsen der Zunge hervorgebracht wird. Die Schwingungen der Zunge werden aber bedingt durch die Elasticität der Zunge und die mit den Schwingungen der Zunge isochronen und synchronen Schwingungen der Luftsäule in den Pfeifen. Diese ändern die Schwingungsdauer der Zunge ab und bewirken, dafs dieselbe entweder langsamer schwingt, wenn die Pfeife angeblasen wird, oder rascher als die Zunge allein, wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Um diese Wechselwirkung der schwingenden Luftsäule und der sch[illegible] den Platte zu verstehen, denken wir uns mit W. Weber[1]) eine Zu[illegible] wo die Zunge in einer zur Längsaxe der Röhre senkrechten Pla[illegible] Sei ad (Fig. 275) eine an beiden Seiten offene Röhre, der[illegible]

[1]) *W. Weber*, Poggendorffs Annalen. Bd. XVII.

in stehende Schwingungen versetzt ist, so dafs bei α, β, γ Schwingungsknoten und bei a, b, c, d Schwingungsmaxima sich befinden; bei m sei in derselben eine Zunge, welche, wie in den Zungenpfeifen, genau dieselben Bewegungen besitzt, wie eine an dieser Stelle befindliche Luftschicht, wenn wir eine einfache offene Röhre hätten. Eine solche Platte wird die Schwingungen der Luft durchaus nicht stören, wenn sie unserer Annahme gemäfs wegen ihrer eigenen Elasticität und wegen des, sie gerade so wie eine dort befindliche Luftschicht treffenden, Druckes der mitschwingenden Luft genau dieselbe Bewegung besitzt, als eine dort befindliche Luftschicht. Wenn

Fig. 275.



aber eine solche Platte sich in m befindet, so kann die Luft sowohl in dem Röhrenstücke md gerade so schwingen als vorher, wenn das Röhrenstück ma ganz fortgenommen ist und die Platte m die Rolle einer Zunge in der Zungenpfeife spielt, als auch in der Röhre ma, wenn das Stück md ganz fortgenommen wird. Diese beiden Zungenpfeifen werden dann genau denselben Ton geben, da die Schwingungen in beiden gleich sind, obwohl sie verschiedene Längen haben; die Pfeife ma aber nur, wenn sie von innen, die Pfeife md, wenn sie von aufsen angeblasen wird.

In den Schwingungsknoten der stehenden Schwingungen ist die Luft immerfort in Ruhe, in den Längen $\alpha\beta$ . . hat die Luft eine hin und her gehende Bewegung, so dafs sie z. B. zugleich von α und γ sich nach β und in der folgenden Zeit von β nach α und γ hin bewegt. Dabei haben dann die Teilchen a, b, c, d die schnellste Bewegung und die gröfsten Exkursionen, in α, β und γ dagegen treten abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen der Luft ein.

Wenn wir statt der ganzen Röhre ad nur das mit der Zunge m verschlossene Stück md nehmen, so mufs, wenn die Bewegung genau so bleiben soll wie vorher, durch Anbringen der Zunge also keine Änderung stattfinden soll, die Zunge m nach aufsen schwingen, wenn die Luftteilchen zwischen m und γ nach aufsen schwingen, wenn also bei nicht vorhandener Zunge bei β eine Verdichtung einträte; dagegen nach innen, das heifst sie mufs die Röhre verschliefsen, wenn die Luft zwischen m und γ nach innen schwingt, also bei γ eine Verdichtung eintreten würde.

Wenn wir dagegen das mit der Zunge m verschlossene Röhrenstück ma nehmen, so bewegt sich dort die Zunge nach aufsen, das heifst sie öffnet die Röhre, wenn bei β und auf der Strecke βc eine Verdünnung eintritt, indem auch dann die Schwingungen der Platte mit denen der durch sie ersetzten Luftschicht gleich sein müssen. Im ersten Falle öffnet sich daher die Zunge, wenn vor ihr bei β und in ihrer ganzen Umgebung, da auch die Strecke $c\beta$ dann verdichtet wird, eine Verdichtung eintritt; im zweiten Falle aber, wenn die Luftschwingungen verdünnend sind, wenn bei m eine Verdünnung der Luft eintritt.

Wenn wir eine Zungenpfeife anblasen, das heifst die Luft in dem Behälter des Fufses F verdichten, so folgt aus dem Vorigen, dafs die Peife sich verhalten mufs wie die Röhre md, dafs die Röhre sich öffnen mufs,

enn die Schwingungen der Luft in der Nähe der Platte verdichtende sind; nn wenn die Schwingungen in der Pfeife *md* ganz dieselben sein sollen ie in der offenen Pfeife *ad*, so mufs die die Zunge umgebende Luft sich rade so verhalten, wie die an ihrer Stelle befindliche Luft in der offenen eife.

Blasen wir aber die Pfeife von innen an oder bringen wir sie durch ugen zum Tönen, das heifst machen wir die Luft im Behälter des Fufses nner als im Innern der Pfeife, so mufs die Öffnung der Pfeife mit einer rdünnenden Schwingung der Luftsäule zusammenfallen, die Luft mufs, e bei dem mit der Zunge verbundenen Röhrenstücke *ma*, in der Umgebung r Zunge dünner werden, sie mufs sich von dem Schwingungsknoten β rtbewegen, wenn die Zunge die Röhre öffnet. Denn auch hier wieder ufs die Luft in der Umgebung der Zunge sich gerade so verhalten, wie unserer Pfeife *ad*, wenn die Zunge *m* die Pfeife *ma* abschliefsen und e Bewegung doch die frühere bleiben soll.

Es folgt also daraus, dafs, wenn eine Zungenpfeife durch Blasen zum nsprechen gebracht wird, im Innern der Pfeife der Zunge ein Schwingungs-aximum zunächst liegt, wenn aber durch Saugen, ein Schwingungsknoten r Zunge zunächst liegt.

Diese Folgerung hat Weber durch folgende beiden Erfahrungssätze stätigt.

1) Bei einer angeblasenen Pfeife besteht die Luftsäule der Pfeife aus ner beliebigen Anzahl stehender Wellen plus einem Reste, der gröfser als ull, aber kleiner als eine halbe stehende Welle ist.

2) Bei einer durch Saugen zum Tönen gebrachten Zungenpfeife besteht e schwingende Luftsäule aus einer beliebigen Anzahl ganzer stehender ellen plus einem Reste, der gröfser als eine halbe, aber kleiner als eine nze stehende Welle ist.

Da nun immer an dem obern offenen Ende der Pfeife bei *a* oder *d* ein hwingungsmaximum sich befindet, so folgt aus diesen beiden Sätzen die rige Folgerung, bei einer angeblasenen Pfeife befindet sich zunächst bei r Zunge ein Schwingungsmaximum, bei einer durch Saugen zum Tönen brachten ein Schwingungsknoten.

Einen Zahlenbeleg für den ersten Erfahrungssatz haben wir bereits en mitgeteilt.

Die Zungenpfeife gab beim Anblasen einen Ton von 365 Schwingungen i einer Pfeifenlänge

$$
\begin{aligned}
l &= 87{,}3 \text{ Linien} = 0 \cdot 207{,}5 + 87{,}3 \\
l &= 293 \quad \text{,,} \quad = 1 \cdot 207{,}5 + 85{,}5 \\
l &= 504 \quad \text{,,} \quad = 2 \cdot 207{,}5 + 89.
\end{aligned}
$$

Jedesmal bleibt ein Rest, der kleiner ist als 103,75 der Länge einer lben stehenden Welle.

Aus dieser Art, wie die Schwingungen der Luft mit denen der Platte sammentreffen, folgt nun auch, dafs die Schwingungen der Zung ablasen langsamer, der Ton also tiefer, beim Ansaugen aber rasch on der Pfeife also höher werden mufs.

Beim Anblasen ist nämlich, wenn die Zunge gegen das In *eife schwingt, die* Endabteilung der schwingenden

verdünnt; sie beschleunigt daher die Zunge nach dem Innern der Pfeife, während die eigene Elasticität der Zunge derselben, da sie nach innen zu von ihrer Gleichgewichtslage sich entfernt hat, eine Beschleunigung nach aufsen erteilt. Die Verdünnung der Luft in der Röhre hält folglich einem Teile der Elasticität der Zunge das Gleichgewicht. Während die Zunge nach aufsen schwingt, ist die Endabteilung der Luft verdichtet, sie beschleunigt daher die Zunge nach aufsen, während die Elasticität der Zunge die Platte wieder nach der entgegengesetzten Richtung beschleunigt; also auch hier wieder wirkt der Luftdruck der Elasticität der Platte entgegen.

Da also der Einflufs der schwingenden Luftsäule der Elasticität der Platte entgegenwirkt, so schwingt die Platte langsamer, gerade so, als wenn ihre Elasticität vermindert wäre. Der Ton der Zungenpfeife ist daher stets tiefer als der der isoliert schwingenden Zunge und kann höchstens, wenn die Zunge sich gerade an der Stelle des Schwingungsmaximums befindet, wo die Luft eine hin und her gehende Bewegung ohne Verdichtung oder Verdünnung besitzt, die Tonhöhe der isoliert schwingenden Platte erhalten.

Wird die Pfeife durch Saugen zum Ansprechen gebracht, so ist die Endabteilung der schwingenden Luftsäule, wenn die Zunge nach innen sich von ihrer Gleichgewichtslage entfernt hat, verdichtet, und zwar am meisten, wenn die Zunge gerade ihre äufserste Stellung nach innen erreicht hat. Zugleich treiben sie also der Druck der verdichteten Luft und ihre eigene Elasticität nach aufsen hin; die Wirkung der Luft kommt also mit der einer Vermehrung der Elasticität der Zunge überein. Dasselbe ist bei der Abweichung der Zunge von ihrer Gleichgewichtslage nach aufsen der Fall. Die Luft ist dann in der Endabteilung verdünnt, und zwar am meisten, wenn die Platte ihre äufserste Lage nach aufsen erreicht hat. Auch dort treibt dann sowohl der Druck der Luft als die Elasticität der Zunge dieselbe zurück; der Druck der Luft wirkt also wieder wie eine Vermehrung der Elasticität der Zunge.

Die Schwingungen der Zunge müssen also in diesem Falle rascher, der Ton höher sein als der der isoliert schwingenden Zunge. Die Grenze ist wieder die Tonhöhe der Zunge, wenn sie gerade an der Stelle eines Schwingungsmaximums sich befindet.

Je näher die Zunge einem Schwingungsknoten rückt, um so gröfser ist der Einflufs der Luft, da die Verdichtungen und Verdünnungen an der Platte immer gröfser werden. Wenn man nun die Länge der Röhre vergröfsert, so rückt dadurch in beiden Fällen die Platte dem Schwingungsknoten näher, der Ton mufs sich beim Anblasen von unten daher vertiefen, bis die Pfeife sich soweit verlängert hat, dafs sie wieder ein Vielfaches der Wellenlänge des ursprünglichen Tones ist; dann teilt sie sich wieder in schwingende dem Tone der Zunge entsprechende Abteilungen und an der Zunge bildet sich wieder ein Schwingungsmaximum.

Wir müssen uns begnügen, soweit die Änderung der Tonhöhe nachgewiesen zu haben; die Gröfse derselben, wie sie sich aus Webers Versuchen ergibt, läfst sich ohne die vollständige Theorie von Weber, die uns hier zu weit führen würde, nicht ableiten.

Während bei den bisher besprochenen Zungen durch den Einflufs der in der Röhre schwingenden Luftsäule der Ton der freien Zunge nur mehr

er weniger modificiert wird, hängt bei einer andern Gattung von Zungen r Ton lediglich von den Schwingungen der mit Hülfe der Zungen be- gten Luftsäule ab, bei den sogenannten weichen Zungen. Weiche Zungen id die aus elastischen Rohrplatten geschnitzten Zungen der Holzblas- trumente, Klarinette, Oboe und Fagott, sowie die zur Tonerzeugung der echblasinstrumente benutzten menschlichen Lippen. Die Klarinette hat ne breite Zunge, welche im Mundstücke derselben ähnlich befestigt ist e die Zungen in den Rohrwerken der Zungenpfeifen; Oboe und Fagott ben zwei Zungen, welche am Ende des Mundstückes einander gegenüber stellt und nur durch einen schmalen Spalt von einander getrennt sind. äst man hinein, so wird der Spalt durch den Druck der im Munde zu- mmengepreſsten Luft abwechselnd geschlossen, abwechselnd durch die asticität der Zungen geöffnet, und dieser intermittierende Luftstrom er- ugt die Schwingungen in den mit den Zungen verbundenen Röhren, die ir dann als Ton wahrnehmen.

Bei den Blechblasinstrumenten wird die schwingende Bewegung der uft an dem Mundstücke durch rasch folgendes abwechselndes Schlieſsen id Öffnen der Lippen erzeugt. Das Mundstück hat dort eine trichter- rmige Gestalt (Fig. 276). Die Lippen des Bläsers liegen in der obern öhlung und sind im Ruhezustande geschlossen. Durch n Druck der in der Mundhöhle angesammelten Luft erden sie geöffnet, und der Luftstrom dringt in s Instrument. Ist eine geringe Menge Luft aus dem unde entwichen, so schlieſsen sich die Lippen wieder, die Spannung der Luft kleiner geworden ist. Da dann die Luft keinen isweg hat, öffnet ihr Druck die Lippen wieder, und so erneuert sich s Spiel der Lippen immerfort. Der intermittierende Luftstrom erzeugt dem Rohre stehende Schwingungen, und diese sind es, die wir als Ton hrnehmen.

Fig. 276.

Damit nun aber diese stehenden Schwingungen existieren können, müssen Stöſse bei den Holz- und Blechblasinstrumenten in derselben Periode olgen, es müssen also die Zungen mit denselben isochron schwingen. Die hwingungen der weichen Zungen hängen nun nach der von Helmholtz[1]) wickelten Theorie derselben nicht wesentlich von der Elasticität der ngen ab, sondern von der in der Röhre schwingenden Luft, sie schwingen der Luftsäule isochron, wenn der durch die in der Tiefe des Rohres handenen Luftwellen bewirkte Wechsel des Luftdruckes hinreichend ist, die Zungen in eine schwingende Bewegung zu versetzen. In einer wingenden Luftsäule ist aber der Druckwechsel am gröſsten in den hwingungsknoten, wie an dem geschlossenen Ende einer gedeckten Pfeife; halb gibt eine solche mit einer weichen Zunge versehene Röhre diejenigen ne, welche die Röhre geben würde, wenn sie an der Stelle der Zunge chlossen und unten angeblasen würde.

Befindet sich deshalb die Zunge, wie bei der Klarinette, an d de eines cylindrischen engen Rohres, so sind die Töne der Gru hre, die Quint seiner Oktave, die Terz der folgenden Oktave u.

[1]) *Helmholtz*, Poggend. Ann. Bd. CXIV.

bei einer gedeckten Pfeife derselben Länge. Man kann alle die Töne erzeugen, indem man das Rohr in verschiedener Stärke anbläst.

Ist das Rohr kegelförmig, so ist die Reihe der Töne eine andere. Für an beiden Seiten offene konische Röhren, oder für solche, welche vollständige Kegel und an der Spitze geschlossen sind, ergibt sich sowohl aus den Versuchen Zamminers[1]) als aus der Theorie von Helmholtz[2]), dafs die in ihnen möglichen Töne genau übereinstimmen mit denen einer ihnen an Länge genau gleichen offenen cylindrischen Röhre. Ist dagegen das Rohr ein abgestumpfter Kegel, und die schmalere Fläche verschlossen, so stimmt die Reihe der Töne weder mit der einer offenen noch mit der einer gedeckten Pfeife überein, sie nähert sich derjenigen einer offenen Pfeife indes um so mehr, je kleiner das Stück ist, welches an einem vollständigen Kegel fehlt. Die Tonreihe läfst sich dann nur durch eine transcendente Gleichung berechnen. Ganz ebenso verhält es sich mit den kegelförmigen Röhren, die mit Zungen versehen sind, also mit Oboe und den Blechblasinstrumenten. Setzt man die Länge des Rohres l und die an derselben anzubringende Korrektion für das untere offene Ende a, so erhält man die Schwingungszahlen n aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi(l+a)}{c} = -\frac{2n\pi r}{c},$$

worin r der Abstand der Zunge von der ideellen Spitze des Kegels und c die Geschwindigkeit des Schalles bedeutet[3]). Um die entstehenden Töne zu übersehen, geben wir im Folgenden die Reihenfolge, welche Helmholtz für eine konische Röhre von Zink beobachtet und berechnet hat, deren Länge 122,7 oder mit der Korrektion 124,77^{cm} war, deren untere Öffnung 5,5, deren obere 0,7^{cm} war, für welche also r, der Abstand des oberen Endes von der ideellen Spitze des Kegels 18^{cm},2 war.

Die Tabelle gibt die Wellenlängen, also die Werte $\frac{c}{n}$ und daneben die Länge der offenen oder gedeckten Pfeife, in welchen der betreffende Ton als Grund- oder Oberton bestehen kann.

	Ton	Wellenlänge	Länge der entsprechenden Peife	
			offen	gedeckt
1	$H-$	283,61	141,80	70,90
2	$h-$	139,83	139,84	104,88
3	fis_1	91,81	137,71	114,76
4	h_1+	67,94	135,88	118,89
5	dis_2	53,76	134,39	120,95
6	g_2	44,40	133,21	122,11
7	b_2	37,79	132,26	122,82
8	c_3	32,87	131,50	123,28
9	dis_3	29,22	131,47	124,17

[1]) *Zamminer*, Poggend. Ann. Bd. XCVII.
[2]) *Helmholtz*, Poggend. Ann. Bd. CXIV. Tonempfindungen p. 580.
[3]) *Helmholtz*, Poggend. Ann. Bd. CXIV. p. 326.

e in den beiden letzten Spalten gemachten Angaben sind so zu ver-
dafs die in einer Horizontalreihe angegebene Pfeifenlänge den in
en Reihe angegebenen Ton als den sovielten Oberton hat, als dieser
r Oberton in der Zungenpfeife ist. Eine offene Pfeife z. B., deren
134^{cm},39 ist, gibt als fünften Ton dasselbe *dis*$_2$, welches als fünfter
der Zungenpfeife entsteht, und ebenso würde es der fünfte Ton
gedeckten Pfeife von 120^{cm},95 Länge sein, also neunmal soviel
gungen haben, wie der Grundton einer solchen Pfeife.

ie man sieht, würden bei dieser Röhre die ersten Töne, wenn man
he als diejenige einer offenen Pfeife betrachten wollte, gegen die
viel zu tief sein, erst die letzten würde man als einer offenen Pfeife
rig betrachten können, deren Länge dann aber gröfser ist als die
ischen Röhre und kleiner als die Länge des ganzen Kegels. Anderer-
ann man die letzten Töne als jene einer gedeckten Pfeife auffassen,
Länge gleich jener der konischen Röhre ist.

kleiner übrigens der Wert von r ist, das heifst, je näher die Zunge
r Spitze des Kegels befindet, um so näher rückt die Reihe der Töne
einer offenen Pfeife, welche sie auch nach der Gleichung für $r = 0$
t, denn die Werte, für welche

$$\tang \frac{2 n \pi (l + a)}{c} = 0,$$

$$\frac{2 n}{c} (l + a) = 1, 2, 3 \cdots \cdots p,$$

e Reihe der natürlichen Zahlen. Ist r klein, so kann man die Ton-
ls jene einer offenen Pfeife betrachten, deren erste Töne gegen die
en etwas zu tief sind.

§ 165.

ie Blasinstrumente. Die sämtlichen Blasinstrumente lassen sich
wendungen der Labialpfeifen und Zungenpfeifen betrachten. Die
feifen sind geradezu solche Apparate, das Flageolet und die Flöten
bialpfeifen, die Harmonika und das Aeolodicon Zungen ohne Pfeifen,
larinetten, Bassethörner, Oboen, Fagotte sind Zungenpfeifen mit
n Zungen, Klarinetten und Bassethorn mit cylindrischem, Oboe und
mit kegelförmigem Ansatzrohr, bei denen die Zunge der Spitze des
sehr nahe liegt; die Erzeugung des Tones ist daher bei allen diesen
nenten nach dem Vorigen klar.

ir haben nur einiges hinzuzusetzen, um die Mittel zu erklären, durch
man auf diesen Instrumenten anstatt des Grundtones und der harmo-
Töne eine ausgedehnte Reihe von Tönen erzeugt.

enn man in die Wand einer Pfeife (Fig. 277) an irgend ei
ch einbohrt, so kann an dieser Stelle die Luft auch na
ngen als nach der Längenaxe der Röhre bei einer ankomm
z entweichen, es tritt demnach auch dort eine [illegible]
nde einer offenen Pfeife; es mufs bei stehen

sich ein Schwingungsmaximum bilden. Blasen wir eine offene Pfeife so an, daſs sie ihren zweiten Ton gibt, also mit zwei Knoten, jeder $\frac{1}{4}$ vom Ende der Röhren und einem Schwingungsmaximum in der Mitte, so wird es demnach keine Änderung in dem Tone der Pfeife machen, wenn wir in der Mitte der Wand eine Öffnung herstellen, da sich dort schon ein Schwingungsmaximum befindet. Durch die Öffnung in der Wand wird die Pfeife gewissermaſsen halbiert und der Ton wird der Grundton dieser halb so langen Pfeife. Öffnen wir dagegen die Pfeife bei *a* oder an der Stelle des untern Schwingungsknotens bei *e* Fig. 277, so muſs jetzt an diesen Stellen ein Schwingungsmaximum entstehen und der Ton springt in die höhere Oktave über, die Luftsäule zerlegt sich in sechs schwingende Abteilungen, deren Knoten $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ der Länge der Röhre von dem Boden der Pfeife entfernt sind.

Fig. 277.

Ebenso würde eine Änderung des Tones entstehen müssen, wenn wir an irgend einer andern Stelle der Wand auſser bei *b* eine Öffnung anbringen, da stets an dieser Stelle ein Schwingungsmaximum eintreten muſs, die Länge der schwingenden Abteilungen also geändert wird. Je nach der Stelle der Öffnung wird dann der Ton ein anderer.

Ganz dasselbe ist der Fall, wenn wir durch verändertes Anblasen einen der andern Töne der Pfeife hervorbringen; auch dann wird eine angebrachte Öffnung im allgemeinen den Ton ändern und durch eine Öffnung an einer bestimmten Stelle können wir einen bestimmten Ton hervorrufen. Diesen Kunstgriff wendet man bei den meisten Blasinstrumenten an, um eine bestimmte Tonreihe zu erhalten, sowohl bei den Flöten als den Zungeninstrumenten, den Klarinetten etc.

Haben wir zum Beispiel eine Flöte, deren Rohr als Grundton den Ton d_1 angibt und versehen wir dieselbe in passenden Abständen mit sechs Öffnungen von ihrem Ende zur Mundöffnung hin, so wird die Flöte beim Verschlusse aller der Löcher den Ton d_1 geben; öffnen wir sie nun nach und nach, so werden wir dadurch die Reihe der Töne e_1, f_1, g_1, a_1, h_1, c_2 erhalten können.

Um z. B. den Ton a_1 zu erhalten, bedarf es nicht einmal einer Öffnung der weiter von dem Mundloch entfernten Löcher, bleiben die drei letzten Löcher geschlossen und wir öffnen nur das dritte Loch, von der Mundöffnung an gerechnet, so muſs schon der Ton a_1 entstehen.

Durch verstärktes Anblasen erhalten wir dann bei geschlossenen Löchern den zweiten Ton der Röhre d_2, und bei reihenweiser Öffnung erhalten wir dann die Oktaven der vorigen Töne e_2, f_2 u. s. w. Werden dann noch weitere Öffnungen oder Klappen zwischen den vorigen angebracht, um die erhöhten oder vertieften Töne *dis*, *fis* - - zu erzeugen, so sind wir imstande, mit diesem Instrumente die Töne der chromatischen Tonleiter durch die zwei Oktaven d_1 bis d_3 und andere höhere Töne zu erzeugen.

Bei den Blechblasinstrumenten, Trompete, Horn, Posaune hat man diese Hülfsmittel der Tonerhöhung nicht, sie sind deshalb auf ihre natürlichen Töne beschränkt. Da diese Instrumente aus langen kegelförmigen [illegible]en bestehen, bei welchem das Mundstück der Spitze des Kegels nem-

nahe liegt, so ist die Tonreihe dieser Instrumente sehr nahe derjenigen er offenen Pfeife gleich. Um die verschiedenen hohen Töne hervorzu- ngen, hat der Bläser hier nur das Mittel, die Stärke des Luftstromes d damit die Schnelligkeit, mit denen die Öffnungen des Mundes sich gen, zu ändern. Je stärker der Luftdruck ist, um so rascher folgen sich einzelnen Stöfse, ein um so höherer Ton tritt aus dem Instrumente rvor. Die Kunst des Bläsers ist es, die betreffenden Drucke für die ein- nen Töne im Gefühl zu haben und hervorzubringen.

Um eine grofse Anzahl von Tönen auf diesen Instrumenten zu haben, cht man sie sehr lang und gibt ihnen nur eine kleine Weite, da die Er- rung gelehrt hat, dafs die engen Röhren leichter ansprechen. Das Horn t nach Zamminer eine Länge von 27 Fufs, sein Grundton ist daher es_{-2}, d die Reihe der Töne ist

1 es_{-2}	9 f_1	17 e_2
2 es_{-1}	10 g_1	18 f_2
3 b_{-1}	11 as_1 +	19 fis_2 +
4 es	12 b_1	20 g_2
5 g	13 h_1 +	21 gis_2 +
6 b	14 c_2 +	22 as_2 +
7 des_1 —	15 d_2	23 a_2 +
8 es_1	16 es_2	24 b_2

Die ersten beiden Töne werden nicht gebraucht, in den höhern Lagen ht man, liegen die Töne ziemlich nahe beisammen, sie sind indes zum il höher als die hingeschriebenen. Um diese Töne brauchbar zu machen, ndet man dieselbe Art des Stimmens an, wie bei den offenen Pfeifen, n macht die Instrumente zu teilweis gedeckten, indem der Spieler die allte Faust in die trichterförmige Erweiterung bringt. Bei den Posaunen fen die Auszüge des Rohres nach, die gleichzeitig den Zweck haben, die trumente in verschiedenen Tonarten brauchen zu können. Bei den rnern erreicht man letzteres durch Einschieben von Röhrenstücken in Windungen.

In neuerer Zeit hat man auch an den Blechinstrumenten Klappen zur änderung der Tonhöhe angebracht, der Klang solcher Instrumente hat es eine viel geringere Fülle.

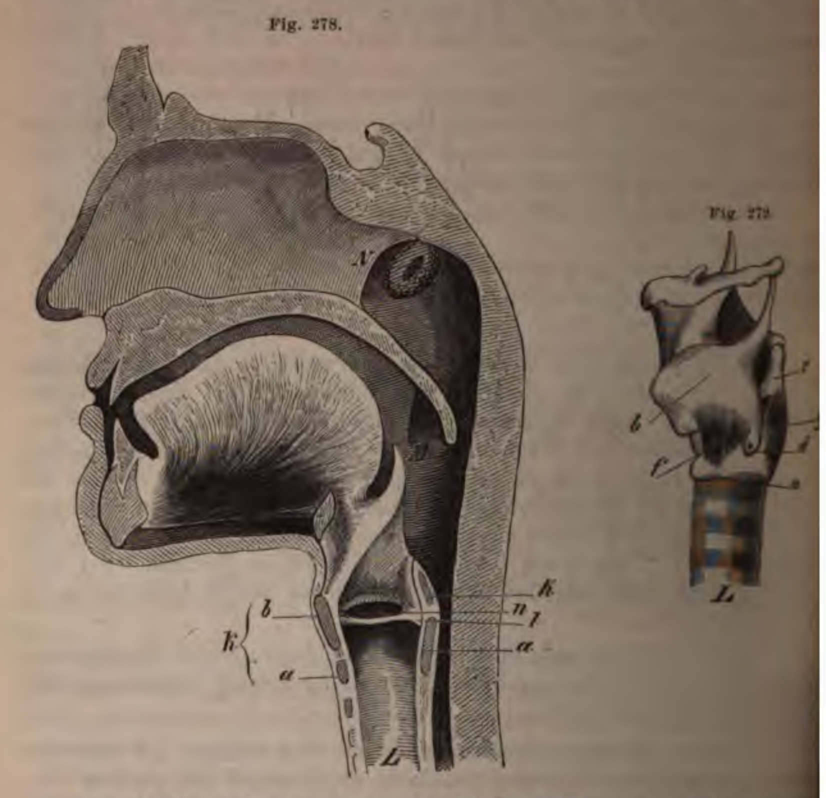
Die Klänge der Zungeninstrumente sind viel schärfer als jene der ialpfeifen und Streichinstrumente, da in ihnen wegen der scharfen Dis- tinuität bei der Tonerzeugung, der einzelnen durch den Schlufs der gen unterbrochenen Stöfse, viel mehr und höhere Obertöne vorhanden . Die schärfsten Klänge haben die Blechblasinstrumente, da in diesen schnellern Schwingungen der hohen Töne nicht so rasch vernichtet den. Darin beruht im wesentlichen die Klangverschiedenheit zwischen Blechinstrumenten und den theoretisch ähnlich gebauten Holzblas- rumenten wie Oboe und Fagott. Der Unterschied letzterer gegen die rinette beruht in der Verschiedenheit der Obertöne, die Klarinette nur die ungeradzahligen, Oboe und Fagott haben auch die gerad- igen.

§ 166.

Die menschliche Stimme. Das menschliche Stimmorgan ist na[ch] den Untersuchungen von Johannes Müller[1]) als eine Zungenpfeife anzuseh[en], da der Vorgang, mittels dessen wir die Töne erzeugen, sowie die Mitt[el], um ihre Höhe zu ändern, wesentlich mit denen der Zungenpfeifen überei[n]stimmen.

Das Stimmorgan des Menschen befindet sich im Kehlkopf *k* an d[em] obern Ende des die Lungen mit der Mund- und Nasenhöhle *M* und *N* [in] Verbindung setzenden Luftweges, der Luftröhre *L* (Fig. 278 und Fig. 27[9]).

Fig. 278.



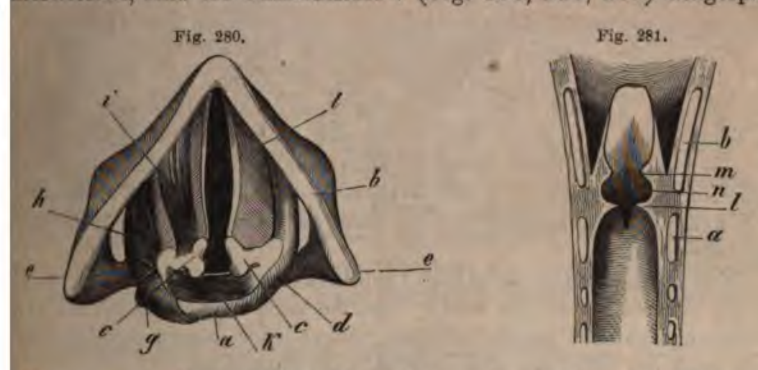
Der Kehlkopf ist aus einer Anzahl fester Knorpel gebildet, zwisc[hen] denen die Stimmbänder ausgespannt sind. Die feste Basis des Kehlk[opfes] ist der Ringknorpel, cartilago cricoides, ein fester Ring, der das [obere] Ende der Luftröhre umschliefst, *a* Fig. 278 im Durchschnitt, und Fig. 2[79] von der Seite gesehen, und welcher hinten höher ist als vorn. Auf die[sem] ruht als gröfsere, aber nach hinten offene Umhüllung des Kehlkopfes [der] Schildknorpel, cartilago thyreoides, *b* Fig. 278 und Fig. 279, beste[hend] aus zwei Platten, die mit ihren vorderen Rändern in einer nach vorn [...]

[1]) *Johannes* **Müller**, Handbuch der Physiologie des Menschen. Bd. II. [...]

se hervorspringenden Kante fest verwachsen zusammenstofsen, wie . 278 bei b im Durchschnitt, 279 bei b von der Seite und Fig. 280 oben gesehen zeigt.

Der Schildknorpel ist um eine Axe drehbar, d Fig. 279 und 280, die an einem Fortsatze befindet, welcher von der untern Ecke des hintern en Randes der Schildknorpelplatte an jeder Seite ausgeht, und welcher ererseits im Ringknorpel befestigt ist. Die Richtung der Axe, um welche der Schildknorpel drehen kann, ist Fig. 280 durch die Linie ee an- eutet; die Bewegung, welche er also annehmen kann, ist nach vorn und ab gerichtet und nach hinten und hinauf. Der Kante des Schildknorpels, velcher die beiden Platten zusammenstofsen, gegenüber, stehen auf dem hten hintern Rande des Ringknorpels dicht neben einander, die beiden sbeckenknorpel, cartilagines arytaenoides, c Fig. 279 von der Seite 280 von oben gesehen. Ihre Basis steht mit dem Ringknorpel durch Gelenk in Verbindung, das ihnen gestattet, sich erstens vor- und rück- ts zu bewegen, also sich dem Schildknorpel zu nähern und von ihm zu ernen, zweitens nach rechts oder links zu bewegen, also einander zu ern oder von einander zu entfernen.

Von der Basis jedes der Giefsbeckenknorpel springt eine Ecke nach 1 vor, der processus vocalis. Zwischen diesen beiden Ecken und der pringenden Kante, in welcher die beiden Platten des Schildknorpels zu- menstofsen, sind die Stimmbänder l (Fig. 278, 280, 281) ausgespannt.



elben sperren die Luftröhre bis auf eine schmale Ritze, die Stimmritze, he in der Ansicht von oben (Fig. 280) dunkel gehalten ist, ab. Nur eine kleine Öffnung befindet sich als Verlängerung der Stimmritze chen den Rändern der Giefsbeckenknorpel, die sogenannte Athemritze. gewöhnlich sind wahrscheinlich die Stimmbänder ganz zusammengelegt, die Stimmritze geschlossen, so dafs der Luftweg nur durch die Athem- geöffnet ist.

Die Stimmbänder sind die Zungen des mit der Zungenpfeife zu ver- henden Stimmapparates, über ihnen befindet sich nun als Ansatzröhre Fortsetzung des Luftweges. Zunächst über den Stimmbändern befindet eine nach oben von zwei parallel mit den Stimmbändern verlaufenden eimhautfalten, den falschen Stimmbändern m (Fig. 281) verschlossene tung, der ventriculus Morgagni n (Fig. 278 und Fig. 281). Die falschen mbänder verbinden die Giefsbeckenknorpel mit dem Kehldeckel, der

epiglottis; und über ihnen endet sich der Luftweg in den Schlund, der in der Mundhöhle und Nasenhöhle ausläuft.

Das Stimmorgan vervollständigen die Muskeln, welche durch Bewegung des Schildknorpels und der Gieſsbeckenknorpel die Stimmbänder schlieſsen oder öffnen, spannen oder erschlaffen. Die Stimmbänder werden gespannt durch den musculus cricothyreoideus *f* (Fig. 279), welcher den Schildknorpel nach vorn, und den cricoarytaenoideus posterior *g* (Fig. 279 und Fig. 280), der den Gieſsbeckenknorpel nach hinten herunter zieht. Die Stimmbänder werden erschlafft durch den musculus thyreoarytaenoideus *i* (Fig. 280), welcher den Schildknorpel und Gieſsbeckenknorpel gegen einander und den musculus cricoarytaenoideus anterior *h* (Fig. 280), welcher den Gieſsbeckenknorpel nach vorn zieht.

Die Stimmritze wird geschlossen durch die musculi arytaenoidei *k* (Fig. 280), welche an beiden Gieſsbeckenknorpeln inserieren und dieselben gegen einander ziehen, sie wird geöffnet durch die beiden musculi cricoarytaenoidei *g* und *h* (Fig. 280), welche, indem sie zusammenwirken, die Gieſsbeckenknorpel seitwärts herabziehen.

Durch Versuche an aufgeschnittenen Kehlköpfen sowohl, als an lebenden Menschen, welche eine Luftröhrenfistel besaſsen und durch Beobachtungen mit dem Kehlkopfspiegel ist es nun erwiesen, daſs zur Tonbildung die Athemritze vollständig geschlossen und ebenso die Ränder der Stimmbänder fast vollständig an einander gelegt werden. Zugleich müssen die Stimmbänder durch die betreffenden Muskeln in einem gewissen Grade gespannt sein.

Der aus den Lungen dringende kräftige Luftstrom öffnet die Stimmritze, deren Bänder dann gerade so wie die Zunge der Zungenpfeife in Schwingungen geraten. Diese Schwingungen sieht Johannes Müller als das Tongebende an, nicht die durch das abwechselnde Schlieſsen oder mehr oder weniger Öffnen derselben entstehenden Luftstöſse. Die Gründe, welche ihn bestimmen, von der Weberschen Ansicht der Tonbildung bei den Zungenpfeifen abzugehen[1]), sind indes nach Seebecks Kritik derselben[2]) nicht beweisend.

Was indes als das eigentlich Tonbildende anzusehen sei, ist im Effekt ziemlich einerlei, da so wie so die Tonhöhe nach beiden Ansichten von der Schwingungszahl der Bänder abhängt, indem jeder ganzen Schwingung derselben auch ein Stoſs der austretenden Luft entspricht.

Bei der menschlichen Stimme haben wir einen doppelten Apparat zu unterscheiden, den tongebenden, der die Höhe der Töne bestimmt, und den Sprechapparat, der sie zu artikulierten Lauten macht.

Die höheren Teile der Luftwege, der ventriculus Morgagni und der Schlund dienen in Bezug auf die Töne der menschlichen Stimme nur wie ein Schallbecher bei der Zungenpfeife, sie dienen, indem die in ihnen enthaltene Luftsäule und die umgebenden Weichteile mitschwingen, nur zur Verstärkung des Tones. Müller zeigte das an ausgeschnittenen Kehlköpfen. Beim Anblasen von unten gaben die unteren Stimmbänder bei enger Stimmritze einen vollen nnd reinen Ton, der den Tönen der menschlichen Stimme nahe kam, und die sich von den Tönen, welche man bei Anwesenheit des

---

[1]) *J. Müller* a. a. O. p. 175.
[2]) *A. Seebeck*, in Doves Repertorium. Bd. VI.

ventriculus Morgagni, der oberen Stimmbänder und der epiglottis erhielt, nur durch geringere Stärke unterscheiden.

Die Tonhöhe hängt nur von der Spannung der Stimmbänder ab und von ihrer Länge, nicht aber davon, ob die Stimmritze etwas mehr oder weniger geöffnet ist, jedoch spricht der Ton leichter an bei enger Stimmritze.

Die menschliche Stimme hat überhaupt einen Umfang von nicht ganz vier Oktaven, die sich aber niemals in einem Individuum vereinigt finden, sie reicht vom sogenannten grofsen E, also dem Tone e_{-1} bis zum dreigestrichenen C. Man unterscheidet Männer- und Frauenstimmen, und bei erstern Bafs und Tenor, bei letztern Alt und Sopran.

Der Umfang der Stimmen ist in der Regel

Bafs . . . . e_{-1} — f_1
Tenor . . . . . . c — h_1 oder c_2
Alt . . . . f — f_2
Sopran . . . . . c_1 — c_3

Die Stimmapparate unterscheiden sich bei diesen Stimmen durch die Länge der Stimmbänder. Bei den Männern springt die Kante des Schildknorpels viel weiter vor als bei den Frauen, und von den Männern besitzen die Bassisten die gröfsten Kehlköpfe. Einige wenige Messungen von Johannes Müller haben als mittlere Länge der männlichen Stimmbänder 18 und der weiblichen Stimmbänder etwas über 12 Millimeter, also ein Verhältnis von 3 : 2 ergeben.

An einem und demselben Individuum werden die verschiedenen Töne durch verschiedene Spannung der Stimmbänder hervorgebracht. An ausgeschnittenen Kehlköpfen hat Müller durch Steigerung der Spannung von etwa 8 bis zu 560 Gramm den Ton um mehr als zwei Oktaven erhöht, nämlich bei einem männlichen Kehlkopf von *ais* bis *dis*$_3$. Die verstärkte Spannung, die wir bei den hohen Tönen durch die rasche Ermüdung der Stimme fühlen, ist indes nicht das Einzige, welches die Höhe des Tones bestimmt. Versuche von Müller und die bekannte Erfahrung, dafs wir die höchsten Töne nur im Forte, die tiefsten nur im Piano singen können, beweisen, dafs die Tonhöhe auch durch die Stärke des Luftstromes verändert wird.

Beobachtungen von Garcia mit dem Kehlkopfspiegel haben ferner gezeigt, dafs bei verschieden hohen Tönen auch die Länge der schwingenden Teile sich ändert. Bei einem Tenoristen fand er, dafs bei d, e, f die Band- und Knorpelränder der glottis ihrer ganzen Länge nach schwingen, bei d_1 beginnen die hintern Enden der processus vocales sich an einander zu legen und bei f_1 und g_1 haben sich die proc. voc. ihrer ganzen Länge nach an einander gelegt, es schwingen nur noch die Bänder allein[1]).

Man sieht, alle diese Erfahrungssätze über die verschiedene Tonhöhe stimmen mit den Schwingungsgesetzen elastischer Streifen überein, verstärkte Spannung und Verkürzung der schwingenden Teile vergröfsern ihre Schwingungszahl und somit die Tonhöhe, die Tonbildung des mensch-

[1]) *Ludwig*, Lehrbuch der Physiologie des Menschen. Bd. I. p. 572. In Müllers Handbuch sind dessen sämtliche Versuche und ältere Erfahrungen, in Ludwigs Lehrbuch auch die neuern über die menschliche Stimme zusammengestellt.

lichen Stimmorgans stimmt demnach mit derjenigen der Zungenpfeifen überein.

Wegen der weiteren Erfahrungen über die menschliche Stimme, besonders über die verschiedenen Register, die Brust- und Fistelstimme müssen wir auf die Lehrbücher der Physiologie verweisen, da sie in physikalisch-akustischer Beziehung nichts Neues darbieten.

§ 167.

Die menschliche Sprache. Wenn die Endigungen des Luftweges, der Schlund und die Mundhöhle, auf die Tonhöhe keinen Einflufs haben, so sind sie das allein Bedingende bei der Artikulation, bei der Modifikation der Töne zu Lauten; es ist die Aufgabe der Physik, das Wesen der Laute akustisch zu definieren, und die der Physiologie zu zeigen, wie durch geänderte Stellung der Sprachwerkzeuge diese Klangverschiedenheiten zustande kommen.

Dafs die verschiedenen Vokaltöne nichts sind als Klangverschiedenheiten, und dafs sie somit den verschiedenen den Grundton begleitenden Obertönen zuzuschreiben sind, hat zuerst Wheatstone[1]) behauptet, der volle Nachweis ist indes erst Helmholtz[2]) gelungen, indem er einmal mit Hülfe der Resonatoren die die verschiedenen Vokalklänge zusammensetzenden Partialtöne bestimmte, und ganz besonders, indem es ihm gelungen ist, mit Hülfe einfacher Töne die Vokalklänge zusammenzusetzen.

Das Mittel, um die einfachen Töne zu erzeugen, lieferten ihm Stimmgabeln, welche in der Weise wie Fig. 282 es zeigt, vor Resonanzröhren aufgestellt waren. Die Stimmgabel *a* (Fig. 282) ist mit ihrem Stiel in das Fufsbrett *dd* eingeschraubt, welches auf untergeklebten Stücken von Gummischläuchen ruht, damit die Schwingungen der Gabel nicht direkt auf den Tisch übertragen werden. Die oberen Enden der Stimmgabelzinken befinden sich zwischen den Schenkeln des Elektromagnetes *bb*, gerade den Polflächen desselben gegenüber gestellt. Die Schwingungen der Gabel werden durch intermittierende elektrische Ströme erregt, welche den Elektromagnet während jeder Schwingung der Gabel und zwar in dem Momente, in welchem die Zinken der Gabel sich von einander zu entfernen beginnen, magnetisch machen. Um den elektrischen Strom genau in dieser Weise zu unterbrechen, wandte Helmholtz als Stromunterbrecher ebenfalls eine Stimmgabel an, in der Weise wie Fig. 283 angeordnet. Der von der galvanischen Batterie gelieferte Strom tritt in die Messingsäule *i*, welche oben ein zur Hälfte mit Quecksilber, zur Hälfte mit Alkohol gefülltes Näpfchen *d* enthält. In das Quecksilber dieses Näpfchens taucht ein Platindraht *c*, der an der obern Zinke der Stimmgabel befestigt ist, so eben hinein, so dafs der Strom aus dem Quecksilber in die Stimmgabel tritt und durch diese bis zur Klemme *e* geleitet wird. Von der Klemme *e* tritt der Strom dann in die den Elektromagnet umgebenden Drähte und von diesen aus weiter in die Drahtleitung, welche die Elektromagnete der tönenden Stimmgabeln enthält. Dadurch,

---

[1]) *Wheatstone* in seiner Kritik über Versuche von Willis, der zuerst mit ...ifen die Vokale künstlich zu bilden versuchte (Poggend. Ann. Bd. XXIV), ...d Westminster Review 1837 October.

[2]) ...*lmholtz*, Tonempfindungen. p. 163 ff. und p. 184 ff.

ler Strom den Draht des Elektromagnets *bb* (Fig. 283) durchläuft,
der Magnet erregt, und mit ihm alle Magnete der tönenden Stimm-
Der Magnet *bb* zieht dann die Zinken der Stimmgabel an, damit

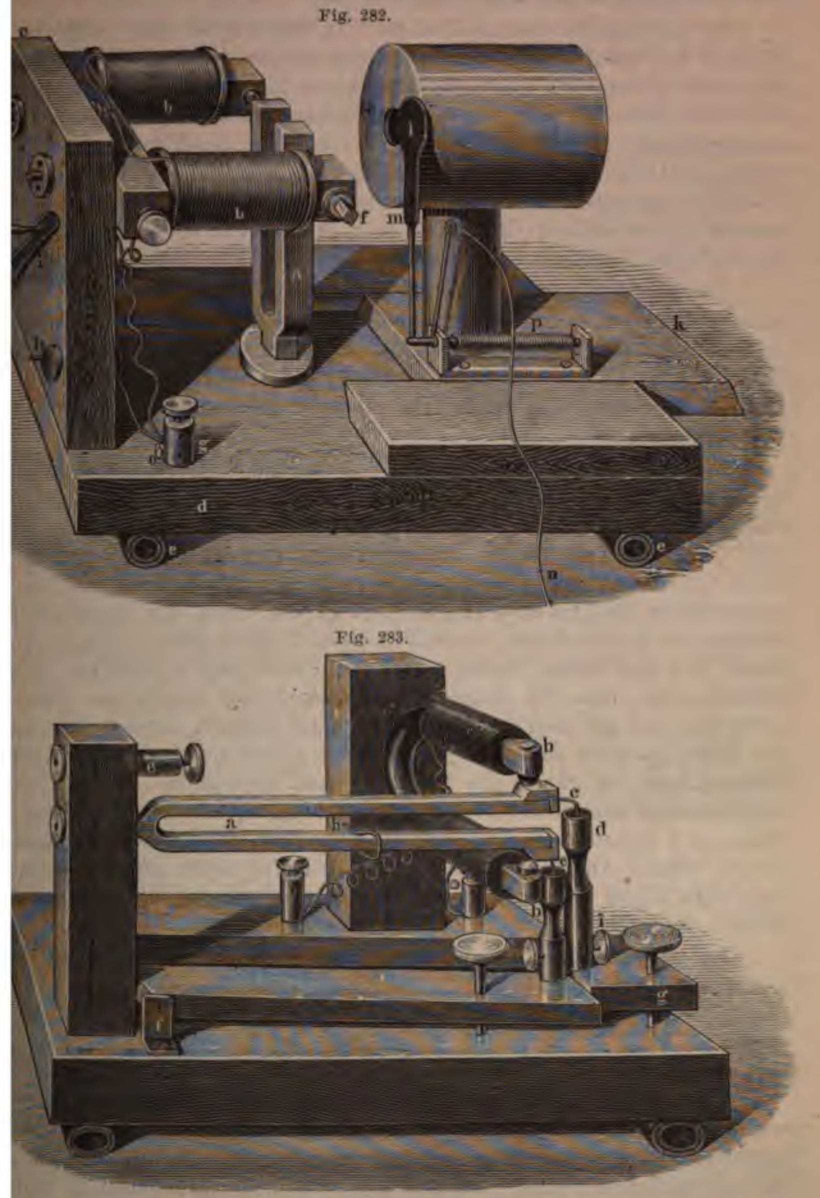


Fig. 282.

Fig. 283.

raht *c* aus dem Quecksilber empor und unterbricht an dieser Stelle
Stromkreis und damit den Strom. Sofort aber verlieren auch die
ete ihren Magnetismus, und die Zinken der Gabel schwingen mit der

durch ihre Dimensionen bedingten Geschwindigkeit gegen ihre Gleich
lage hin und darüber hinaus. Der Draht *c* taucht infolge dessen
das Quecksilber, der Strom wird neuerdings geschlossen und d
wiederholt sich in der angegebenen Weise.

Ist die Unterbrechungsgabel mit der Gabel (Fig. 282) genau
so wird die Gabel *a* jedesmal, wenn die Zinken durch die Gleich
lage nach aufsen sich bewegen, eine kurze Zeit vom Magnete a
sie erhält also bei jeder Schwingung einen neuen Antrieb, und
wegung dauert ungeschwächt fort, so lange der Unterbrechungsa
Thätigkeit bleibt. Dasselbe ist aber auch der Fall, wenn die
(Fig. 282) genau 2, 3 · *n* mal öfter schwingt als die Unterbrechu
nur dafs diese Gabeln dann erst nach je 2, 3 ... *n* Schwingung
neuen Anstofs erhalten.

Um diesen genauen Isochronismus der Gabeln herzustellen, is
Gabel *a* (Fig. 283) ein kleiner Schieber *h* angebracht, durch dessen
man die Schwingungsdauer der Gabel etwas verändern kann;
Schieber dem Ende der Gabel näher gebracht, so wird dadurch d
heitsmoment der schwingenden Masse etwas vergröfsert, und die Schwi
werden langsamer.

Die auf diese Weise erregten Schwingungen der Gabel *a* (F
geben keinen hörbaren Ton, wie ja überhaupt eine in freier Luft schw
Gabel nur gehört werden kann, wenn man sie unmittelbar vor
hält. Um den Ton hörbar zu machen, ist vor der Gabel eine R
röhre angebracht, eine gedeckte Pfeife, welche in der Mitte des de
zugewandten Bodens eine kreisförmige in der Höhe der Zinkenen
findliche, mit dem Deckel *l* verschliefsbare Öffnung hat. Befindet
Röhre mit geöffnetem Deckel nahe vor der Gabel, so wird sie, w
Grundton mit dem der Gabel übereinstimmt, wie eine Pfeife zum
gebracht, und der Ton der Gabel tritt ohne Oberton deutlich herv
die Röhre passend zu stimmen, sind die Dimensionen derselben u
Öffnung nach den Sätzen des § 162 passend zu wählen. Um den T
Gabel stärker und schwächer machen zu können, ist die Röhre au
Schlitten *k* befestigt, so dafs man die Röhre der Gabel näher oder en
stellen kann. Andererseits kann man den Ton auch dadurch sch
dafs man durch teilweise Bedeckung der Öffnung die Röhre etw
stimmt, wodurch der Ton der Röhre beträchtlich geschwächt wird.

Zu seinen ersten Versuchen wandte Helmholtz acht Gabeln
schriebenen Art an, die tiefste gab den Ton b_{-1}, die übrigen ga
sieben ersten Obertöne, b, f_1, b_1, d_2, f_2, as_2 und b_2, später liefs
diesen noch d_3, f_3, as_3 und b_4 hinzutreten und benutzte dann als Gr
den der zweiten Gabel, b.

Ist der Apparat in Gang gebracht mit geschlossenen Resonan
so hört man zunächst nur ein leises Summen. Öffnet man dann die
mit dem Ton b_{-1}, so hört man ein dumpfes *U*, viel dumpfer als
der menschlichen Sprache. Der Klang wird dem gesungenen *U* äh
wenn man schwach den zweiten und dritten Ton b und f_1 mittönen

Der Vokal O entstand, wenn bei etwas gedämpftem b_{-1} de
Oberton b sehr stark und schwächer b_1, f_1 und d_2 angegeben wurd

Ein nach *O* gezogenes *A*, das schwedische *Å* entstand, als die Töne $_2$, as_2 und b_2, also die Töne 5—8 möglichst stark genommen wurden, ieferen dagegen geschwächt waren.

A, *Ä* und *E* gelang es Helmholtz mit den zwölf Gabeln vom *b* an istellen. Dann gibt *b* allein *U*, dasselbe stark von b_1, schwächer von gleitet *O*. *A* erhält man, wenn man zu *b* zunächst b_1 und f_2 mäfsig ;, dagegen b_2 und d_3 als charakteristische Töne kräftig tönen läfst. *A* in *Ä* überzuführen, mufs man b_1 und f_2, die Nachbarn des tiefern kteristischen Tones d_2 etwas verstärken, b_2 dämpfen, dagegen d_3 und öglichst stark hervortreten lassen. Für *E* mufs man die beiden tiefsten der Reihe *b* und b_1 mäfsig stark halten als Nachbarn des tiefern Verrungstones f_1, und die höchsten f_3, as_3, b_3 möglichst heraustreten lassen. *I* und *Ü* herzustellen, gelang nicht, da die diese Vokale charakterisieen sehr hohen Obertöne sich nicht mit Gabeln herstellen liefsen.

Dafs die zur künstlichen Darstellung benutzten Bestandteile der Vokale Hülfe der Resonatoren in den gesungenen oder gesprochenen Vokalen achtet wurden, ja dafs man gerade durch derartige Beobachtungen die andteile kennen lernte, braucht wohl nicht besonders hervorgehoben rerden. Es mag nur in Bezug auf die Analyse der Vokale bemerkt len, dafs die in § 160 beschriebenen Flammenapparate von König für lbe vorzugsweise geeignet sind. Eine interessante Anwendung hat ig von dem Fig. 262 angegebenen Apparate gemacht. Da die verschien Vokale durch Kombination der verschiedenen Partialtöne charakteri- sind, so liefert natürlich jeder Vokal ein eigentümliches Flammenbild, hes bei der geringsten Änderung des Vokalklanges sich ebenfalls ändert. ig hat nun durch solche Flammenbilder nicht nur die einzelnen Vokale, lern auch die verschiedenen Nüancen derselben gezeichnet, wenn man Vokale in verschiedener Tonlage singt, so dafs man mit Hülfe der er genauer als auf irgend einem andern Wege jede Vokalnüance beinen kann[1]). Fig. 284 und Fig. 285 zeigen die Bilder für die Vokale nd *O*, wie ich sie erhielt, jeden auf *c* gesungen und mit möglichster falt im reinen Vokalklang gehalten; besonders bei *O* gibt die geringste icierung ein anderes Bild.

Ehe wir zur Besprechung der Bildung der Vokale in der menschlichen che übergehen, wird es gut sein, darauf hinzuweisen, dafs gerade mit e dieses Stimmgabelapparates von Helmholtz der bereits § 160 erwähnte weis geliefert wurde, dafs die Phase der komponierenden Teiltöne auf Klang ohne Einflufs ist. Wir erwähnten soeben, dafs man die Schwächung Stimmgabeltones durch weitere Entfernung der Resonanzröhre oder h teilweises Schliefsen des Deckels erhalten kann; letzteres Mittel bet eine kleine Verstimmung des Tones und bewirkt dadurch, dafs die

---

[1]) *König*, Poggend. Ann. Bd. CXLVI. Tafel III des Bandes gibt die menbilder der 5 Vokale *U*, *O*, *A*, *E*, *I*, für jeden Ton der beiden, der stimme entsprechenden Oktaven c_{-1} bis c_1. Für *E* und *I* sind die Bilder, das König auch hervorhebt, wenig charakteristisch. Die Bilder sind indes individuelle, bei einer andern Stimme fallen sie anders aus, da nicht bei Individuen die verschiedenen Obertöne in derselben Weise verstärkt wer- (*Helmholtz*, *Tonempfindungen* III. Ausgabe p. 163). So entsprechen die oben *chneten Bilder* wenig der Königschen Zeichnung.

Schwingungen etwas rascher oder langsamer werden, somit dafs die Stöfse einer verstimmten Gabel mit den andern nach und nach in immer andrer Periode zusammentreffen. Wurde nun ein Vokalklang deutlich erhalten, dadurch dafs der Ton einer Gabel durch Verschiebung der Resonanzröhre geschwächt wurde, so erhielt man genau denselben Klang, wenn der Ton durch Schliefsung des Deckels geschwächt wurde; da aber im letzten Falle die Phase der komponierenden Töne eine relativ immer andere wurde, so folgt aus diesem Versuche, dafs die Phase auf die Klangfarbe von keinem Einflusse ist.

Fig. 284.



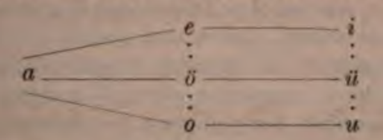
Fig. 285.



Die Möglichkeit einer so reichhaltigen Klangbildung durch die menschliche Stimme ist durch die Form unseres Sprachorganes gegeben. Wir haben vorhin unser Sprachorgan als eine Zungenpfeife mit weichen Zungen bezeichnet. Von den gewöhnlichen Zungenpfeifen dieser Art unterscheidet es sich aber wesentlich dadurch, dafs die Pfeife, das Schallrohr nicht eine unveränderliche Gestalt hat, sondern durch unsern Willen willkürlich geändert werden kann. Das Schallrohr der menschlichen Stimme sind die höheren Teile der Luftwege über dem Kehlkopf und ganz besonders die Rachenhöhle und Mundhöhle. Durch die Beweglichkeit der weichen Teile in den Umgebungen dieser Höhlen, den weichen Gaumen, die Zunge und die Lippen können wir diesen Höhlen die verschiedensten Gestalten geben, und es ist nach den Bemerkungen über die Tonbildung bei den weichen Zungen klar, dafs es wesentlich von der Form der Rachen- und Mundhöhle abhängig ist, welche von den harmonischen Obertönen eines von der Stimme gebildeten Grundtones verstärkt werden, welche nicht. Denn wie wir am Schlufs des § 165 erwähnten, sind in jedem durch Zungen gebildeten Klange die Obertöne in grofser Zahl vorhanden, alle, die deshalb bei einer bestimmten Stellung der Mundhöhle infolge der Resonanz verstärkt werden, finden sich in dem Klange, welcher dieser Stellung der Mundhöhle entspricht. Es sind das vorzugsweise die Töne, welche die Mundhöhle in ihrer bestimmten Form als einfache Pfeife angeblasen geben würde. Welche

[T]öne das sind, bestimmte Helmholtz[1]) im allgemeinen dadurch, dafs er vor [di]e Mundöffnung Stimmgabeln hielt, und den Ton aufsuchte, der bei einer [be]stimmten Vokalstellung des Mundes die stärkste Resonanz gab.

Dafs in der That die der Mundhöhle gegebene Form für die Bildung [de]r Vokale von wesentlichem Einflufs ist, hat man schon früher erkannt[2]), [in]dem schon der ältere Du Bois Reymond die Vokale in drei Reihen ordnete, [je] nach der Stellung des Mundes. Die drei Reihen sind



Der Vokal *A* ist der gemeinsame Ausgangspunkt für alle drei Reihen. [B]ei seiner Bildung nimmt die Mundhöhle eine ziemlich gleichförmig trichter[a]rtig erweiterte Gestalt an. Bei *O* und *U* wird die Mundhöhle vorn mit [d]en Lippen verengert, so dafs sie bei *U* am engsten ist, während sie in [d]er Mitte durch Herabziehen der Zunge erweitert wird. Sie nimmt also [d]ie Gestalt einer Flasche ohne Hals an, deren Öffnung vorn der Mund ist. [D]er Ton einer solchen Flasche ist um so tiefer, je enger die Öffnung ist, [un]d dem entsprechend fand Helmholtz, dafs bei der *U*-Stellung des Mundes [de]r Eigenton der Mundhöhle *f* ist[3]), und zwar ziemlich gleichmäfsig bei [m]ännlichen und weiblichen Mundhöhlen, bei welch letzteren das, was der [H]öhlung an Geräumigkeit abgeht, durch engern Verschlufs ersetzt wird. [De]r Eigenton der Mundhöhle bei *O* ist b_1. Geht man vom *O* allmählich [du]rch *Oa* und *Ao* zum *A*, so wird der Mund offener, und der Ton der [Mu]ndhöhle steigt um eine Oktave bis b_2[4]).

Beim Übergang vom *A* durch *Ae* in *E* und *I* wird die Gestalt der [Mu]ndhöhle eine ganz andere. Die Lippen werden dabei zurückgezogen und [ge]öffnet, die Zunge gehoben, so dafs zwischen Zunge und hartem Gaumen [nu]r ein enger Kanal bleibt, während der Raum unmittelbar über dem Kehl[ko]pf durch Herabdrücken der Zungenwurzel erweitert wird. Die Mundhöhle [be]kommt also die Gestalt einer Flasche mit engem Halse, den Bauch der [Fl]asche bildet der Schlund, den Hals der enge Kanal zwischen Zunge und [G]aumen, der Hals ist am engsten bei *I*, seine Länge von dem hintern Rande [de]r Flasche bis zum hintern Rande des Gaumes fand Helmholtz gleich [6] Centimeter.

Derartige Flaschen haben zwei Grundtöne, den des Bauches für sich [u]nd den des Halses, den man, besonders wenn er gegen den Bauch sehr [la]nge ist, als eine beiderseits offene Röhre ansehen kann. Dem entsprechend

---

[1]) *Helmholtz*, Tonempfindungen p. 166 ff.

[2]) *Du Bois Reymond*, Norddeutsche Zeitschrift von De la Motte Fouqué [1]817. *Helmholtz* a. a. O. p. 167.

[3]) *Donders* gibt die höhere Oktave f_1, welche auch *Auerbach*, Wiedemann [An]n. Bd. III durch Perkussion der Mundhöhle findet. Wie mir vor einigen [Ja]hren Weinhold zeigte, kann man die Mundhöhle durch einen kräftigen Luft[st]rom, den man an dem in der *U*-Stellung befindlichen Munde wie am Mund[lo]ch einer Flöte vorüber führt, tönend anblasen, man erhält dann bei richtiger [St]ellung stets einen nahe dem f_1 liegenden Ton.

[4]) *Auerbach* a. a. O. gibt f_2.

hat die Mundhöhle bei *Ae*, *E* und *I* zwei Eigentöne, bei *Ae* die Töne d_4 und g_3 bis as_3, bei *E* die Töne f_1[1]) und b_3 und bei *I* als tiefsten Ton etwa f_1, wie bei *U* und als Ton des Halses d_4.

Die Vokale *Ö* und *Ü* unterscheiden sich von *E* und *I* dadurch, daſs bei ihnen auch die Lippen röhrenähnlich geformt werden, so daſs diese eine Fortsetzung des engen Kanales bei *E* und *I* bilden. Für diese Vokale ändert sich deshalb nur der Ton des Halses, er wird tiefer als bei *E* und *I*, er wird cis_3 und g_3 bis as_3 wie bei *Ae*. Die tiefern Eigentöne bleiben f_1 und f[2]).

Wie eben erwähnt wurde, sind es nun gerade die Obertöne des Klanges, welche mit den Eigentönen des Mundes zusammenfallen oder doch ihnen nahe genug sind, welche vorzugsweise verstärkt werden, während die andern gedämpft werden, und eine Vergleichung der zuletzt gemachten Angaben mit den bei der künstlichen Bildung der Vokale angegebenen charakteristischen Tönen der einzelnen Vokale wird die Übereinstimmung beider und damit erkennen lassen, daſs das Wesen der Vokalbildung in dem durch die Form der Mundhöhle bewirkten Auftreten der verschiedenen Obertöne bedingt ist. Es wird eben jedesmal, auf welchen Grundton wir einen Vokal auch bilden, immer derjenige Oberton des Grundtones, am meisten verstärkt, der dem Eigentone der Mundhöhle am nächsten kommt. Die Vokalklänge unterscheiden sich von den Klängen der übrigen musikalischen Instrumente gerade dadurch, daſs die Stärke ihrer Obertöne nicht von der Ordnungszahl derselben, sondern von deren absoluter Tonhöhe abhängt. Wird z. B. der Vokal *A'*, dessen charakteristischer Ton b_2 ist, auf die Note es_{-1} gesungen, so ist der verstärkte Ton der 12. Ton des Klanges, wird derselbe Vokal auf b_1 gesungen, so ist der verstärkte Ton der zweite des Klanges. Daher rührt es denn auch, daſs der reine Vokalklang, besonders für die Vokale, deren charakteristischer Ton tiefer liegt, am besten bei gewissen Tonhöhen herauskommt, bei denen nämlich, bei welchen ein Oberton genau mit dem charakteristischen Ton zusammenfällt[3]).

Zur Bildung der menschlichen Sprache gehört auſser jener der Vokale auch die der Konsonanten; diese sind keine Selbstlauter, es sind nur Tonhemmungen oder Verzögerungen, welche durch das Anfangen oder Abschlieſsen eines Vokallautes oder höchstens als Geräusche wahrnehmbar sind.

Nach Brücke[4]) teilt man die Konsonanten je nach dem Orte des Verschlusses im Munde in drei Gruppen, an deren Spitze die drei mutae *p*, *t*, *k* stehen.

Die erste Gruppe bilden *p*, *b*, *f*, *v*, *w*, *m*; den Verschluſs bilden ent-

---

[1]) Nach Auerbach g_1 bis a_1.

[2]) Nach Auerbach a_1 und f_1.

[3]) Wie es möglich ist, daſs die Eigentöne der Mundhöhle auch durch solche Töne verstärkt werden können, zu deren harmonischer Reihe der Eigenton nicht gehört, werden wir im § 173 zeigen, wodurch der hauptsächlichste Einwand von Quantens gegen die Helmholtzsche Vokaltheorie (Poggend. Ann. CLIV) widerlegt wird. Genaueres über die Zusammensetzung der Vokale, die Intensitätsverhältnisse der Partialtöne und die Abhängigkeit derselben von der Tonhöhe, auf welcher die Vokale angegeben werden, sehe man in der interessanten Abhandlung von F. Auerbach, Poggend. Ann. Ergbd. VIII und neue Folge Bd. III. Bd. IV, an welch letzterer Stelle Auerbach auch die von der Helmholtzschen abweichende Vokaltheorie Graſsmanns, Poggend. Ann. neue Folge (Wiedem. Ann.) Bd. I bespricht.

[4]) *Ludwig*, Lehrbuch der Physiologie. S. 589.

weder die beiden Lippen oder eine der Zahnreihen mit den Lippen. *P* entsteht durch ein plötzliches Öffnen der vorher fest verschlossenen Lippen, während ein Luftstrom aus dem Kehlkopf gegen die Mundöffnung dringt, *b* entsteht gerade so, nur sind die Lippen etwas weniger gespannt und das Öffnen geschieht etwas weniger energisch. *F* wird gebildet, indem wir die untere Lippe an die oberen Schneidezähne legen und einen Luftstrom hindurchsenden, desgleichen *v*, ein mildes *f*, und *w*, bei dem zugleich eine Hemmung des Luftstromes, ein dichterer Verschlufs stattfindet, welcher das *w* dem *b* nähert.

Das *m* entsteht schliefslich, indem man die Lippen wie zu *b* stellt und die Luft mit tönender Stimme zur Nase hinausströmen läfst.

Die zweite Gruppe umfafst *t*, *d*, die verschiedenen *s*, *l* und *n*. Für diese bildet die Zunge den Verschlufs, indem sie sich entweder an die obern Schneidezähne oder an den vordern Teil des harten Gaumens anlegt. *T* wird gebildet durch Anstemmen der Zunge an die Schneidezähne und plötzliche Fortnahme derselben, *d* verhält sich zum *t*, wie *b* zum *p*.

Das harte *s*, *sz*, *ss* bildet sich, wenn bei der dem *t* zugehörigen Zungenstellung eine kleine Spalte geöffnet und durch diese Luft ausgestofsen wird, durch schwächeres Anstemmen entsteht das weiche *s*. Das *l* entsteht, wenn man den Verschlufs der Zunge vorn wie bei *d* läfst, dagegen hinten neben den Backzähnen beiderseitig eine kleine Öffnung läfst, durch welche die Luft hindurchstreicht. Wird ferner die Zunge wie bei *t* gestellt und läfst man die Luft durch die Nase entweichen, so entsteht *n*.

In die dritte Gruppe gehören die Gaumenlaute *k*, *g*, *ch*, *j* und das Gaumen-*n* (vor *g* in *ng*). *K* entsteht wie *t* und *p*, nur dafs der Verschlufs hier von dem hintern Teile der Zunge und dem Gaumen gebildet wird. *G* entsteht aus *k* wie *b* und *d* aus *p* und *t*, *ch* wie *s* und *f*, nur dafs auch hier zwischen dem tiefern Teile der Zunge und dem Gaumen die enge Öffnung bleibt, zwischen der der Luftstrom hindurchgeht.

J bildet sich, indem die Zunge mehr nach der Mitte hin sanft gegen den Gaumen angelegt und Luft durchgehaucht wird, und schliefslich das Gaumen-*n*, indem die Zunge wie beim *ch* nur fester gegen den Gaumen gelegt wird und die Luft bei tönender Stimmritze durch die Nase entweicht.

Der noch übrig bleibende Konsonant *r* kann labial, lingual und guttural sein; er entsteht, indem wir einen der leichtschwingenden Mundteile mittels des Luftstromes in schwingende Bewegung versetzen, deren einzelne Stöfse so langsam auf einander folgen, dafs wir die einzelnen Stöfse gesondert wahrnehmen; diese Schwingungen können die Lippen, die Zungenspitze, wenn sie wie zum *t* gestellt ist, und das Zäpfchen vollführen.

Zweites Kapitel.

Von der Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

§ 168.

Ausbreitung des Schalles in der Luft. Wir sahen in § 152, dafs es zur Wahrnehmung des Schalles erforderlich sei, dafs die Schwingungen des festen Körpers oder die andern tonerzeugenden Schwingungen auf ein

elastisches Medium übertragen und zu unserem Ohre fortgepflanzt werden. Da in einem jeden solchen Mittel die Schallschwingungen longitudinale werden, wie alle unsere Entwicklungen über den Schall zeigen, oder da es die longitudinalen Schwingungen der elastischen Medien sind, welche wir durch die gegen unser Gehörorgan ausgeübten Stöfse als Schall wahrnehmen, so müssen die Gesetze der Ausbreitung des Schalles mit den Gesetzen der Verbreitung longitudinaler Wellen übereinstimmen, welche wir im vorigen Abschnitte entwickelt haben.

Zunächst folgt aus dem Frühern, dafs der Schall sich von einem erregenden Mittelpunkte aus in kugelförmigen Wellen nach allen Richtungen ausbreiten mufs.

Mit dem Abstande von der Quelle des Schalles mufs dann die Intensität desselben abnehmen; und zwar nach einem bestimmten Gesetze. Die schwingende Bewegung, welche von einem Mittelpunkte ausgeht, teilt sich immer gröfsern und gröfsern Kugelwellen mit, und nach der Zeit t sind alle Luftteilchen auf einer Kugelschale in Bewegung, deren Radius r gleich ct ist. Das Maximum der Geschwindigkeit, welches diese Teilchen beim Verlassen ihrer Gleichgewichtslage besitzen, sei gleich v. Die Mafse der zugleich bewegten Teilchen ist proportional der Gröfse der Fläche, auf der alle Teilchen zugleich bewegt werden oder proportional der Oberfläche der Kugel $4\pi r^2$.

Nach der Zeit t' werden ebenso alle Teilchen auf einer Kugelfläche vom Radius $r' = ct'$ eine Geschwindigkeit v' erhalten und die Masse der zugleich bewegten Teilchen ist $4\pi r'^2$.

Nach einem Satze der analytischen Mechanik ist die lebendige Kraft eines bewegten Systems konstant, wenn die Bewegung nur Folge ist von innern zwischen den einzelnen Punkten des Systems thätigen Kräften. Die schwingende Bewegung ist nun eine solche, bei welcher die Bewegung der einzelnen Punkte nur Folge der Elasticitätskräfte ist, demnach ist hier jener Satz anwendbar, oder es mufs die Gleichung bestehen

$$4\pi r^2 \cdot v^2 = 4\pi r'^2 \cdot v'^2$$

oder

$$r^2 \cdot v^2 = r'^2 \cdot v'^2$$

$$v : v' = r' : r.$$

Die Geschwindigkeit, welche den einzelnen schwingenden Teilchen in verschiedenen Abständen vom Mittelpunkte der Schwingung erteilt wird, ist dem Abstande der Teilchen vom Mittelpunkte der Schwingung umgekehrt proportional. Nennen wir demnach die Geschwindigkeit im Abstande 1, v, so ist sie im Abstande r vom Mittelpunkte $\frac{v}{r}$.

Wir haben bereits bemerkt, dafs wir die Intensität des Schalles der Stärke des Stofses gleichsetzen, welchen unser Gehörorgan von den schwingenden Luftteilchen erhält. Die Stärke des Stofses ist aber der lebendigen Kraft der stofsenden Teile proportional, da dieselbe durch die Gröfse des Weges gemessen wird, durch welchen der widerstehende Körper wirken mufs, um die Geschwindigkeit des stofsenden zu vernichten. Da nun die Geschwindigkeit der schwingenden Teile abnimmt in demselben Verhältnis, wie sie weiter vom erregenden Mittelpunkte entfernt sind, und

da wir den Schall bei der konstanten Gröfse unseres Gehörorgans immer durch den Stofs einer gleichen Menge Luftteilchen vernehmen, so folgt, dafs die Intensität des Schalles abnimmt, wie die Quadrate der Entfernung von der Quelle des Schalles wachsen.

Dafs der Schall schwächer wird, wenn wir uns von der Quelle desselben entfernen, ist eine bekannte Thatsache, auch dafs er rascher schwächer wird, als die Entfernungen wachsen, ist bekannt.

Genaue Messungen über die Abnahme der Schallstärke mit der Entfernung, wie überhaupt über die Stärke des Schalles gibt es nicht, da es für den Schall keinen exakten Messapparat gibt und die vorhandenen Sonometer nur dazu dienen können, ein Mehr oder Minder der Schallstärke zu zeigen, nicht aber genaue Messungen anzustellen. Es liegt das im Wesen des Schalles, der eigentlich nur in einer Empfindung besteht, da er nur eine besondere Wahrnehmung einer bestimmten Bewegungsart ist, und nur insofern Schall ist, als wir diese Bewegungsart mit unserem Ohre wahrnehmen; wir können denselben daher nur nach seinem Eindrucke auf das Ohr beurteilen. Auch beim Licht ist das zwar der Fall, dafs wir es nur durch die Eindrücke auf das Auge beurteilen können, dort können wir aber mehrere Lichtwirkungen gleichzeitig beurteilen, wir können sie kompensieren, indem wir Flächen zugleich von entgegengesetzten Seiten beleuchten und auf manche andere Weise vergleichen. Schalle gleicher Qualität können wir aber nur, wenn sie nach einander wirken, mit einander vergleichen, und dadurch ist jede Messung ausgeschlossen.

Da der Schall eine Wellenbewegung ist, so mufs die Geschwindigkeit seiner Verbreitung mit derjenigen der Wellenbewegung übereinkommen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung ist in einem und demselben Mittel konstant, sie hängt nur ab von der Dichtigkeit und Elasticität des Mittels nach der Gleichung

$$c = C\sqrt{\frac{e}{d}},$$

also nicht von der Oscillationsdauer der schwingenden Bewegung oder ihrer Wellenlänge, bei transversalen Wellen vorausgesetzt, dafs die Länge der Wellen gegen den Abstand der Moleküle sehr grofs ist. Für die Töne der Musik, deren Wellenlänge kaum unter vier Centimeter herabgeht, wird man letzteres annehmen dürfen, alle Töne müssen sich daher in einem und demselben Mittel mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzen. Es ist das auch eine bekannte Erfahrung, auf der allein die Möglichkeit einer harmonischen Musik beruht. Selbst in der gröfsten Entfernung wird die Harmonie derselben nicht gestört, ein Beweis, dafs die höchsten wie die tiefsten Töne sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen.

Ganz vollkommen gleich scheint indes nach den neuern Versuchen von Regnault die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der tiefen und hohen Töne nicht zu sein. Bei den gleich näher zu besprechenden Versuchen über die Fortpflanzung des Schalles liefs Regnault an dem einen Ende des auf dem Boulevard St. Michel zu Paris befindlichen Wasserleitungsrohres, welches einen Durchmesser von $1^m,1$ und eine Länge von $1417^m,95$ hatte, eine Zungenpfeife tönen, deren Grundton c_2 war, und welche ein kegelförmiges Ansatzrohr besafs. In dem andern Ende des Rohres waren acht Helm-

holtzsche Resonatoren, die c_2 und seinen harmonischen Obertönen entsprachen, angebracht, welche durch Kautschukröhren mit einem gröfsern Kasten von Holz verbunden waren, an dessen Öffnung man das Ohr anlegen konnte. Die den Resonatoren entsprechenden Töne wurden deutlich und klar gehört. Man hörte bei diesen Versuchen konstant zuerst den Grundton c_2, auf diesen folgte erst die Oktave, die Quint derselben und dann erst die höhern Partialtöne, so dafs stets die tiefern vor den höhern Tönen gehört wurden. Die tiefern Töne haben demnach eine etwas gröfsere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als die höhern, und ein Klang verändert deshalb in grofser Entfernung einigermafsen seine Farbe. Der Unterschied in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit war indes so klein, dafs er sich nicht weiter messen liefs.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in der Luft wurde unser Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}} = \sqrt{\frac{gH\sigma}{s} \cdot k\,(1 + \alpha t)}$$

somit, wenn wir g und H in Metern angeben,

$$c = \sqrt{\frac{9{,}808 \cdot 0{,}76 \cdot 13{,}59}{0{,}001\,293} \cdot 1{,}405\,(1 + \alpha t)} = 331^{\mathrm{m}}{,}8 \cdot \sqrt{1 + \alpha t}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft mufs daher bei 0^0 gleich $331^{\mathrm{m}},8$ sein, oder allgemein, da α, wie wir in der Wärmelehre nachweisen werden, gleich 0,003 665 ist,

$$c = 331^{\mathrm{m}}{,}8 \sqrt{1 + 0{,}003\,665\,t}.$$

Die Versuche, welche man angestellt hat, um die Geschwindigkeit des Schalles direkt zu messen, geben ein mit der Theorie vollkommen übereinstimmendes Resultat. Die ersten genauern Versuche waren die berühmten Versuche der Mitglieder der Pariser Akademie, Cassini, Maraldi und La Caille im Jahre 1738 [1]). Als Stationen waren das Observatorium zu Paris, der Montmartre, Fontenay-aux-Roses und Monthlery gewählt. Die Beobachtungen wurden des Nachts angestellt und begannen auf ein vom Observatorium gegebenes Signal.

Man löste von 10 zu 10 Minuten auf einer der Stationen eine Kanone und beobachtete auf allen andern die Zeit, welche verflofs zwischen der Wahrnehmung des Lichtblitzes beim Abfeuern der Kanone und der Ankunft des Schalles. Da der Abstand der einzelnen Stationen vorher genau gemessen war, so erhielt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch Division des Abstandes durch die beobachtete Zeit.

Diese Beobachtungen wurden längere Zeit unter sehr verschiedenen atmosphärischen Verhältnissen fortgesetzt, und man fand der Theorie gemäfs:

1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist unabhängig von dem Drucke der Luft.

2. Sie wächst mit der Temperatur der Luft.

3. Sie ist dieselbe in jeder Entfernung von der Schallquelle, das heifst, der Schall pflanzt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort.

---

[1]) Mémoires de l'Acad. de Paris 1738 und 1739.

4. Mit dem Winde pflanzt sich der Schall rascher fort als gegen den [?]d, und zwar ist sie im ersten Falle die Summe, im zweiten Falle die [?]erenz der Geschwindigkeiten des Schalles und des Windes.

5. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist in ruhiger trockner [?] bei 0° 1038 pariser Fuſs oder 337 Meter, oder nach der Berechnung [?]er Versuche von Le Roux[1]) gleich 332m.

Da durch den Einfluſs des Windes die Geschwindigkeit des Schalles [?]dert wird, so ist zur Erzielung genauerer Resultate erforderlich, daſs [?] an beiden Enden einer Standlinie den Schall errege und beobachte; in [?] einen Richtung wird dann der Schall so viel beschleunigt, als er in [?] andern verzögert wird, und das Mittel aus beiden Resultaten ergibt [?]vom Einfluſs des Windes befreite Zahl für die Fortpflanzungsgeschwindig- [?] des Schalles in ruhiger Luft.

Mit dieser Vorsicht wurde im Jahre 1822 bei Paris zwischen Month- [?] und Villejuif die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles aufs neue [?]immt[2]). Es wurden an beiden Orten von 10 zu 10 Minuten Kanonen [?]st, die so gestellt waren, daſs von jedem Orte die Explosion der andern [?]one gesehen wurde. Man war übereingekommen, daſs die Kanonen- [?]sse zu Monthlery 5 Minuten früher anfangen sollten, als zu Villejuif. [?] Beobachter waren zu Monthlery Humboldt, Gay-Lussac und Bouvard, [?]Villejuif Arago, Mathieu und Prony. Die Kanonenschüsse von Monthlery [?]den zu Villejuif alle gut gehört, zu Monthlery wurden von den 12, die [?]st wurden, nur 7 wahrgenommen. Dieser unaufgeklärte Umstand ge- [?]tete die Korrektur wegen Bewegung der Luft nicht so vollständig, als [?] wünschte; indes ergaben die beiderseitigen Beobachtungen nahezu [?]reinstimmende Resultate. Die Beobachtungen zu Villejuif nahmen im [?]tel 54,84 Sekunden nach dem Lichtblitze den Schall wahr, diejenigen zu [?]thlery nach 54,43 Sekunden. Das Mittel aus beiden Zahlen ist 54,63.

Die Distanz beider Stationen bestimmte Arago zu 18622,27 Meter, die [?]chwindigkeit des Schalles ist darnach

$$c = \frac{18622{,}27}{54{,}63} = 340{,}8 \text{ Meter.}$$

Die Temperatur der Luft bei diesen Beobachtungen war 16° C., die [?]chwindigkeit bei 0° wird daher

$$c_0 = \frac{340{,}8}{\sqrt{1 + 0{,}003\,665 \cdot 16}} = 331{,}2.$$

Kurz nachher wurde mit noch gröſserer Vorsicht von den holländischen [?]sikern Moll, van Beek und Kuytenbrouwer[3]) die Geschwindigkeit des [?]alles bei Amsterdam nochmals bestimmt und diese erhielten als Resultat [?] die Geschwindigkeit des Schalles in ruhiger und trockner Luft bei 0° C.

$$c_0 = 332{,}26 \text{ Meter}$$

[1]) *Le Roux*, Ann. de chim. et de phys. IV. Série T. XII.
[2]) Annales de chim. et de phys. XX, 210. Poggend. Ann. Bd. V. p. 477.
[3]) Poggend. Ann. Bd. V. p. 351. 469. In einem Anhange zu dieser Abhand-[?] sind auch die sonstigen auf gröſsere Genauigkeit Anspruch machenden Ver-[?]e zusammengestellt.

oder nach einer neuen Berechnung von Schröder van der Kolk[1])

$$c_0 = 332{,}77.$$

Nach der Theorie mufs die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, da sie nur von dem Quotienten der einander proportionalen Gröfse $\frac{H}{s}$ abhängt, unabhängig sein von der Dichtigkeit der Luft, also dieselbe sein, wenn sich der Schall aufwärts in dünner Luft oder abwärts in dichtere Luft fortpflanzt. Dies ist durch die Versuche von Bravais und Martins bei einem bedeutenden Höhenunterschiede am Faulhorn bestätigt worden[2]). Die eine Station war am Faulhorn, die andere am Brienzer See, ihre schiefe Entfernung betrug 9560 Meter, der Höhenunterschied 2079 Meter, so dafs die Neigung der vom Schall durchlaufenen Linie $12^0\ 26'$ betrug. Es wurde mit Anwendung wechselseitiger Schüsse auf dem Berge von A. Bravais und Martins, am See von C. Bravais beobachtet, die beiden erstern hörten 18, der letztere 14 Schüsse im ganzen an drei Tagen. Die direkt beobachtete Geschwindigkeit des Schalles war aufwärts $337^m{,}92$, und abwärts $338^m{,}10$, also im Mittel $338^m{,}01$. Auf 0^0 und trockne Luft reduciert, wird daraus

$$c_0 = 332{,}37,$$

eine Zahl, die fast vollkommen mit der von Moll und van Beek erhaltenen übereinstimmt.

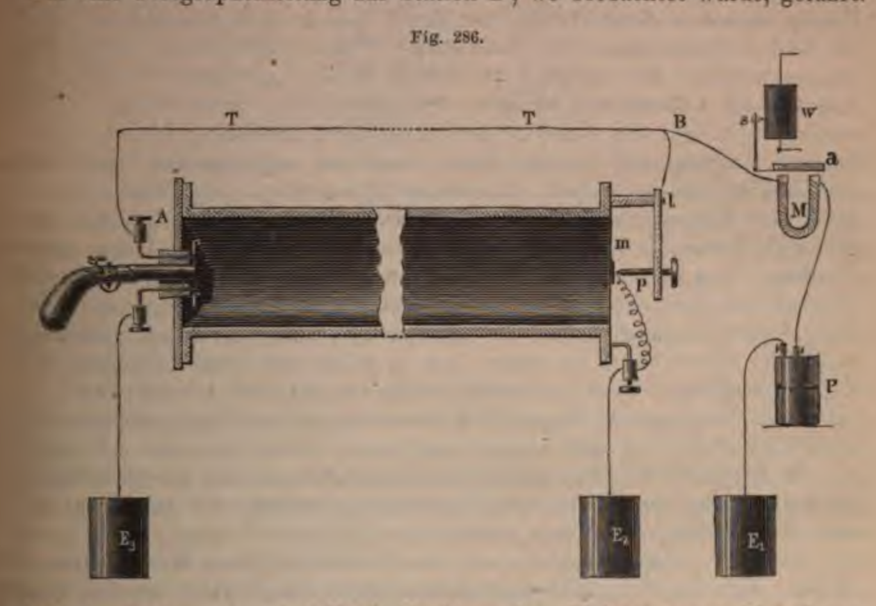
Gegen die mitgeteilte Beobachtungsmethode hat Regnault[3]) den Einwurf erhoben, dafs dieselbe keine absolut genauen Resultate liefern könne, da es bei derselben dem Beobachter unmöglich sei, den Moment der Schallerzeugung und den der Wahrnehmung mit absoluter Genauigkeit zu bestimmen. Der Beobachter werde stets durch den aufflackernden Lichtblitz wie durch den ankommenden Schlag überrascht, und ebenso sei es keineswegs sicher, dafs bei dem Markieren des Sekundenzählers zwischen der Wahrnehmung und der dadurch hervorgebrachten Willensäufserung eine durchaus unmefsbare Zeit liege. Deshalb sei dieses Verfahren nur statthaft bei sehr grofsen Standlinien und deshalb sehr intensiven Schallen. Bei sehr intensiven Schallen sind aber, wie schon Schröder van der Kolk[4]) hervorgehoben hatte, die Voraussetzungen der Theorie, welche als Mafs der Elasticität den augenblicklichen Luftdruck setzt, nicht mehr gestattet, da dann in den Verdichtungswellen eine merkliche Verdichtung stattfindet, bei welcher die Gase dem Mariotteschen Gesetze nicht mehr folgen. Bei grofsen Standlinien und im freien Raume ist allerdings nach den Bemerkungen von Schröder dieser Einflufs unmerkbar, indes bleibt immer die erste Unsicherheit bestehen. Die nahe Übereinstimmung der gefundenen Werte unter einander und mit der Theorie beweist deren Richtigkeit auch nicht, da der Wert von k sich nicht direkt mit Sicherheit bestimmen läfst, vielmehr, wie wir im dritten Teile sehen werden, am besten aus der Schallgeschwindigkeit abgeleitet wird. Wir haben oben für k den aus Versuchen von Masson, Hirn und Weifsbach abgeleiteten Wert für k eingesetzt, welche unter sich zwischen 1,419 und 1,3845 schwanken.

[1]) *Schröder van der Kolk*, Poggend. Ann. Bd. CXXIV.
[2]) *Bravais* und *Martins*, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XIII. Poggend. Ann. Bd. LXVI. p. 351.
[3]) *Regnault*, Mémoires de l'Acad. de France. T. XXXVII.
[4]) *Schröder van der* Kolk, Poggend. Ann. Bd. CXXIV.

Regnault hat deshalb neuerdings eine ausgedehnte Untersuchung über die Fortpflanzung des Schalles durchgeführt und dabei die Wasserleitungsröhren benutzt, welche in den Jahren 1862 und 1863 in Paris neu gelegt wurden; gleichzeitig suchte er auch die Fortpflanzung des Schalles in freier Luft durch Kanonenschüsse zu bestimmen.

Der wesentliche Unterschied der Regnaultschen Methode von den frühern ist der, dafs er den Moment der Erzeugung des Schalles und den der Ankunft am Orte der Beobachtung nicht durch den Beobachter selbst bestimmen, sondern ihn an einem selbstthätigen Registrierapparate sich aufzeichnen liefs. Er benutzte dazu die elektrische Telegraphie, in einer Weise, wie sie das Schema Fig. 286 deutlich macht. Der Schall wurde erzeugt bei den Röhren durch den Schufs einer Pistole, in freier Luft durch den einer Kanone. Von dem Orte A, wo sich die Pistole befand (Fig. 286), war eine Telegraphenleitung zur Station B, wo beobachtet wurde, geführt.

Fig. 286.



Von der Leitung ging bei B ein Draht zu dem Elektromagnet M und von diesem zu dem einen Pol der Batterie P. Der andere Pol der Batterie war durch die Platte E_1 mit der Erde in leitender Verbindung. Wurde noch ein anderer Punkt der Leitung mit der Erde in leitende Verbindung gebracht, so wurde der Strom geschlossen, der Magnet magnetisch, und der Anker a angezogen; wurde die Leitung wieder unterbrochen, so wurde der Anker wieder von dem Magnete entfernt. War der Anker angezogen, so schrieb der Stift s auf einem geschwärzten Cylinder, der ebenso wie bei den Phonautographen mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit gedreht wurde.

Eine solche Verbindung der Leitung TT mit der Erde wurde bei dem Beginne der Versuche bei A hergestellt, indem in der Lücke ff der Leitung, die T mit E_3 verband, unmittelbar vor der Mündung der Feuerwaffe ein feiner Metalldraht ausgespannt wurde. Diese Verbindung wurde dann in dem Moment unterbrochen, in welchem das Geschütz abgefeuert

wurde, indem ein fester auf die Ladung gesetzter Filzpfropf den Draht ff zerrifs. Die Unterbrechung des Stromes entfernte den Stift s von der geschwärzten Walze, so dafs das Aufhören des von s geschriebenen Striches den Moment der Schallerzeugung angab. In dem Augenblicke nun, in welchem der Schall in B ankam, wurde der Strom wieder geschlossen, so dafs durch einen neuen von dem Stift s auf der Walze gezogenen Strich dieser Moment markiert wurde. Zu dem Ende war bei B in passender Weise eine sehr feine Membran m ausgespannt, welche durch die ankommende Schallwelle in Schwingungen versetzt wurde. Die Membran trug in ihrer Mitte ein kleines Platinplättchen, welches durch einen feinen äufserst biegsamen Draht mit der in die Erde versenkten Platte E_2 in Verbindung stand. Unmittelbar vor der Platte befand sich ein Stift p, welcher mit der Leitung T durch plB in metallischer Verbindung war. Die bei m ankommende Welle gab der Membran einen Stofs und bewirkte dadurch, dafs der Stift p mit dem Platinplättchen in Kontakt kam und damit, dafs der Strom geschlossen und der Stift s wieder gegen die geschwärzte Walze gedrückt und ein Strich gezogen wurde. Der Abstand der beiden Striche gab dann die zwischen Abgabe und Ankunft des Schalles verstrichene Zeit, wenn man die Zeit bestimmte, welche die Walze zu der beobachteten Drehung gebraucht hatte. Zu dem Ende wurden auf der Walze durch ein schwingendes Pendel die einzelnen Sekunden markiert, und gleichzeitig von einer schwingenden Stimmgabel eine Wellenlinie gezogen. Diese drei Linien, die des Pendels, der Stimmgabel und die von dem Stifte s gezogenen, waren unmittelbar unter einander. Man hatte deshalb nur die Wellen vom ersten Aufhören des von s gezogenen Strichs bis znm ersten folgenden Sekundenzeichen, und von dem letzten Sekundenzeichen vor dem zweiten von s gezogenen Strich bis zu diesem Strich selbst zu zählen, um in selbst tausendstel Sekunden die Zeit zu erhalten, welche der Schall gebraucht, um von A bis B sich fortzupflanzen. Eine genaue Messung des Abstandes AB gab die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles.

In Bezug auf die Einzelnheiten der Ausführung und der Versuche selbst müssen wir auf die Abhandlung Regnaults verweisen, wir begnügen uns hier, die erhaltenen Resultate mitzuteilen.

Zunächst schlofs Regnault aus den Versuchen in den Wasserleitungsröhren, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der That mit der Intensität des Schalles abnehme. Bei diesen Versuchen wurde die Pistole bei A in das eine Ende der Wasserleitungsröhre hineingesteckt, welches im übrigen ganz verschlossen war und das andere Ende bei B ebenfalls ganz geschlossen. Die Schallwelle kam dann zunächst direkt von A nach B, wurde bei B reflektiert und kehrte dann nach einer zweiten Reflexion bei A wieder nach B zurück, nachdem sie das Rohr dreimal durchlaufen hatte u. s. f. Dabei zeigte sich, dafs trotzdem sich der Schall in cylindrischen Röhren ausbreitete, seine Intensität sehr rasch abnahm, und zwar um so rascher, je enger die Röhre war, in welcher der Schall sich ausbreitete. So wurde der von einer mit 1 Gramm Pulver geladenen Pistole erzeugte Schall nicht mehr gehört, als er in einer Röhre vom

Durchmesser $0^m,108$ durchlaufen hatte 1150^m.
„ $0^m,300$ „ „ 3810^m
„ $1^m,100$ „ „ 9540^m.

Durch die Bewegung der Membran *m* konnte man indes die Rückkehr der Welle viel länger beobachten, man erkannte sie in den drei eben genannten Röhren und unter den angegebenen Umständen noch, nachdem sie resp. 4056^m, 11430^m und 19851^m durchlaufen hatte.

Entsprechend der Abnahme der Intensität zeigte sich auch eine Abnahme der Geschwindigkeit des Schalles, wie folgende Zahlen zeigen:

Röhre von 0^m,108 Durchmesser		Röhre von 0^m,300 Durchmesser	
durchlauf. Weg	Geschw.	durchlauf. Weg	Geschw.
566^m,74	330,99	3810^m,3	332,18
1700^m,22	328,21	7620^m,6	330,43
2833^m,70	327,52	11430^m,0	329,64
4055^m,90	326,66	15240^m,9	328,96

Röhre von 1^m,10 Durchmesser	
durchlauf. Weg	Geschw.
749^m,1	334,16
1417^m,9	332,50
5671^m,8	331,24
11343^m,6	330,68
19851^m,3	330,52

Die Zahlen zeigen somit eine beträchtliche Abnahme der Schallgeschwindigkeit mit der Intensität, gleichzeitig ergeben sie aber auch, daſs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren verschiedener Weite eine sehr verschiedene ist. Sehr deutlich tritt dieser Unterschied bei der Vergleichung der drei in jeder Reihe letzten Werte hervor, welche die mittlere Geschwindigkeit des Schalles geben von dem Momente seiner Erzeugung bis zum Momente, in welchem der Schall nicht mehr wahrnehmbar ist.

Aus diesen Erfahrungen ergibt sich, daſs die Wände der Röhren, in welchen die den Schall fortpflanzende Luft eingeschlossen ist, auf die Elasticität der Luft vermindernd einwirken müssen, ohne die Dichtigkeit zu vermindern, oder daſs die Dichtigkeit vermehrt wird, ohne daſs gleichzeitig die Elasticität vergröſsert wird. Daſs zwischen der schwingenden Luft und den Wänden eine Wechselwirkung besteht, das ergibt sich schon aus der raschen Abnahme der Schallintensität beim Fortpflanzen des Schalles durch die Röhren. Denn da hier die fortschreitende Welle immer wieder dieselbe Luftmasse in Bewegung versetzt, so kann die Abnahme der Schallstärke nur von einer Abgabe der Bewegung an die Röhrenwände herrühren, eine Abgabe, die auch dadurch konstatiert wurde, daſs man neben der Röhre auf ihrer ganzen Länge den Schall zu hören imstande war.

Um den Einfluſs der Röhrenwände ganz zu eliminieren, müſste man Röhren von unendlich groſsem Durchmesser anwenden. Regnault glaubt indessen, daſs bei der Röhre, deren Durchmesser gleich 1,1^m ist, der Einfluſs der Wände schon ganz unmerklich gewesen sei, daſs man deshalb die aus der letzten Versuchsreihe sich ergebende Zahl 330^m,6 als die mittlere Geschwindigkeit des durch einen Pistolenschuſs erzeugten Schalles von dem Entstehungsmomente bis zu dem, in welchem er verschwindet, ansehen könne.

Die unserer Gleichung entsprechende Geschwindigkeit würde das noch nicht genau sein, da unsere Gleichung voraussetzt, daſs die Dichtigkeits-

änderung der Luft unendlich klein ist, somit strenge genommen für den Schall eine unendlich kleine Intensität voraussetzt. Man erhält dieselbe bei diesen Versuchen aus den Zwischenräumen, welche bei den letzten unmittelbar vor dem Verschwinden des Schalles gemachten Beobachtungen zwischen einer und der folgenden Rückkehr des Schalles verstreichen. Regnault erhält hierfür die nur wenig kleinere Zahl

$$c_0 = 330{,}30.$$

In freier Luft erhielt Regnault für die Geschwindigkeit eines durch Kanonenschüsse erzeugten Schalles in der That fast genau die in der weitesten Röhre gefundene Zahl, nämlich als mittlere Geschwindigkeit

$$c_0 = 330{,}70 \text{ Meter},$$

eine Zahl, welche nur um 0,4 von der in der Röhre gefundenen sich unterscheidet.

Gegen die Deutung, welche Regnault seinen Versuchen in Bezug auf die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität des Schalles gegeben, hat später Rink[1]) sehr berechtigte Einwände erhoben, und gezeigt, dafs Regnaults Versuche eine solche Abhängigkeit keineswegs erkennen lassen, wenn man aus den Berechnungen der Versuche das erste und zweite Durchlaufen der Röhren ausschliefse. Für diese und besonders für das erste kann man die Gesetze der Schallausbreitung gar nicht anwenden. Durch den Pistolenschufs wird nämlich die Luft selbst in der Axe der Röhren mit grofser Geschwindigkeit fortgeschleudert, so dafs also zunächst sich nicht nur die Schwingungen in der Röhre fortpflanzen, sondern auch der Träger derselben, die Luft. Die Beobachtung des ersten Durchlaufens der Röhre mufs also gerade so eine zu grofse Geschwindigkeit des Schalles geben, wie Versuche in freier Luft, bei welchen man die Fortpflanzung des Schalles mit der Richtung des Windes beobachtet. Möglich ist es, dafs auch bei der ersten Rückkehr des Schalles die Luft noch eine von der schwingenden Bewegung unabhängige fortschreitende Bewegung hat, und deshalb schlofs Rink aus seiner Berechnung der Regnaultschen Versuche auch diese Beobachtung aus.

Ein weiterer Beweis gegen die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Intensität desselben ergibt sich daraus, dafs bei stärkeren Pulverladungen der Pistole die Geschwindigkeiten sich keineswegs gröfser ergeben, während doch die mit stärkeren Pulverladungen abgegebenen Schüsse einen Schall von erheblich gröfserer Intensität geben.

In folgender Tabelle sind zum Beweise der Richtigkeit der Einwürfe von Rink die berechneten Werte der Geschwindigkeit für einige Beobachtungsreihen zusammengestellt, die in dem $1{,}10^{\text{m}}$ weiten Rohre erhalten sind. Die erste Kolumne enthält die Nummer der Versuchsreihe, wie Regnault sie bezeichnet hat, die zweite die Pulverladung in Grammen, die folgenden die Schallgeschwindigkeiten, wenn der Schall die Röhre die über jeder Kolumne gegebene Anzahl mal durchlaufen hatte, berechnet aus den beobachteten Zeiten mit Ausnahme des ersten Hin- und Herganges des Schalles; die Kolumne 3 L gibt also die Geschwindigkeit berechnet aus dem dritten; 4 L aus dem dritten und vierten Durchlaufen der Röhre etc.

[1]) *Rink*, Poggend. Ann. Bd. CXLIX.

Nr.	Ladung	3 L	4 L	5 L	6 L	7 L	8 L
1	0,5	330,02	330,29	330,15	330,21	330,11	330,13
2	1	330,36	330,59	330,57	330,61	330,44	330,42
3	1,5	330,29	330,57	330,54	330,60	330,47	330,53
4	2	330,60	330,51	330,84	330,39	330,44	330,30
5	1	330,04	330,26	330,26	330,23	330,15	330,22
6	1	330,36	330,37	330,50	330,67	330,55	330,50

Wie man sieht sprechen diese Zahlen auf das evidenteste gegen die bhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Intensität, so-dafs also ·lbst für diese, jedenfalls anfangs noch sehr kräftigen Schalle, die Be- ıerkung Schröder van der Kolks noch keine Gültigkeit hätte.

Als Mittel der Geschwindigkeit des Schalles in der 1,1 Meter weiten öhre berechnet Rink in dieser Weise

$$c = 330,5,$$

elche der von Regnault in freier Luft erhaltenen bis auf 0,2 gleich ist.

Einen fast gleichen Wert fand Le Roux[1]) für die Fortpflanzungs- schwindigkeit des Schalles in einer 7^{cm} weiten Röhre nach einer der ›gnaultschen ähnlichen Methode, nämlich $330,66^{m}$.

Regnault hat gleichzeitig bei seinen Versuchen die Frage einer erneuten üfung unterzogen, ob denn in der That die Schallgeschwindigkeit bei en Drucken dieselbe sei, ein Satz, der strenge nur so weit gültig sein nn, als die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen. Es gelang ihm nicht, ıen meſsbaren Unterschied in der Schallgeschwindigkeit zu erhalten, trotz- m er den Druck der in einer Röhre eingeschlossenen Luft von 247^{mm} ; 1267^{mm}, also bis zum Fünffachen des Anfangsdruckes steigerte.

Schliefslich hat Regnault auch in den Röhren die Geschwindigkeit des halles in einigen anderen Gasen als in der Luft gemessen, nämlich in asserstoff, Kohlensäure, Stickoxydul und Ammoniak. Nach der Theorie die Geschwindigkeit des Schalles

$$c = \sqrt{\frac{g H \sigma}{s} k (1 + \alpha t)},$$

welcher Gleichung s die Dichtigkeit des Gases bei der Temperatur 0^{0} leutet. Für das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in zwei rschiedenen Gasen ergibt sich daraus

$$c : c_1 = \sqrt{\frac{k}{s}} : \sqrt{\frac{k_1}{s_1}},$$

er, wenn wir die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft $c_1 = 1$ und › Dichte der Luft $s_1 = 1$ setzen,

$$c = \sqrt{\frac{k}{s k_1}}.$$

Der Wert von c hängt also nur ab von dem Verhältnis der Werte k s Gases und der Luft, sowie von der Dichte des betreffenden Gases. Die

[1]) *Le Roux*, Ann. de chim. et de phys. IV. Serie. T. XII.

von Regnault erhaltenen Werte von c für $c_1 = 1$ und die daraus mit der bekannten Dichte der Gase für die einzelnen Gase nach der Gleichung

$$k = \left(\frac{c}{c_1}\right)^2 \left(\frac{s}{s_1}\right) k_1$$

sich ergebenden Werte von k sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	$\frac{c}{c_1}$	$\sqrt{\frac{1}{s}}$	k
Luft	1	1	1,395
Wasserstoff .	3,801	3,799	1,396
Kohlensäure .	0,8009	0,8087	1,368
Stickoxydul .	0,8007	0,8100	1,361
Ammoniak . .	1,2279	1,3025	1,239.

Die für diese Gase gefundenen Werte der Schallgeschwindigkeit und damit die Werte von k können nur angenäherte sein, da es sehr schwierig ist, so ausgedehnte Röhrenleitungen mit vollständig reinen Gasen zu füllen. Wir werden im nächsten Paragraphen genauere Werte mit Hülfe der indirekten Methode der Messung der Schallgeschwindigkeit erhalten.

Aus den Regnaultschen Messungen ergibt sich somit die Schallgeschwindigkeit nicht unerheblich kleiner als aus den früheren Versuchen, nämlich zu 330,7 anstatt zu 332,7 nach den Messungen der holländischen Physiker oder 332,4 nach denen von Bravais und Martin, während sie der von den französischen Akademikern gefundenen Zahl 331,2 näher kommt. Nehmen wir die von diesen Beobachtern gefundenen Werte sämtlich als gleich wahrscheinlich an, wozu wir berechtigt sind, da man dem von Regnault hervorgehobenen psychologischen Momente bei der Beobachtung der zwischen Wahrnehmung des Lichtes und des Schalles verfliefsenden Zeit wohl nicht den Einflufs zuschreiben kann, dafs diese Zeit immer zu klein genommen wird, so ergibt sich als Mittel aus diesen vier jedenfalls besten direkten Messungen der Schallgeschwindigkeit in der Luft der Wert

$$c = 331{,}76.$$

Betreffs dieser Zahl ist jedoch zu bemerken, dafs alle Beobachtungen nicht bei der Temperatur 0^0 gemacht worden sind, sondern bei höheren Temperaturen, und dafs dann die Reduktion auf 0^0 dadurch bewerkstelligt ist, dafs man den bei einer Temperatur t beobachteten Wert mit $\sqrt{1 + 0{,}003\,665\, t}$ dividiert, also vorausgesetzt hat, dafs der Wert des Koefficienten k von der Temperatur unabhängig ist. Wir werden sehen, dafs das auch für Luft nicht ganz der Fall ist, dafs k mit steigender Temperatur etwas abnimmt, und dafs somit der oben angegebene Wert von c etwas zu klein ist. Die Änderung von k ist eine solche, dafs der Koefficient von t anstatt 0,003 665 gleich 0,003 646 zu setzen ist, wodurch z. B. der aus den pariser Beobachtungen abgeleitete Wert anstatt 331,2 gleich 331,43 wird.

Die Bedeutung der Veränderlichkeit dieses Koefficienten k wird in der Wärmelehre hervortreten, wo wir auch die Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ergänzen werden, indem wir zeigen, wie dieser Koefficient infolge der Erwärmung durch Kompression in die Gleichung eintritt.

§ 169.

Indirekte Messung der Schallgeschwindigkeit. Wir haben im vorigen Kapitel nachgewiesen, dafs jede Säule irgend eines Körpers, wenn sie in longitudinale Schwingungen versetzt wird, eine Reihe von Tönen gibt. Für Luftsäulen in Pfeifen eingeschlossen erhielten wir als Ausdruck für die Schwingungszahl dieser Töne

$$N = \frac{(2n-1)c}{4(l+x)}$$

für gedeckte Pfeifen, und

$$N = \frac{nc}{2(l+x+y)}$$

für offene Pfeifen; worin l die Länge der Pfeifen, x die Korrektion wegen der Mundöffnung und y die Korrektion bei den offenen Pfeifen wegen des Hervorragens der schwingenden Luftsäule aus der obern Öffnung der Pfeife bedeutet.

Nach den Entwicklungen des vorigen Abschnittes ist die Gröfse c in diesem Ausdruck die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung oder des Schalles in dieser Luftsäule, indem N der reciproke Wert der Schwingungsdauer der stehenden Welle von der Länge $2(l+x)$, resp. $(l+x+y)$ ist. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhielten wir aber früher den Quotienten aus der doppelten Länge der stehenden Welle und der Schwingungsdauer der Bewegung, oder

$$c = \frac{2L}{T} = 2LN.$$

Die Schwingungszahlen von Tönen können wir mittels des Monochordes oder der Sirene auf das genaueste erhalten. Da wir nun die Länge l der Röhre direkt messen und die Gröfsen x und y entweder nach der Dulongschen Methode beobachten oder nach der Wertheimschen berechnen können, so können wir aus den beobachteten Tönen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles sofort erhalten. Bei Anwendung gedeckter Pfeifen erhalten wir, wenn N_1 die entweder direkt erhaltene oder aus einem der harmonischen Töne bestimmte Schwingungszahl des Grundtones ist, für welchen $n = 1$,

$$c = 4(l+x)N_1$$

und für offene Pfeifen

$$c = 2(l+x+y)N_1.$$

Dulongs Versuche[1]) führten für Luft auf die Zahl 333^m für 0^0 als Mittel aus einer sehr grofsen Zahl von Versuchen; indes glaubte Dulong doch, dafs sich die absolute Geschwindigkeit des Schalles in freier Luft durch die Töne der Pfeifen nicht mit Sicherheit bestimmen lasse, und die Zahlen, welche er mitteilt, zeigen auch besonders mit dem richtigen Werte von α in der Korrektion für die Temperatur berechnet Abweichungen bis zum Werte von 10 Meter.

---

[1]) *Dulong*, Untersuchungen über die specifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten. Ann. de chim. et de phys. Tome XLI. Poggend. Ann. Bd. XVI

Wertheim[1]) indes hat die Geschwindigkeit des Schalles in Luft mitt der Pfeifentöne fast genau mit der Theorie in Übereinstimmung gefund Seine Versuche sind bei sehr verschiedenen Temperaturen angestellt, verschiedenen von ihm erhaltenen Werte sind die folgenden:

Temperatur t	Geschwindigkeit des Schalles bei der Temperatur t c_t	Geschwindigkeit bei 0° $c_0 = \frac{c_t}{\sqrt{1 + 0{,}003\,665\,t}}$
	I. Reihe.	
0°,5 C.	331,98	331,70
2,0	332,74	331,53
4,5	332,75	330,04
8,0	335,43	330,62
8,5	338,05	332,91
9,0	338,01	332,54
12,0	339,46	332,23
12,3	343,01	335,53
16,0	338,68	329,17
26,6	347,82	332,01
	II. Reihe.	
9,9	338,85	332,87
16,0	337,20	327,35
	III. Reihe.	
21,0	341,15	329,12
	IV. Reihe.	
9,3	334,65	329,09
11,5	336,50	329,61
17,0	342,3	332,11
	Mittel aller Versuche	331,33.

Die von Wertheim erhaltene Zahl ist somit um 0m,7 oder 0,002 von Regnault gefundenen Wertes gröfser als der letztere, trotzdem die Wertheim angewandten Pfeifen im Maximum einen Durchmesser von 4 hatten, also nur etwa 0,33 der von Regnault benutzten engsten R Es scheint indes auch bei Wertheim der Einflufs der Pfeifenweite un kennbar. Die Versuche sind mit vier verschiedenen Pfeifen angestellt, d Durchmesser waren 10, 20, 20, 40mm, drei waren von Messing, die vi deren Durchmesser 20mm betrug, von Glas. Nimmt man anstatt aus Versuchen nur aus den zu jeder Pfeife gehörigen Zahlen das Mittel, s hält man

Messingpfeife	von 40mm	Durchmesser	. . . 332,10	aus Reihe	I
"	" 20mm	"	. . . 330,11	" "	II
Glaspfeife	" 20mm	"	. . . 330,23	" "	IV
Messingpfeife	" 10mm	"	. . . 329,12	" "	III.

Wie man sieht nimmt die aus der Schwingungszahl und den Pfe längen berechnete Geschwindigkeit erheblich ab mit dem Durchmesse Pfeifen, während die beiden Pfeifen gleichen Durchmessers auch die Zahl ergeben.

---

[1]) *Wertheim*, Über die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten. *de chim. et de phys.* III. Serie. T. XXIII. Poggend. Ann. Bd. LXXVII.

Die Methode der Geschwindigkeitsmessung durch Pfeifentöne beruht igentlich auf Messung der Wellenlängen, welche, wie wir schon mehrfach ervorhoben, keineswegs vollkommen sicher ist; eine Beobachtung hat nun or kurzem Kundt[1]) in den Stand gesetzt, die Länge der Wellen in den asen direkt zu messen und so eine sehr bequeme Methode zur Vergleichung er Schallgeschwindigkeiten zu geben.

Wenn man eine an beiden Seiten offene Röhre in longitudinale Schwinungen versetzt, so gerät die in der Röhre vorhandene Luft nicht mit in hwingungen; bringt man deshalb in eine solche Röhre Lycopodium oder eselsäure, so bewegt sich dies zu den in den Röhrenwänden sich bildenn Savartschen Knotenlinien (§ 145). Anders dagegen, wenn man die öhren an den Enden verschliefst, sei es, dafs man sie zustöpselt oder zuamilzt. Da die freien Enden eines den tiefsten Longitudinalton gebenden öhres stets ein Schwingungsmaximum haben, so stofsen die Endflächen s Rohres ganz periodisch auf die eingeschlosssene Luft, und versetzen dielbe in Schwingungen, welche mit denen der Röhre isochron sind. Da n diese Schwingungen von beiden Enden der Röhre gegen einander sich rtpflanzen, so müssen sich stehende Wellen bilden, an deren Knotenunkten das Lycopodium oder die Kieselsäure sich ansammelt. Die Länge eser stehenden Wellen hängt lediglich von der Höhe des erzeugenden ones und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in dem die Röhre füllenden Gase ab, oder wenn wir nach und nach dieselbe Röhre mit rschiedenen Gasen füllen, so ist die Länge der Wellen der Fortpflanzungsschwindigkeit in den verschiedenen Gasen direkt proportional.

Eine ganz eben solche Bildung von stehenden Wellen in der in einer öhre eingeschlossenen Luftsäule tritt ein, wenn man die Röhre an einem nde schliefst und durch das andere offene Ende, wie Fig. 287 zeigt, in

Fig. 287.

B D A
C

eselbe den tönenden Stab einführt. Klemmt man die Röhre bei D ein d bringt den Stab, der bis zu seiner Mitte in die Röhre eingeführt ist, rch Streichen in der Richtung von D nach A zum Schwingen, so sind es Stöfse des freien Endes B gegen die eingeschlossene Luft, welche die ft in Schwingung versetzen; die Schwingungen werden bei C reflektiert, dafs auch hier stehende Wellen sich ausbilden, in deren Knoten der aub sich ansammelt. Bei dieser Art der Erzeugung der Luftschwingungen rden die Knotenlinien durch nichts alteriert, was bei der ersten Art der regung, bei der die Röhre selbst schwingt, immerhin durch die Savarthen Linien noch möglich ist. Man kann deshalb bei dieser Art der Erung die Länge der stehenden Wellen leicht messen und so die Geschwindigit des Schalles in Röhren verschiedenen Durchmessers und bei verschiedenen sen mit einander vergleichen, oder auch, wenn man die Schwingungszahl s Stabtones bestimmt, ihrem absoluten Werte nach erhalten.

[1]) *Kundt*, Poggend. Ann. Bd. CXXVII. und Bd. CXXXV.

Auf die Einzelnheiten des Verfahrens einzugehen, würde uns hier zu weit führen, wir verweisen deswegen auf die Arbeiten von Kundt[1]).

Kundts Versuche bestätigen nun zunächst das vorhin aus denen von Wertheim gezogene Resultat, daſs die Geschwindigkeit auch hoher Töne von dem Durchmesser der Röhre abhängig ist, und liefern gleichzeitig die Erklärung, weshalb Regnault in Röhren von 0,108 Durchmesser noch eine so bedeutende Verzögerung des Schalles fand, während wir aus den Zahlen Wertheims schon für Pfeifen von 0,04 M. Durchmesser die volle Geschwindigkeit erhielten. Kundt fand nämlich, wie folgende kleine Tabelle zeigt, daſs die Verzögerung der Geschwindigkeit mit der Wellenlänge des Tones zunimmt; die Geschwindigkeit in einer Röhre von 13^{mm} Durchmesser ist stets gleich 1 gesetzt.

Durchmesser der Röhren	Geschwindigkeit des Schalles für Töne mit Wellenlängen von		
	180^{mm}	90^{mm}	60^{mm}
mm			
55,0	1,01010	1,00885	1,00584
26,0	1,00908	1,00842	1,00781
13,0	1,00000	1,00000	1,00000
6,5	0,98031	0,99170	0,99176
3,5	0,92628	0,96666	—

Für den tiefsten Ton, der nahezu dem ais_3 entspricht, nimmt also die Geschwindigkeit des Schalles bis zu dem Rohrdurchmesser 0,055 so merklich zu, daſs die Grenze der Zunahme wohl noch nicht erreicht ist, während für den eine Oktave höhern Ton die Grenze der Röhrenweite, bis zu welcher die Geschwindigkeit wächst, schon bei 26^{mm} liegt. Der Pistolenschuſs Regnaults gab nach Versuchen von König einen Ton, dessen Wellenlänge etwa $3{,}6^{m}$[2]), dessen Höhe somit fast g war; da somit die Länge der Welle 20mal gröſser ist, kann es nicht auffallend erscheinen, daſs der Einfluſs der Röhrenwände erst bei so viel gröſserem Durchmesser unmerkbar wurde.

Gleichzeitig fand Kundt, daſs die Beschaffenheit der innern Röhrenwand auf die Geschwindigkeit des Schalles von Einfluſs war, bei rauhen Wänden ist die Geschwindigkeit kleiner; einen Einfluſs der Intensität vermochte Kundt dagegen nicht zu erkennen.

Daſs die Geschwindigkeit des Schalles in engen Röhren sich beträchtlich vermindert, liegt einmal an der Reibung der schwingenden Gasteile an den Röhrenwänden, durch welche die Beweglichkeit der schwingenden Teile vermindert wird, dann aber wesentlich in der Verminderung des Koefficienten k, der, wie erwähnt wurde, in die Gleichung für die Fortpflanzung von Wellen in Gasen eingeht, weil an den verdichteten Stellen eine Erwärmung, an den Stellen der Verdünnung eine Abkühlung eintritt. Diese Erwärmung und Abkühlung wird in Röhren kleiner, weil an den verdichteten Stellen Wärme an die Röhrenwand abgegeben, an den ver-

[1]) Ausführlich sind dieselben dargelegt in Poggend. Ann. Bd. CXXXV.
[2]) Regnault. Mémoires de l'Acad. T. XXXVII. p. 437.

lnnten Wärme von der Röhrenwand aufgenommen wird. Man erkennt shalb leicht, dafs die Abnahme der Geschwindigkeit in engern Röhren ld für Töne gröfserer Schwingungsdauer die gröfsere sein mufs. Denn je ger die Röhre ist, um so gröfser ist im Verhältnis zur schwingenden Luft- ule die Wandfläche, welche ihren Einflufs ausübt, da die Menge der hwingenden Luft mit dem Quadrate des Röhrendurchmessers, die be- ihrende Wandfläche dagegen mit der ersten Potenz desselben abnimmt. e langsamer ferner die Schwingungen sind, um so gröfser ist der Wärme- ıstausch mit den Röhrenwänden, da die Verdichtungen und Verdünnungen am um so länger dauern.

Helmholtz[1]) und Kirchhoff[2]) haben diese Frage einer genauern theo- tischen Behandlung unterzogen, ersterer unter Berücksichtigung der Rei- ung allein, letzterer unter Mitberücksichtigung des Wärmeaustausches; eide gelangen zu Gleichungen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des challes in Röhren, welche sich nur durch die Bedeutung einer in der leichung auftretenden Konstanten unterscheiden. Ist C die Fortpflanzungs- eschwindigkeit des Schalles im freien Raum, so ist die Fortpflanzungs- eschwindigkeit c in einer Röhre vom Radius r für einen Ton, dessen chwingungszahl n ist,

$$c = \frac{C}{1 + \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi \cdot n}}} = C\left(1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi \cdot n}}\right),$$

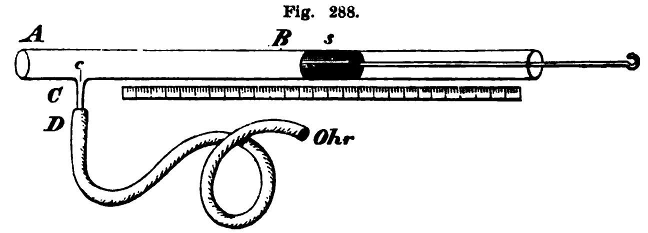
orin die Konstante γ bei Helmholtz die Reibungskonstante der Luft ist, ährend sie nach Kirchhoff von der Reibung und dem Wärmeaustausch der ıft und der Röhrenwand abhängt. Es soll also nach dieser Gleichung die ›nahme der Geschwindigkeit in Röhren, die Differenz $C - c$ dem Durch- esser der Röhre und der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl um- kehrt proportional sein.

Da weder die Versuche von Regnault noch von Kundt ausreichend aren, um die theoretische Beziehung experimentell zu prüfen, haben hneebeli[3]) und Adolph Seebeck[4]) neue Versuche über diese Frage an- stellt, indem sie, wie Kundt, aber nach einer andern Methode, die Wellen- ıge von Tönen verschiedener Höhe in Röhren von verschiedenem Durch- esser mafsen. Beide Experimentatoren versetzten in einem einerseits ge- ılossenen Rohre die Luft durch hineingesandte Töne in stehende Schwingungen ıd bestimmten direkt mit dem Ohre den Abstand der Schwingungsmaxima n dem geschlossenen Ende des Rohres. Die von Seebeck gewählte An- dnung zeigt Fig. 288. In dem Rohre AB, an welchem bei C ein kleines ›hr senkrecht zur Längsaxe von AB angeschmolzen ist, kann ein dicht hliefsender Stempel hin und her bewegt werden. An dem Rohr ist eine :ala angebracht, deren Nullpunkt bei C liegt. Von dem kleinen Rohr CD ht ein Kautschukschlauch aus, dessen Ende in das eine Ohr gesteckt wird, ährend das andere Ohr durch einen Siegellackpfropfen geschlossen wird.

[1]) *Helmholtz*, Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu idelberg Bd. III. p. 16.
[2]) *Kirchhoff*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIV.
[3]) *Schneebeli*, Poggend. Ann. Bd. CXXXVI.
[4]) *Ad. Seebeck*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

Erzeugt man nun in dem Rohre stehende Wellen, so nimmt das Ohr kaum einen Ton wahr, wenn bei *c* ein Schwingungsmaximum ist, da dann die Luft dort nur eine hin- und hergehende Bewegung besitzt, ohne daſs Verdichtungen und Verdünnungen eintreten. Es können deshalb in dem abgezweigten Rohre keine longitudinalen Schwingungen entstehen und zum Ohr fortgepflanzt werden. Sendet man deshalb durch eine tönende Stimmgabel, welche sich unmittelbar vor dem Ende *A* befindet, Schwingungen in das Rohr *AB* und verschiebt dann den Stempel *s* so lange, bis das Ohr, in welchem das Kautschukrohr mündet, keinen Ton mehr wahrnimmt, so befindet sich bei *c* ein Schwingungsmaximum, und da an dem Stempel *s* sich immer ein Schwingungsknoten befindet, so ist der Abstand der Stempelfläche von *c* eine viertel Wellenlänge des Tones im Innern des Rohres. Das Vierfache des Abstandes multipliciert mit der Schwingungszahl des Tones gibt somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Rohre.

Fig. 288.



Wie Seebeck anführt, ist die auf diese Weise zu erreichende Genauigkeit sehr beträchtlich, bei Wellenlängen von 200^mm^ bis 300^mm^ weichen die einzelnen Messungen nur um 1—3^mm^ von einander ab, die Abweichungen vom Mittel erreichten im allgemeinen kaum 1^mm^.

Aus den Versuchen von Seebeck sowohl wie von Schneebeli ergibt sich, daſs in der That bei engen Röhren die Verzögerung der Schallgeschwindigkeit, so lange die Röhren hinreichend enge sind, so daſs man die ganze Luftsäule als gleichförmig schwingend annehmen darf, dem Durchmesser der Röhre umgekehrt proportional ist. So erhielt z. B. Seebeck unter Annahme der Geschwindigkeit des Schalles im freien Raum $C = 332{,}77$ folgende Werte der Verzögerung $C - c$

Durchmesser der Röhre	Ton c_2; $n = 512$ $C - c$ beob.	Ton c_2; $n = 512$ $C - c$ berechn.	Ton g_1; $n = 384$ $C - c$ beob.	Ton g_1; $n = 384$ $C - c$ berechn.	Ton e_1; $n = 320$ $C - c$ beob.	Ton e_1; $n = 320$ $C - c$ berechn.
mm	m	m				
3,4	9,79	9,79	13,91	13,91	15,51	15,51
9,0	4,33	3,70	5,09	5,25	4,75	5,06
17,5	1,85	1,90	2,91	2,70	3,53	3,01

Die als berechnet angegebenen Werte sind jedesmal aus dem für die engste Röhre gefundenen für die weitern Röhren unter Voraussetzung der Richtigkeit des Gesetzes abgeleitet, und man sieht, wie Beobachtung und Rechnung auch genügend übereinstimmen.

Kombiniert man die an verschiedenen Röhren unter Anwendung desselben Tones gemachten Beobachtungen, so läſst sich aus denselben die Geschwindigkeit des Schalles im freien Raume ableiten, nach der Gleichung

$$C = \frac{c_1 r_1 - c_2 r_2}{r_1 - r_2},$$

c_1 die Geschwindigkeit des Schalles in der Röhre vom Radius r_1 und
ne in der Röhre vom Radius r_2 bedeutet. Indem Schneebeli alle seine
uche zu je zwei in der Art kombinierte, welche in verschiedenen Röhren,
Durchmesser zwischen 14^{mm} und 90^{mm} waren, ausgeführt waren, fand
Mittel

$$C = 332{,}06^{m},$$

Vert, der nur um $0{,}3^{m}$ von dem am Schlusse des vorigen Paragraphen
enen Mittel abweicht; die extremsten Abweichungen von diesem Mittel
n 2^{m}, also nur 0,66 Procent des berechneten Wertes.

Während so die Versuche übereinstimmend die Verzögerung der Schall-
windigkeit in ihrer Abhängigkeit von dem Durchmesser der Röhren
Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie gemäfs finden, kommen beide Experi-
atoren in Bezug auf die Abhängigkeit von der Schwingungszahl zu
rn Resultaten. Nach der Theorie soll die Verzögerung in Röhren
hen Durchmessers der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl um-
hrt proportional sein, nach den Versuchen nimmt aber die Verzögerung
ier ab, wie die Quadratwurzel aus der Schwingungszahl wächst, und
eck schliefst aus seinen Versuchen, dafs die Abnahme der Geschwindig-
der Quadratwurzel aus der dritten Potenz der Schwingungszahl pro-
onal ist. In der That multipliciert man die in obiger Tabelle mit-
lten Werte mit $n^{\frac{3}{2}}$, so findet man die in jeder Horizontalreihe sich
benden Produkte annähernd konstant; indes scheint, wenn man sich an
irekten Beobachtungen hält, die Verzögerung ebenso gut den Schwingungs-
n selbst umgekehrt proportional gesetzt werden zu können, so dafs sich
den Versuchen Seebecks kein bestimmtes Gesetz über die Abhängigkeit
Verzögerung von der Schwingungszahl ableiten läſst.

Später hat Kaiser[1] die Methode der Staubfiguren zu einer erneuten
ung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie benutzt; er wandte drei Töne
deren Schwingungszahlen 2357 — 3895 — 5232 Schwingungen waren,
brachte die Staubfiguren in 5 Röhren, deren Durchmesser

$25{,}8^{mm}$ $33{,}3^{mm}$ 44^{mm} $51{,}7^{mm}$ 82^{mm}

ngen, hervor. Er schlofs aus seinen Versuchen, dafs sowohl die Ab-
igkeit der Verzögerung von dem Durchmesser der Röhre, als von der
vingungszahl der Theorie entsprechen, dafs man indes für die Konstante
r theoretischen Gleichung nicht den aus der Theorie sich ergebenden
t 0,005 88, sondern einen etwa viermal gröfsern Wert 0,023 5 einsetzen
e. In der That geben die auf diese Weise aus den Beobachtungen be-
neten Werte für die Schallgeschwindigkeiten eine recht gute Überein-
nung, indes tritt eine deutliche Abnahme der Werte mit der Röhren-
ein. Die Werte werden nämlich für die Röhren

I	II	III	IV	V
332,67	332,86	332,34	332,16	332,5
332,87	332,82	332,80	332,80	
332,69				
332,74	332,84	332,57	332,48	

[1]) *Kaiser*, Wiedem. Ann. Bd. II.

Aufserdem ergibt sich aus diesen Versuchen für die weiteste Röhre in dieser Weise berechnet eine auffallend grofse Korrektion, nämlich noch fast ein Meter, während die Versuche Kundts für eine erheblich gröfsere Wellenlänge schon bei 26^{mm} Durchmesser der Röhre die volle Schallgeschwindigkeit ergab. Berechnet man in der oben angegebenen Weise mit Elimination des Korrektionsgliedes die Geschwindigkeit aus den Versuchen mit gleichen Tönen in den verschiedenen Röhren, so erhält man erheblich verschiedene Werte, je nachdem man den tiefsten der drei Töne oder den mittlern anwendet. Für den tiefsten Ton liegen die Werte zwischen 333,4 und 330,91, das Mittel wird 331,76, für den mittlern Ton liegen die Werte zwischen 332,75 und 334,17, das Mittel ist 332,33; gerade die Rechnungen, in denen die weiteste Röhre eingeht, liefern bei der letzten Berechnung die kleinsten Werte. Trotz der Sorgfalt, mit welcher Kaiser seine Versuche anstellte, scheinen dieselben deshalb doch nicht geeignet, die Frage abzuschliefsen, und ebenso wenig wird man den von Kaiser aus seinen Versuchen abgeleiteten Wert der Schallgeschwindigkeit 332,5, dem am Schlusse des vorigen Paragraphen gezogenen Mittelwert vorziehen.

Wenn nach alledem die indirekte Methode der Messung der Schallgeschwindigkeit für Luft noch keine zuverlässigern Werte ergeben hat, als die direkte, so ist die Methode doch vorzüglich geeignet, die Geschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen und in verschiedenen Temperaturen zu vergleichen.

Dulong[1]) benutzte zu dem Zwecke die Töne von Orgelpfeifen; er legte die Pfeifen horizontal in einen grofsen, von innen und aufsen mit Blei beschlagenen Holzkasten, der ganz vollständig mit dem wohl ausgetrockneten zu untersuchenden Gase gefüllt war. Ein Gasometer, mit demselben Gase angefüllt, stand mit dem Fufse der Pfeife in Verbindung, und trieb das Gas unter konstantem Drucke in die Pfeife hinein. Sobald der Strom anfing, wurde in einer Wand des Kastens ein Loch geöffnet, um das eindringende Gas wieder abströmen zu lassen.

War nun bei einer und derselben Pfeife N die Schwingungszahl des Tones in einem Gase, N' diejenige in einem andern Gase, so ist bei Anwendung einer gedeckten Pfeife

$$c = 4\,(l + x)\,N$$
$$c' = 4\,(l + x)\,N',$$

also

$$\frac{c}{c'} = \frac{N}{N'}.$$

Das Verhältnis der beiden Schallgeschwindigkeiten erhalten wir also selbst ohne Kenntnis der anzubringenden Korrektion x, und somit, wenn wir die Geschwindigkeit c' in der Luft als anderweitig bestimmt annehmen, auch die Geschwindigkeit c des Schalles in den andern Gasen.

Ich habe zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen und bei verschiedenen Temperaturen die Methode der Staubfiguren angewandt[2]). Das benutzte Rohr hatte einen Durchmesser von nicht ganz

[1]) *Dulong*, Ann. de chim. et de phys. T. X p. 41. Poggend Ann. Bd. XVI.
[2]) *Wüllner*, Über die Abhängigkeit der specifischen Wärme der Gase etc. Wiedem. Ann. Bd. IV.

30mm, der Ton, es war der Longitudinalton einer Glasröhre von 1m Länge, hatte 2539 Schwingungen. Der tönende Stab trug auf seiner Mitte einen Kautschukstopfen, mit dem er luftdicht in das eine Ende des Wellenrohres eingesetzt wurde. An dem Ende des tönenden Stabes war eine leichte Platte von Ebonit aufgesetzt, deren Durchmesser sehr nahe dem des Wellenrohres gleich war, und welche die Schwingungen an das im Wellenrohr eingeschlossene Gas übertrug. Das andere Ende des Wellenrohres war ebenfalls luftdicht geschlossen, in einer Stopfbüchse liefs sich indes ein Stab verschieben, der im Innern des Wellenrohres ebenfalls eine Ebonitscheibe trug, deren Durchmesser dem des Wellenrohres gleich war, um so zu bewirken, dafs sich zwischen dem Ende des tönenden Stabes und dieser Scheibe immer eine ganze Zahl stehender Wellen befanden. An den beiden Enden des Wellenrohres waren mit Glashähnen verschliefsbare Röhren angesetzt, durch welche man das Rohr, nachdem es mit der Quecksilberpumpe luftleer gepumpt war, mit beliebigen ganz trocknen Gasen füllen konnte.

Bei den Versuchen wurde der mittlere Teil des Wellenrohres auf eine Strecke von 1,1m in schmelzendes Eis oder in die Dämpfe des siedenden Wassers gelegt.

Das Korrektionsglied zur Reduktion der in den Röhren beobachteten Schallgeschwindigkeit auf den freien Raum ist zwar nach der Theorie von Helmholtz und Kirchhoff nicht unabhängig von der Natur des Gases. Indes bei den von mir gewählten Dimensionen der Röhre und der Schwingungszahl des Tones ist die Korrektion nur so unbedeutend, dafs sie überhaupt vernachlässigt werden kann. Es ergab sich das auch aus der Messung der Schallgeschwindigkeit in der Luft bei der Temperatur 0°, für welche ich im Mittel aus 6 Versuchsreihen erhielt

$$c_0 = 331,898.$$

Der Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit bei irgend einer Temperatur t ist

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot H \cdot \sigma}{s_0} k (1 + \alpha t)}.$$

Ist k ebenfalls von der Temperatur abhängig, so dafs wir es

$$k = k_0 (1 + \beta t)$$

setzen können, so können wir schreiben

$$c = c_0 \sqrt{(1 + \beta t)(1 + \alpha t)}$$

oder mit hinreichender Annäherung

$$c = c_0 \sqrt{1 + \gamma t},$$

worin $\gamma = \alpha + \beta$ gesetzt ist.

Nachfolgende Tabelle enthält in Kolumne I die Nam[illegible] II die Dichtigkeit derselben, in III, IV, V die Geschwin[illegible] bei 0° nach Dulong, Regnault und meinen Beobachtungen [illegible] gleich 1, in VI die von mir bestimmten Werte d[illegible] Meter bei 0°, in VII die von mir bestimmten V[illegible]

Name der Gase	Dichtigkeit	Geschwindigkeit des Schalles nach Dulong	Regnault	Wüllner	c_0 Wüllner	γ
Luft	1	1	1	1	331,898	0,003646
Sauerstoff	1,1056	0,9524	—	—	—	—
Wasserstoff	0,06926	3,8123	3,801	—	—	—
Kohlenoxyd	0,9678	1,0132	—	1,0158	337,129	0,003588
Kohlensäure	1,5290	0,7856	0,8009	0,7812	259,383	0,003401
Stickoxydul	1,527	0,7865	0,8007	0,7823	259,636	0,003307
Ammoniak	0,5967	—	1,2279	1,2534	415,990	0,003436
Äthylen	0,9784	—	—	0,9518	315,90	0,003060

Die Werte von γ sind sämtlich kleiner als die Werte α, welche die Abnahme der Dichtigkeiten darstellen, es folgt somit, dafs β einen negativen Wert hat, oder dafs die Werte des Koefficienten k mit steigender Temperatur kleiner werden. Die sich hiernach ergebenden Werte von k, und die Bedeutung deren Veränderlichkeit werden wir bei Gelegenheit der Behandlung der specifischen Wärme der Gase besprechen.

§ 170.

Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern mufs nach dem Früheren mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen übereinstimmen. Für Stäbe erhielten wir dieselbe im vorigen Kapitel durch die Gleichung

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

worin E den Elasticitätskoefficienten und s das specifische Gewicht des Stabes bedeutet.

Direkte Messungen dieser Geschwindigkeit sind nur für Gufseisen von Biot[1]) vorhanden, welcher sie an einer Verbindung von 376 Röhren, die zusammen eine Länge von 951,25 Meter hatten, ausführte. In eine der Mündungen dieses Röhrenkanals ward ein Eisenring, der mit derselben gleichen Durchmesser hatte, angefügt und in seiner Mitte durch Stäbe von Eisen eine Glocke und ein von einer Stahlfeder gehaltener Hammer befestigt, vermöge deren man den letztern nach Belieben an die Glocke anschlagen lassen konnte. Dann pflanzte sich der Schall der Glocke zur Röhre durch die Stäbe und Ringe von Eisen fort, und stellte man sich an das andere Ende der Röhrenleitung, so mufste man einen doppelten Schall hören, einen, der durch das Metall der Röhre in der Zeit x hindurchgegangen war, den andern, der durch die Luft hindurch sich fortgepflanzt hatte. Man nahm in der That sehr deutlich zwei bestimmte Schläge wahr, zwischen denen eine Zeit von 2,5 Sekunden lag. Hieraus berechnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c' des Schalles im Eisen aus derjenigen in der Luft wie folgt. Die Zeit, welche der Schall brauchte, um in der Luft sich fortzupflanzen, war $\frac{951,25}{c}$, die Zeit x, die er im Eisen brauchte,

[1]) *Biot*, Experimentalphysik, übers. von Fechner. Leipzig 1828. Bd. II. p. 15.

$\frac{951,25}{c'}$, die Differenz beider

$$\frac{951,25}{c} - \frac{951,25}{c'} = 2,5\,,$$

und daraus

$$c' = \frac{951,25 \cdot c}{951,25 - 2,5 \cdot c} = 10,5\, c = 3475,5^{m},$$

so daſs also der Schall im Eisen in einer Sekunde nahe an 3500 Meter zurücklegt, wenn wir die Geschwindigkeit in der Luft in runder Zahl gleich 331^{m} setzen.

Man kann übrigens die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern sehr leicht durch indirekte Beobachtungen gerade so erhalten, wie bei der Luft und den Gasen, durch Beobachtung der Longitudinaltöne eines Stabes. Wenn man einen an beiden Enden freien Stab in longitudinale Schwingungen versetzt, so ist die Schwingungszahl des entstehenden Grundtones:

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{s}} = \frac{c}{2l}\,,$$

und daraus

$$c = 2l \cdot N,$$

worin l die Länge des Stabes bedeutet.

Mit Hülfe dieser Methode ist von Wertheim[1]) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles für eine groſse Reihe von Metallen bestimmt worden. Ein Vergleich der experimentell erhaltenen Werte mit den theoretisch berechneten bestätigt die Richtigkeit der Theorie auf das vollständigste.

Name des Metalles	Geschwindigkeit in Luft = 1	$E = z\,\frac{G}{CS^2}$	s	$\sqrt{\frac{E}{s}}$
Blei ausgezogen	4,257	1769.10^8	11,16	3,787
Zinn "	7,480	—	—	—
Gold "	6,424	7977.10^8	18,51	6,247
Silber "	8,057	7218.10^8	10,36	7,940
Zink destilliert. gegossen	9,683	—	—	—
" gewöhnl. ausgez.	11,007	8568.10^8	7,008	10,524
Kupfer ausgezogen	11,167	12213.10^8	8,93	11,128
Platindraht mittl. Dicke	8,467	16720.10^8	21,27	8,437
Eisen (Berry) ausgez.	15,108	20470.10^8	7,74	15,472
Guſsstahl ausgezogen	15,108	19180.10^8	7,71	15,003
Stahldraht engl. ausgez.	14,961	18450.10^8	7,71	14,716

Sehr bequem zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern mit derjenigen in der Luft ist die Methode von Kun[illegible] vorigen Paragraphen besprachen[2]). Wendet man in der Fl[illegible]

[1]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. [illegible] Ann. Ergänzungsband II.
[2]) *Kundt*, Poggend. Ann. Bd. CXXVII.

Anordnung irgend einen tönenden Stab an, so entspricht die Länge des Stabes der Länge einer stehenden Welle, während uns die Länge der in dem mit Staub versehenen Rohr vorhandenen Welle die Länge der stehenden Welle von genau derselben Schwingungsdauer in der Luft gibt. Ist nun c die Geschwindigkeit des Schalles im Stabe, l die Länge des Stabes, N seine Schwingungszahl, so ist

$$c = 2l \cdot N.$$

Ist c_1 die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, l_1 die Länge der in dem Glasrohr gemessenen Wellen, so ist

$$c_1 = 2l_1 \cdot N,$$

somit

$$\frac{c}{c_1} = \frac{l}{l_1}.$$

Das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten ist gleich dem der Stablänge und der in dem Glasrohre gemessenen Wellen.

Drei Versuche, bei denen ein Messingstab von $941^{mm},5$ Länge angewendet wurde, gaben für die Länge der Wellen in dem Rohre $l_1 = 43{,}30$; 43,29; 43,35. Daraus folgt $c = 10{,}87$; 10,87; 10,86.

Für drei Stahlstäbe aus demselben Stahl erhielt Kundt

$$c = 15{,}345;\ 15{,}334;\ 15{,}343.$$

Für einen Glasstab erhielt Kundt $c = 15{,}24$, und für einen Kupferdraht $c = 11{,}960$, ich erhielt für Glas $c = 15{,}29$.

Die Zahlen stimmen mit denen von Wertheim und den für dieselben Substanzen theoretisch berechneten so vortrefflich, dafs die Genauigkeit der Methode dadurch unzweifelhaft bewiesen wird.

In etwas anderer Weise haben Stefan[1]) und Warburg[2]) die Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern untersucht, auf welche sie auch imstande waren die Geschwindigkeit in solchen Körpern zu bestimmen, welche nicht durch Anstreichen zum Tönen gebracht werden können, wie Kautschuk, Wachs und dergleichen.

Das Princip der Methode von Stefan ist folgendes. Man formt den Körper, der selbst nicht zum Tönen gebracht werden kann, wie Wachs, in Form eines kurzen Stabes und verbindet ihn fest mit einem Stabe von Glas oder Holz, welcher durch Reiben in tönende Schwingungen versetzt werden kann, so dafs der Wachsstab eine Verlängerung des Holzstabes bildet. Das System dieser beiden so verbundenen Stäbe liefert, wenn man den Glasstab reibt, einen gut charakterisierten Longitudinalton, dessen Tonhöhe sich bestimmen läfst. Aus der Tonhöhe des isoliert schwingenden Glasstabes und der Änderung der Tonhöhe, wenn an den Glasstab der Wachsstab angesetzt ist, sowie aus der bekannten Länge und dem Gewichte des Wachsstabes läfst sich dann die Geschwindigkeit des Schalles in dem Wachsstabe berechnen. Die Berechnung dieser Versuche ist zu kompliciert, als dafs wir hier darauf eingehen könnten.

So erhielt Stefan bei Wachs für die Temperatur 17^0 die Geschwindig-

[1]) *Stefan*, Wiener Berichte Bd. LVII. p. 697.
[2]) *Warburg*, Poggend. Ann. Bd. CXXXVI.

keit gleich 880^{m} und fand, dafs mit steigender Temperatur für jeden Grad die Geschwindigkeit um 40^{m} abnahm.

Die Methode von Warburg beruht darauf, dafs man einen Stab des zu untersuchenden Materials durch einen andern, für welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bekannt ist, in isochrone transversale Schwingungen versetzt, dafs man auf beiden Stäben dann die Knotenpunkte aufsucht und die Länge der schwingenden Abteilungen beider Stäbe vergleicht. Man legt zu dem Ende einen Stab, etwa einen Spiegelglasstreifen, auf, so dafs er in zwei Knotenlinien unterstützt ist. In einem Schwingungsmaximum, etwa dem mittelsten, klebt man mit Siegellack einen leichten hölzernen Steg, und klebt mit etwas Klebwachs auf diesen den zu untersuchenden Stab, so dafs derselbe dem Spiegelglasstreifen parallel ist. Versetzt man den Spiegelglasstreifen in transversale Schwingungen, so teilen sich diese dem zu untersuchenden Stabe mit, und man kann auf beiden Stäben durch aufgestreuten Sand die Knotenlinien sichtbar machen. Mifst man auf beiden Stäben die Länge der ersten, zweiten, $n$ten schwingenden Abteilungen, dieselben von den freien Enden aus gerechnet, so gibt die Theorie für das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten in beiden Stäben

$$\frac{c}{c'} = \frac{l_n^2}{l_n'^2} \cdot \frac{h'}{h},$$

worin c die Schallgeschwindigkeit in dem zu untersuchenden Körper, l_n die Länge der, vom freien Ende ab, $n$ten schwingenden Abteilung auf demselben und h die Dicke des Stabes bedeutet, während c', l'_n, h' dieselbe Bedeutung für den schwingenden Glasstreifen haben. Um die Methode zu prüfen, verglich Warburg zunächst die Geschwindigkeit des Schalles in Messing und Glas. Er erhielt in zwei Versuchen

$$\frac{c}{c'} = 0{,}676 \text{ und } 0{,}645,$$

im Mittel also 0,660, während er nach der Methode von Kundt den Wert 0,668 für dasselbe Verhältnis fand, zwei Werte, die nur um etwas mehr als 1% von einander abweichen. Für die Schallgeschwindigkeit im Glase lieferte ihm die Kundtsche Methode den Wert 15,65, für jene im Messing 10,46, die Geschwindigkeit in Luft gleich 1 gesetzt.

Die von Warburg nach dieser Methode erhaltenen Resultate zeigt folgende Tabelle.

Material	c jene im Glase gleich 1	Specif. Gew.	Elasticitätskoefficient bez. auf Glas = 1
Glas	1	2,390	1
Stearin	0,265	0,974	$\frac{1}{35}$
Paraffin	0,251	0,908	$\frac{1}{42}$
Wachs	0,166	0,971	$\frac{1}{88}$
Talg	0,075	0,917	$\frac{1}{461}$

Die Zahlen gelten für 15°—17° C.

Setzt man die Geschwindigkeit des Schalles in Luft von 16° C. gleich 340^m, in Glas bezogen auf Luft gleich eins gleich 15,65, so ergibt sich für Wachs 883^m, eine Zahl, welche mit der Stefanschen gut übereinstimmt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, wie wir sie soeben bestimmten, gilt nur für stabförmige feste Körper, für nach allen Richtungen des Raumes ausgedehnte mufs sie nach Wertheim gröfser sein[1].

Der Grund dieser Erscheinung liegt in dem § 49 betrachteten Zusammenhange zwischen dem Elasticitätskoefficienten E und der beim Zuge eintretenden Volumänderung. Wir erhielten damals für das Gewicht p, welches einen Stab vom Querschnitte und der Länge 1, der an dem einen Ende aufgehängt ist, am andern das Gewicht trägt, um die Länge δ ausdehnt,

$$p = E\delta.$$

Andererseits erwähnten wir, dafs nach der Theorie von Cauchy für dasselbe Gewicht die Beziehung besteht

$$p = k\delta + Kv \ldots . (\alpha),$$

worin v die Veränderung der Volumeinheit des Stabes bei jenem Zuge bedeutet. Die Änderung der Volumeinheit bei der Verlängerung δ setzt Wertheim gleich $\frac{1}{3}\delta$; daraus ergab sich gemäfs der Gleichung

$$v = \frac{k}{2K + k} \cdot \delta,$$

dafs $k = K$ und schliefslich

$$p = \tfrac{4}{3} k\delta.$$

Für den Elasticitätskoefficienten, jenes Gewicht, welches die Verlängerung δ gleich 1 macht, erhält man dann

$$\frac{p}{\delta} = E = \tfrac{4}{3} k.$$

Diese Gröfse E wandten wir bisher als Mafs der Elasticität an. Nehmen wir aber jetzt einen Stab an, der nicht nur an seinem Ende fest ist, sondern auf dessen Oberfläche nach allen Seiten Kräfte wirken, welche eine Änderung des Querschnittes hindern, so wird jetzt die Verlängerung δ durch ein anderes Gewicht p' bewirkt werden, für welches, da auch jetzt noch die Verlängerung der Gröfse des Gewichtes proportional sein mufs,

$$p' = E'\delta$$

und auch jetzt mufs für p' die Beziehung bestehen

$$p' = k(\delta + v) \ldots (\beta),$$

da die Gleichung (α) für jeden Zug oder Druck besteht, welchen man auf einen Körper wirken läfst, und da weiter k und K zwei nur von der Substanz der Körper abhängige Konstanten sind, somit die für einen bestimmten Fall zwischen ihnen bestehende Gleichheit bestehen mufs, wie auch die Kräfte auf den Körper wirken mögen. Wenn nun aber der Stab sich um δ verlängert, nimmt, da jetzt eine Änderung des Querschnittes nicht eintreten

[1]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII.

nn, auch sein Volumen um δ zu, oder es wird

$$v = \delta; \; p' = 2k\delta$$

nd daraus für den Koefficienten E'

$$E' = 2k.$$

Dieser Koefficient ist aber als das Maſs der elastischen Kraft in diesem 'alle zu betrachten, da uns das Produkt $E'\delta$ die Kraft gibt, welche wir zu iner Ausdehnung δ aufwenden müssen, also auch die Kraft, mit welcher ie um δ von einander entfernten Schichten sich wieder einander anziehen.

Aus dem Obigen folgt

$$E : E' = \tfrac{4}{3} k : 2k,$$
$$E' = \tfrac{3}{2} E.$$

Unter dieser Voraussetzung ist also die Kraft, mit welcher sich die n einander entfernten Schichten anziehen, die elastische Kraft des Kör- rs, das Anderthalbfache von derjenigen, welche bei Verlängerung um die eiche Gröſse eines nur an seinen Enden festen Stabes auftritt.

Wenn wir in einer ausgedehnten Masse des festen Körpers einen linder dieser Masse verlängern oder verkürzen wollten, so würde in dem lle, da die Wand dieses Cylinders rings von der gleichen Masse des um- benden Körpers festgehalten und angezogen wird, das Maſs der Elasti- tät durch die Gröſse E' gegeben sein.

Das ist der Fall, wenn sich in einer ausgedehnten Masse eines festen örpers der Schall ausbreitet. In der Richtung jedes Radius einer um e Quelle des Schalles gelegten Kugel pflanzen sich longitudinale Wellen rt, in jedem Radius treten also Verdichtungen und Verdünnungen ein. a aber hier jeder dieser Radien von der gleichen Masse umgeben ist, nnen bei diesen Ausdehnungen und Zusammendrückungen der Länge nach ine Kontraktionen oder Dilatationen des Querschnittes stattfinden; das aſs der Elasticität ist also E' und nicht E.

Da wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles haben

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}},$$

wird dieselbe in einer ausgedehnten Masse eines festen Körpers

$$c = \sqrt{\frac{E'}{s}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{E}{s}},$$

er nennen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Stabe dieses rpers c'

$$c = c' \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Für diejenigen Körper also, für welche die Wertheim[illegible] Annahme htig ist, verhält sich die Fortpflanzungsgeschwin[illegible] lles in er Kugel oder in einer unbegrenzten Masse zu [illegible] be e $\sqrt{\frac{3}{2}}$ zu 1.

Ist die Volumveränderung nicht [illegible] en Stab des Körpers ausgeübten Z[illegible]

meinern Annahme, dafs die Querkontraktion für die verschiedenen Körper verschieden ist, so ist nach § 50

$$E = \frac{3K + k}{2\frac{K}{k} + 1}.$$

Ist der Koefficient der Querkontraktion gleich μ, so erhielten wir weiter

$$\mu = \frac{K}{2K + k}$$

$$K = k \cdot \frac{\mu}{1 - 2\mu}; \quad E = k(1 + \mu).$$

Ist der Stab verhindert sich in der Quere zusammen zu ziehen, so ist immer $\delta = v$, somit wird

$$w' = (k + K)\,\delta = k \cdot \left(\frac{1 - \mu}{1 - 2\mu}\right) \cdot \delta,$$

oder

$$E' = k\,\frac{1 - \mu}{1 - 2\mu},$$

und daraus

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}.$$

Daraus folgt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in ausgedehnten Massen

$$c = \sqrt{\frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \cdot \frac{E}{s}} = c' \cdot \sqrt{\frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}.$$

Wenn also μ von Null verschieden ist, also bei der Längsausdehnung überhaupt eine Querkontraktion eintritt, ist $c' > c$.

Diese Ausführungen lassen sich nicht leicht durch Versuche prüfen, da man nicht leicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch ausgedehnte Massen beobachten kann; sonst wäre das eine sichere Methode zur Bestimmung von μ.

§ 171.

Geschwindigkeit des Schalles in flüssigen Körpern. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten mufs nach dem Frühern mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in den Flüssigkeiten übereinstimmen. Bedeutet H den Druck der Atmosphäre in Centimeter Quecksilberdruck, σ das specifische Gewicht des Quecksilbers, s die Dichtigkeit und μ die Kompressibilität der betreffenden Flüssigkeit für eine Atmosphäre, so erhielten wir für c in § 146

$$c = \sqrt{\frac{gH\sigma}{\mu s}}.$$

Für Wasser, für welches $\mu = 0{,}000\,049\,9$, $s = 1$ bei 4° C. ist, wird dieser Ausdruck

$$c = 1418 \text{ Meter}.$$

Dieses Resultat ist durch direkte Versuche von Colladon und Sturm im Jahre 1827 auf dem Genfersee bestätigt worden[1]). Zwei Schiffe wur-

[1]) *Colladon* und Sturm, Poggend. Ann. Bd. XII.

n einer bestimmten, gemessenen Entfernung festgelegt. Das erstere eine in das Wasser getauchte Glocke, welche mittels eines an einem l befestigten Hammers angeschlagen werden konnte. An dem andern des Hebels befand sich eine brennende Lunte, welche in demselben nblicke, in welchem der Hammer die Glocke schlug, eine Quantität er entzündete. Von dem andern Schiffe reichte ein Hörrohr in das ser, an dessen aus dem Wasser hervorragenden Ende der Beobachter Ohr anlegte, um den im Wasser fortgepflanzten Schall wahrzunehmen. der gemessenen Distanz der Schiffe und der beobachteten Zeit, welche hen der Wahrnehmung der Flamme und des Schalles verflossen war, sich bei einer Temperatur von $8^0,1$ Celsius

$$c = 1435 \text{ Meter.}$$

Setzen wir bei 8^0 C. nach den Beobachtungen von Grassi $\mu = 0,000\,049$ nach Kopp $s = 0,999\,775$, so wird

$$c = 1437 \text{ Meter,}$$

ſs das experimentelle Resultat mit dem theoretischen fast identisch ist.

Andere direkte Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Schalles lüssigkeiten sind nicht vorhanden. Dagegen hat Wertheim[1]) auch hier Töne der offenen Pfeifen benutzt, um die Geschwindigkeit des Schalles lüssigkeiten zu bestimmen. Das Verfahren, welches er anwandte, um Töne hervorzubringen, sowie die notwendigen Berichtigungen zu ern, haben wir an den betreffenden Stellen beschrieben. Berechnete theim indes aus seinen Versuchen nach der für offene Pfeifen gültigen hung aus den beobachteten Schwingungszahlen N die Schallgeschwineit c

$$c = 2lN,$$

rgab sich eine weit kleinere Geschwindigkeit als die Versuche von don und Sturm und die Theorie ergeben, nämlich bei 15^0C. als Mittel sehr vielen Versuchen

$$c = 1173,4 \text{ Meter.}$$

Um dieses Resultat mit der Theorie in Einklang zu bringen, nimmt theim an, daſs sich in Flüssigkeiten nicht, wie man gewöhnlich annt, der Druck momentan nach allen Richtungen gleichmäſsig überträgt, also nicht für einen momentanen Druck auf die eine Endfläche eines iner vollkommen ausdehnsamen Wand eingeschlossenen Flüssigkeitsders die Querdilatation gleich sei der durch den Druck hervorgebrach- Verkürzung, das heiſst, daſs das Volum ungeändert dasselbe sei, sondaſs auch dort eine Volumänderung eintrete und zwar gerade so, wie len festen Körpern. Ist diese Annahme gestattet, so muſs die Verung des Schalles in einer Flüssigkeitssäule sich zu derjenigen in einer grenzten Flüssigkeit verhalten wie diejenige in einem Stab... hwindigkeit in einer unbegrenzten Masse. Wertheim... Geschwindigkeit des Schalles in einer Flüssigkeitssäu... Colladon und Sturm sowie die Theorie gaben die ...

[1]) *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. ... Bd. LXXVII.

einer unbegrenzten Flüssigkeit. Die Wertheimsche Zahl mit $\sqrt{\frac{3}{2}}$ multipliciert, mufs dann mit den früheren Zahlen übereinstimmen.

In der That ist

$$1173{,}4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1437{,}1 \text{ Meter},$$

so dafs die Koincidenz der auf diese Weise von Wertheim berechneten Zahl dafür spricht, dafs das von ihm für feste Körper theoretisch abgeleitete Gesetz auch für Flüssigkeiten gültig ist, dafs demnach die Gleichheit des Druckes in allen Richtungen nicht bei den Schallschwingungen stattfindet, vielmehr eine flüssige Säule, welche longitudinal vibriert, denselben Ton gibt wie ein starrer Körper, dessen Materie dieselbe kubische Kompressibilität besitzt wie die Flüssigkeit.

Daraus folgt, dafs die Gesetze des Gleichgewichts starrer Körper auch für Flüssigkeiten gelten, während eines sehr kurzen Zeitabschnittes nach Anlegung äufserer Kräfte.

Ist dieses Verhältnis zwischen den beiden Geschwindigkeiten einmal festgestellt, so können wir für alle übrige Flüssigkeiten aus der Schallgeschwindigkeit in einer Säule die Geschwindigkeiten in einer unbegrenzten Masse und die Kompressibilität der Flüssigkeiten berechnen. Diese letztere ist für eine grofse Menge von Flüssigkeiten bereits direkt bestimmt; der Vergleich der nach beiden Methoden erhaltenen Werte der Kompressibilität würde also ein neues Mittel sein, die Wertheimschen Voraussetzungen und die theoretische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit zu bestätigen.

Wertheim hat für eine Reihe von Flüssigkeiten die Schallgeschwindigkeiten bestimmt und daraus die Kompressibilität der Flüssigkeiten berechnet. Seine Resultate, mit denen von Grassi (§ 62) zusammengestellt, gibt folgende Tabelle:

Flüssigkeit	Temperatur	Dichte	Schallgeschwindigkeit in der		Kompressibilität nach	
			Säule	unbegrenzten Flüssigkeit	Wertheim	Grassi
			Meter	Meter		
Seinewasser	15°,0	0,9996	1173,4	1437,1	0,000 049 1	–
do.	30,0	0,9963	1250,9	1528.5	0,000 043 3	–
do.	40,0	0,9931	1324,8	1622,5	0,000 038 8	–
do.	60,0	0,9901	1408,2	1724,7	0,000 034 6	–
Meerwasser	20,0	1,0264	1187,0	1453,8	0,000 046 7	0,0000445
Lösung v. Kochsalz 36,90 %	18,0	1,1920	1275,0	1561,6	0,000 034 9	0,0000321
Lösung v. schwefels. Natron 13,35 %	20,0	1,1089	1245,2	1525,1	0,000 039 3	–
„ 20,27 %	18,8	1,1602	1292,9	1583,5	0,000 034 8	–
Lösung v. kohlens. Natron 20,7 %	22,2	1,1	1301,8	1594,4	0,000 033 7	0,0000303
Lösung v. salpeters. Natron 37,5 %	20,9	1,2066	1363,5	1669,9	0,000 030 1	0,0000306
Lösung von Chlorcalcium 76,5 %	22,5	1,4322	1616,3	1979,6	0,000 018 1	0,000020
Alkohol 36° B.	20,0	0,8362	1049,9	1285,9	0,000 073 3	–
Alkohol absol.	23,0	0,7960	947,0	1159,8	0,000 094 7	0,000099
Terpentinöl	24,0	0,8622	989,8	1212,8	0,000 080 0	–
Schwefeläther	0,0	0,7529	946,3	1259,0	0,000 100 2	0,000111

Trotz der sich hiernach ergebenden sehr guten Übereinstimmung schen der von Wertheim und Grassi gegebenen Kompressionskoefficienten schon Helmholtz[1]) darauf hingewiesen, dafs die von Wertheim gegebene tung seiner Versuche nicht richtig sein kann. Der Unterschied der allgeschwindigkeit in einem Stabe und einer ausgedehnten Masse eines en Körpers rührt daher, dafs der Stab sich in seinen Querdimensionen ändern kann, in der ausgedehnten Masse dagegen nicht. Eine solche e Änderung der Querdimension findet in einer Flüssigkeitspfeife nicht tt. Allerdings ist gegen die Schwingungen der Flüssigkeit eine Pfeifen- d von Messing nicht absolut fest, es mufs deshalb eine Verlangsamung Schwingungen in ähnlicher Weise eintreten, wie bei einer Orgelpfeife weichen Wänden. Die Verlangsamung mufs deshalb von dem Durch- sser der Röhre, der Dicke ihrer Wandung und dem Elasticitätskoefficienten Materials der Wandung abhängen; je gröfser die beiden letztern sind, so geringer mufs die Verzögerung sein.

In der That haben Kundt und Lehmann[2]) sowie Dvořák[3]) gezeigt, die Einwürfe Helmholtz's richtig sind. Kundt gelang es nämlich, in ssigkeiten ganz eben solche und nach derselben Methode Staubfiguren vorzurufen wie in Gasen, wenn er dafür sorgte, dafs die Flüssigkeiten olut luftfrei waren. Als Pulver benutzte er sehr fein gepulvertes Eisen, sogenannte ferrum limatum. Die Messung der Länge der Wellen ergab n die Geschwindigkeit des Schalles im Wasser gerade wie in Luft. Die ultate, die Kundt und Lehmann erhielten, entsprachen ganz den Be- rkungen von Helmholtz, die Geschwindigkeit des Schalles nahm zu, wenn Durchmesser der Flüssigkeitssäule abnahm und die Wandstärke der bei Versuchen benutzten Glasröhren zunahm, wie folgende kleine Tabelle gt, die unter δ die Wandstärke, unter D den lichten Durchmesser der ire, unter V die aus den gemessenen Wellenlängen sich ergebende Ge- windigkeit des Schalles und unter t die Temperatur enthält, für welche beobachtete Wert der Geschwindigkeit gilt:

δ	D	V	t
2,2mm	28,7mm	1040,4m	18,°4
3,0	34,0	1227,7	17,0
3,0	23,5	1262,2	18,0
3,5	21,0	1357,6	18,5
5,0	16,5	1360,2	18,5
5,0	14,0	1383,2	22,2

Es nähert sich somit die Geschwindigkeit erheblich der theoretischen. Ähnliche Resultate erhielt Dvořák ebenfalls durch Beobachtung von ubfiguren, die er indes in anderer Weise erzeugte wie Kundt. Eine zontale, etwa zwei Meter lange Röhre, die an ihrem einen Ende ge- ossen war, wurde an beiden Enden vertikal umgebogen, das offene Ende a 1 Decimeter, das geschlossene Ende nur kurz. Die Röhre wurde dann Wasser gefüllt und an das geschlossene Ende eine grofse Luftblase ge-

[1]) *Helmholtz*, Fortschritte der Physik im Jahre 1848. Herausgegeben von Berliner physikalischen Gesellschaft p. 114.
[2]) *Kundt* und *Lehmann*. Poggend. Ann. Bd. CLIII.
[3]) *Dvořák*, Poggend. Ann. Bd. CLIV.

bracht, so dafs die Wassersäule dort durch Luft begrenzt war. Das aufsteigende offene Ende enthielt nur wenig Wasser. Dieses Ende wurde dann als Orgelpfeife angeblasen, indem man kräftig über die Röhre wegblies. Die Schwingungen dieser Luftsäule teilten sich dem Wasser mit, und in demselben liefsen sich die Knotenlinien, hergestellt durch von Salpeter befreites Schiefspulver, sehr gut messen. Der Vorteil dieses Verfahrens, gegenüber dem Kundtschen ist der, dafs das Wasser nicht luftfrei zu sein braucht. Folgende Tabelle enthält einige Beobachtungen

δ	D	V
0,82^{mm}	17,9^{mm}	998^{m}
0,63	11,7	1046
0,52	8,46	1164
2	15	1213
2	11	1281.

Wie man sieht, stimmen diese Zahlen sehr gut mit denen von Kundt und Lehmann überein.

§ 172.

Reflexion des Schalles. Wenn eine schwingende Bewegung sich in einer unbegrenzten Punktreihe oder einem Punktsystem fortpflanzt, so kehrt sie nicht zurück, indem jeder Punkt an den folgenden seine ganze Bewegung überträgt; wenn aber die Bewegung an einer Grenze ankommt, wo die Elasticität oder die Dichtigkeit des Punktsystems sich ändert, so tritt an dieser Stelle eine Teilung der Bewegung ein, ein Teil geht in das zweite Mittel über, ein Teil kehrt als reflektierte Bewegung in dem ersten Mittel zurück. Die Gesetze dieser Reflexion haben wir § 134 kennen gelernt und gesehen, dafs eine kugelförmige Welle von einer ebenen Grenzfläche so zurückgeworfen wird, als käme sie von einem Punkte, der ebensoweit hinter der Fläche liegt, als der Mittelpunkt der Bewegung vor der Fläche liegt. Jeder Radius der zurückgeworfenen Kugel bildet daher mit der Grenzfläche denselben Winkel als der die Fläche an derselben Stelle treffende Radius der einfallenden Kugel, oder der Winkel, welchen der einfallende Wellenstrahl mit der Normale der reflektierenden Fläche, mit dem Einfallslote bildet, ist gleich dem Winkel, welchen der reflektierte Wellenstrahl mit derselben Richtung bildet.

Da der Schall eine Wellenbewegung eines elastischen Mittels ist, so mufs das Reflexionsgesetz des Schalles ganz mit dem der Wellen identisch sein. Ein an einer festen Wand in der Luft ankommender Schall wird so zurückgeworfen, dafs der zurückgeworfene Schallstrahl mit dem Einfallslote denselben Winkel bildet als der ankommende Schallstrahl.

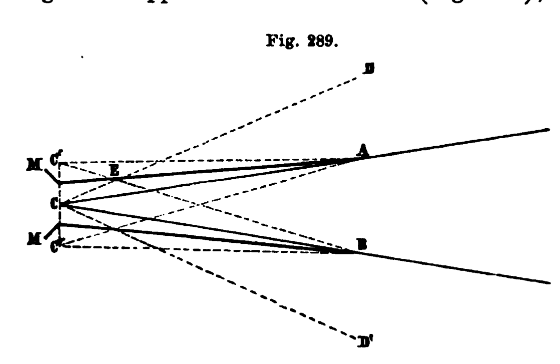
Trifft demnach ein Schallstrahl senkrecht gegen eine feste Wand, so wird er genau in derselben Richtung zurückgeworfen. Es ist bekannt, dafs man im Echo den zurückgeworfenen Schall wahrnehmen kann. Steht man in einiger Entfernung vor einer festen Wand und ruft man gegen dieselbe, so hört man nach einiger Zeit denselben Ton von der Wand zurückkehren. Damit man aber den zurückgeworfenen Ton unterschieden von dem direkten Tone wahrnimmt, ist eine gewisse Zeit notwendig. Die Erfahrung zeigt,

n in einer Sekunde 10 Töne nach einander wahrnehmen kann,
lmehr deutlich unterscheiden kann, dafs aber, wenn mehr Töne
ır treffen, der Eindruck ein verworrener wird.
mufs daher zwischen dem direkten und reflektierten Schalle 0,1 Se-
egen, wenn wir das Echo deutlich von dem primär erzeugten Tone
eiden sollen. Der Schall durchläuft nun in 1 Sekunde 331 Meter
uft, in 0,1 Sekunde also 33,1 Meter; befinden wir uns also 17 Meter
r festen Wand, so wird der Ton, um zur Wand und wieder zu uns
u gelangen, 0,1 Sekunde brauchen, wir hören also das Echo; rücken
er, so fällt es zum Teil mit dem direkten Tone zusammen, wir
her nur ein Verhallen des direkten Tones, entfernen wir uns von
d, so verfliefst eine gröfsere Zeit, in einer Entfernung von 34 Meter
nden und so fort. In der Entfernung von 34 Meter können wir
f den ersten Ton noch einen zweiten folgen lassen, der 0,1 Sekunde
nd erst 0,1 Sekunde später wird der erste zurückgeworfene Ton,
ı deutlich unterscheidbar, zu uns gelangen. In der Entfernung von
r von der festen Wand wird also das Echo ein sogenanntes zwei-
in noch gröfserer Entfernung ein drei- und mehrsilbiges.
mehrfaches Echo, das heifst die mehrmalige Wiederkehr desselben
itt dann auf, wenn eine Anzahl reflektierender Flächen vorhanden
he alle von den in einem bestimmten Punkte erzeugten Schall-
enkrecht getroffen werden. Wie die Flächen dazu gegen einander
üssen, und dafs im allgemeinen nur ein bestimmter Ort das mehr-
Echo hört, ist ohne weiteres klar.
s früher von der Reflexion der Wellen an krummen Flächen gesagt
ilt auch von der des Schalles, das Reflexionsgesetz bleibt dasselbe.
erklärt sich die bekannte Erscheinung, dafs in einem elliptischen
der an einem Brennpunkte erregte Schall in dem andern Brenn-
nit fast ungeänderter Stärke vernommen wird.
e Folge der Reflexion des Schalles ist das Verhallen der Töne in
ngs begrenzten grofsen Raume und die daraus hervorgehende Un-
keit einer geordneten Reihe von Tönen, z. B. einer Rede. Das ge-
e Wort wird von den entfernten Wänden so zurückgeworfen, dafs
ktierte Schall zum Teil noch mit dem direkten, zum Teil, wenn
hr langsam gesprochen wird, mit dem des folgenden Wortes zu-
ällt, und besonders das letztere undeutlich macht. Alles was den
ten Schall stört, wird daher die Deutlichkeit des Hörens in solchen
vermehren. Ist der Raum mit Menschen gefüllt, so hört man deut-
la dann die reflektierten Wellen selbst wieder vielfach reflektiert
und so ihre Regelmäfsigkeit gestört wird. Je kleiner ferner der
eitsunterschied zwischen der Luft und den Wänden des Raumes ist,
hwächer sind die reflektierten Wellen. Eine Bekleidung der Wände
hen, wenig dichten Stoffen schwächt daher die reflektierten Wellen
nehrt die Deutlichkeit des Hörens. Indes wird dadurch auch die
es Schalles durch den Mangel der sofort zu betrachtenden Resonanz
ht, deshalb ist das Mittel in Räumen, in welchen der Schall zu-
äftig und deutlich sein soll, wie in Konzertsälen, Theatern, nicht
den.
hindert man, dafs die von den verschiedenen Wänden reflektierten

Schallwellen nach der gleichen Richtung zurückgeworfen werden, so können sich dieselben nicht verstärken, sie werden daher in dem Falle möglichst wenig stören. Das erreicht man, indem man dem Raume einen rechteckigen Grundris erteilt und nur gerade Wände gibt. Von geraden Wänden werden die von einem Punkte ausgehenden Schallwellen alle divergierend zurückgeworfen. Es ist indes ein noch ungelöstes Problem, welches die Form eines Raumes ist, in welchem eine Reihe erzeugter Töne am besten und deutlichsten klingt.

Eine vielfach gebrauchte Anwendung der Reflexionsgesetze ist das Sprachrohr. Dasselbe hat den Zweck, Rufe in Entfernungen noch deutlich hörbar zu machen, in denen sie bei ungehinderter Verbreitung des Schalles zu schwach werden. Die einfachste Form eines solchen Apparates ist ein konisches Rohr von Pappe oder Metall, die Materie ist ohne Einfluſs. Man legt die Lippen in ein Mundstück (Fig. 289), welches sich an der Spitze des Kegels befindet, und man spricht in das Rohr hinein, indem man es nach der Seite hinrichtet, nach welcher hin man den Schall werfen will. Sei z. B. der Ton in dem Mittelpunkte C des Mundstückes erzeugt, so wird sich der Teil CAB der Schallwelle, welcher durch den Kegel begrenzt ist, dessen Mittelpunkt C und dessen Basis der Umfang AB des konischen Rohres ist, ungehindert ausbreiten. Derjenige Teil der Welle aber, welcher in dem Winkel DCA liegt, wird an den verschiedenen Punkten der Wand MA reflektiert und pflanzt sich fort, als käme er von dem Punkte C' als Strahlenkegel $C'AB$. Auch diese Schallstrahlen werden somit innerhalb des Kegels CAB sich fortpflanzen und den Schall nach der Richtung der Axe des Rohres verstärken. Gleiches gilt von dem Strahlenkegel BCD', und man sieht, daſs schlieſslich der ganze zwischen DCD' liegende Teil der Welle in einem kleinen Kegel kondensiert ist, daſs dieser Teil der Schallwelle, anstatt sich im Raum DCD' auszubreiten, den Schall in der Axe des Kegels verstärken wird. Diejenigen Schallstrahlen, welche die Wand noch näher bei M treffen als der Strahl CD, können durch mehrmalige Reflexion zunächst an der Wand MA, dann an der Wand MB und wieder an der Wand MA nach derselben Richtung geworfen werden, und so ebenfalls zur Verstärkung des Schalles beitragen.

Fig. 289.

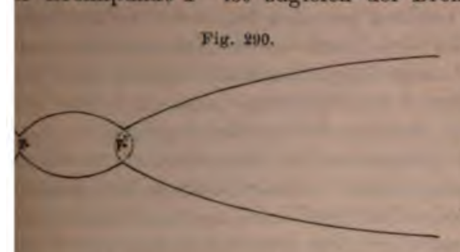


Lambert[1]) hat den Vorschlag gemacht, das konische Sprachrohr durch ein anderes zu ersetzen, das aus zwei krummen Flächen, einem Ellipsoid und einem Paraboloid zusammengesetzt ist. Das Mundstück ist so eingerichtet (Fig. 290), daſs der Mund des Rufenden sich in dem einen Brennpunkte F des Ellipsoides befindet, die sämtlichen Schallstrahlen werden

1) *Lambert*, Memoiren der Berliner Akademie 1768.

nn in dem andern Brennpunkte des Ellipsoides F' vereinigt und schreiten n diesem fort auf die Wand des paraboloidischen Stückes des Sprachrohrs. r Brennpunkt F' ist zugleich der Brennpunkt der Parabel, und da die sämtlichen Leitstrahlen, welche man von F' an die verschiedenen Punkte des Paraboloides zieht, mit den an eben diesen Punkten gezogenen Normalen der Fläche dieselben Winkel bilden, welche durch diese Punkte parallel mit der Axe gezogene Linien mit der Normale einschliefsen, so werden lle von F' ausgehenden, das Paraboloid treffenden Schallstrahlen parallel der xe reflektiert. Der Schall wird also ohne grofse Schwächung nach der ichtung der Parabelaxe sich fortpflanzen.

Fig. 290.



§ 173.

Übergang des Schalles in andere Mittel; Resonanz. Wenn eine hwingende Bewegung an der Grenze zweier Mittel ankommt, so geht, wie r früher sahen, die schwingende Bewegung nicht nur im ersten Mittel reflektiert zurück, sondern sie geht auch in das zweite Mittel hinüber d pflanzt sich dort mit der für dieses Mittel gehörigen Geschwindigkeit iter fort. Kommt die Welle, welche wir als eben voraussetzen wollen, einer gegen die Grenzfläche geneigten Stellung an, so ist die Wellenene im zweiten Mittel nicht derjenigen im ersten Mittel parallel, sondern gegen geneigt. Der Wellenstrahl wird also gebrochen, das Gesetz, nach lchem das geschieht, war folgendes:

1) Der gebrochene Wellenstrahl liegt mit dem einfallenden in derben Ebene.

2) Der Sinus des Winkels i, den der einfallende Wellenstrahl mit dem nfallslote bildet, verhält sich zum Sinus des Brechungswinkels r wie die rtpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung im ersten Mittel c zu der im eiten Mittel c', oder

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{c'}.$$

Dafs der Schall nach diesem Gesetze gebrochen wird, hat durch ausdehnte Versuchsreihen Hajech[1]) nachgewiesen. Hajech führte eine Röhre n 77 Millimeter Weite und veränderlicher Länge durch die Scheidewand eier benachbarter Säle. Die beiden Enden dieser Röhre wurden durch mbranen geschlossen. Eine zweite Röhre, deren Axe in der Verlängerung r ersten lag, auf welche sie eingestellt war, endigte in einer Büchse, in lcher das tönende Instrument, Glocken verschiedener Gröfse, eingeschlossen rde. Der Beobachter hielt sich in dem zweiten Saale auf, auf dessen rketboden ein Kreisbogen gezogen und graduiert war, dessen Mittelpunkt

[1]) *Hajech*, Nuovo Cimento März 1857. Poggendorffs Annalen Bd. CII

sich vertikal unter dem Ende der Röhre befand. Bei einer ersten Reihe von Versuchen wurden die Membranen senkrecht zur Axe der Röhre gestellt, welche sie verschlossen und die Röhre mit Luft oder andern Gasen gefüllt. Der Schall wurde nicht abgelenkt, sondern am stärksten in der Verlängerung der Röhrenaxe wahrgenommen. Da der Schall in der Axe der Röhre sich bewegte, so traf er senkrecht auf beide Grenzflächen der Röhre; nach dem Brechungsgesetz darf keine Ablenkung eintreten.

Darauf wurde die Membran in dem dem Beobachter zugewandten Ende der Röhre gegen die Axe geneigt, an der andern Seite blieb sie senkrecht. Dort traf also der in der Axe ankommende Schallstrahl wieder senkrecht auf die Grenzfläche, der Einfallswinkel war Null, also auch der Brechungswinkel; der Schall bewegte sich einfach in der Axe der Röhre weiter, mit welcher Substanz dieselbe auch gefüllt war. Der Strahl traf dann die zweite Fläche unter demselben Winkel, den die Membran mit der Axe bildete; der Einfallswinkel war also der Winkel, der diesen zu 90^0 ergänzte, er wurde einfach durch eine Messung des ersten Winkels erhalten.

Wurde die Röhre mit Luft gefüllt, so trat auch dann keine Ablenkung ein, da innerhalb und aufserhalb der Röhre dasselbe Mittel war, der Schall sich also mit der gleichen Geschwindigkeit fortbewegte. Wurde aber das Rohr mit einem andern Gase oder einer Flüssigkeit gefüllt, so trat eine Ablenkung ein. Dieselbe wurde beobachtet dadurch, dafs der Beobachter sein Ohr in gleicher Höhe mit dem Ende der Röhre hielt und auf dem Kreisbogen so lange seine Stelle veränderte, bis er den Schall am stärksten wahrnahm, dann von seinem Ohre ein Lot auf den Kreisbogen herabliefs und den Winkel bestimmte, den der zu dem getroffenen Punkte gehörige Radius des Kreises mit dem Einfallslote bildete. Da dieser Radius die Richtung des austretenden Schalles angab, so bestimmte dieser Winkel den Brechungswinkel.

Hajech erhielt auf diese Weise folgende zugehörige Einfalls- und Brechungswinkel; die letzte Kolumne, welche die nach der Formel

$$\sin r = \frac{c'}{c} \cdot \sin i$$

aus den gegebenen Winkeln i berechneten r enthält, zeigt die Übereinstimmung der Resultate mit dem Brechungsgesetz:

Substanzen in der Röhre	Einfallswinkel	Brechungswinkel beobachtet	Brechungswinkel berechnet
Wasserstoff	35° 50′	8°	8° 50′
"	25°	7°	6° 22′
Ammoniakgas	41°	29° 20′	30° 22′
"	35° 50′	25°	26° 50′
Leuchtgas	35° 50′	25° 40′	—
Kohlensäure	35° 50′	49° 50′	48° 19′
"	25°	33° 20′	32° 33′
Brunnenwasser	35° 50′	7° 40′	7° 58′
"	25°	5° 40′	5° 37′
Gesätt. Kochsalzlösung	35° 50′	6° 15′	
"	25°	5° 10′	

Man sieht, wie die Beobachtung das Gesetz bestätigt, welches sich aus er Theorie der Wellenbewegung ergeben hat[1]).

Wenn eine schwingende Bewegung in eine dünne Schicht eines zweiten Iittels übergeht und sich in derselben bis an die Grenze fortgepflanzt hat, o tritt beim Austritt in das erste Mittel aus der zweiten Grenze eine teil- veise Reflexion der Bewegung ein und die reflektierte Welle kehrt in der chicht zur ersten Grenze wieder zurück; wenn nun durch die erste Grenze mmer neue und neue Bewegungen in das zweite Mittel übergehen, so önnen sich diese mit den in dem Mittel reflektierten zusammensetzen und tehende Wellen derselben Periode als die ankommende Welle erzeugen, erade so wie in einem longitudinal schwingenden Stabe solche stehende Vellen durch Interferenz der direkt erregten Wellen und der an der einen irenze reflektierten entstehen.

Man kann sich davon durch eine ganze Reihe von Versuchen über- eugen. Spannt man auf einem Monochord zwei Saiten vollständig im Ein- lang auf und setzt dann unter die eine einen Steg, so dafs man $\frac{1}{4}$ der aite absondert und streicht dann dieses $\frac{1}{4}$ mit dem Bogen an, so erhalten vir die zweite Oktave des Tones der ganzen Saite, indem dadurch sich die anze Saite in vier gleiche schwingende Teile zerlegt. Sofort zeigt sich ann, dafs auch die zweite nicht abgeteilte Saite mit der ersten isochron chwingt, denn hält man die erste rasch fest, so hört man noch eine Zeit ang genau denselben Ton auf der zweiten Saite, und bringt man auf die weite Saite kleine Papier-Reiterchen, so werden dieselben abgeworfen, ufser an den Stellen der Schwingungsknoten.

Wenn man in einem Raume ein Klavier oder eine Violine oder irgend in Saiteninstrument aufstellt und bringt nun in deren Nähe einen Ton ervor, der ein harmonischer Ton einer der Saiten dieser Instrumente ist, o hört man sie auf das deutlichste mitklingen. Bei Anwendung eines Klavieres bekommt man bei gehobenem Dämpfer auf jeden hineingesungenen 'on einen Nachhall, der nicht nur diesen Ton, sondern auch die harmoni- chen Obertöne deutlich enthält.

Ebenso geben Pfeifen und Gläser, überhaupt eingeschlossene Luft- äulen, Töne an, wenn man einen ihrer harmonischen Töne in der Nähe rzeugt.

Wenn sich auf diese Weise durch den Einflufs einer schwingenden Bewegung in benachbarten Körpern stehende Schwingungen erzeugen, so st unmittelbar ersichtlich, dafs an jeder Grenzstelle die Erscheinungen ehr kompliziert werden, und dafs sich deshalb nicht leicht eine Theorie eben läfst über die Form der Schwingungen in den mitschwingenden Körpern. Das aber läfst sich leicht erkennen, dafs kräftiges Mitschwingen ines Körpers, also kräftiges Mittönen, nur dann eintreten kann, wenn die n dem mitschwingenden Körper eintretenden Schwingungen dort stehende Vellen geben können, wenn also der ankommende Ton einer der Eigentöne es mitschwingenden Körpers ist. In der Beziehung besteht ein grofser

[1]) Betreffs der Brechung des Schalles sehe man indes *Mach* und *Fischer* 'oggend. Ann. Bd. CXLIX, welche zeigen, dafs man nur unter besondern Um- tänden eine Brechung des Schalles mit Sicherheit nachweisen kann, da im all- emeinen die Wellenlängen gegen die brechenden Flächen zu grofs sind, um hne weiteres die Huyghenssche Konstruktion anwenden zu können.

Unterschied in der Stärke des Mittönens, je nachdem der mitschwingende Körper die durch einen einmaligen Anstofs erteilten Schwingungen lange beibehält oder schnell wieder verliert. Ein schwingender Körper, der seine Bewegung lange beibehält, wie eine Stimmgabel, oder alle starren elastischen Körper, wird nur merklich mittönen, wenn der ankommende Ton ein Eigenton des schwingenden Körpers ist, denn bei einer sehr kleinen Verstimmung des ankommenden Tones müssen sich die Eigenschwingungen des Körpers und die ankommenden Schwingungen stören, da sie verschiedener Phase werden. Wenn dagegen die Schwingungen des mitschwingenden Körpers, wie etwa bei wenig gespannten, sehr feinen Membranen, sehr rasch an Intensität abnehmen, so kann ein solcher Körper auch in merkliche Schwingungen versetzt werden, wenn der ankommende Ton auch von dem Eigenton desselben verschieden ist. Denn wenn ein Körper die infolge eines ersten Anstofses entstehende Bewegung schon nach wenigen Schwingungen verliert, so wird jeder neue Anstofs ihm Bewegung erteilen, wenn auch die ankommende Bewegung in etwas anderer Phase ist als jene infolge des vorhergehenden Anstofses, somit als der geringe Rest der noch in dem Körper vorhandenen schwingenden Bewegung.

Man kann diese Schlüsse leicht experimentell bestätigen; das Extrem nach der einen Richtung bildet etwa eine Stimmgabel, welche durch den Ton einer andern Stimmgabel kaum mehr zum Tönen gebracht wird, wenn derselbe nur um ein oder zwei Schwingungen anders ist. Man nehme zwei Stimmgabeln, die den Ton c_2, also 512 Schwingungen in der Sekunde geben, beide auf Resonanzkasten stehend, so wird, wenn die Stimmung beider genau die gleiche ist, die andere kräftig mittönen, wenn man die eine anstreicht. Dann verstimme man die eine durch Aufkleben von Wachs, so dafs sie nur ein oder zwei Schwingungen weniger macht, was man an den in einem der nächsten Paragraphen zu besprechenden Stöfsen leicht erkennen kann, man wird dann kaum noch ein Mittönen erhalten. Das Extrem nach der andern Seite bilden die Membranen in den Königschen Flammenkapseln, bei denen kaum Eigenschwingungen vorkommen, bei denen jeder Anstofs nur eine Schwingung bewirkt, eine solche Membran nimmt daher jede Schwingung auf, welche sie trifft.

Helmholtz[1]) hat die Beziehung zwischen der Dauer des Nachklingens eines einmal in Schwingung versetzten Körpers und der Intensität des Mittönens genauer untersucht. Er gelangt dabei zu folgenden Resultaten.

Wenn wir die Intensität des Tones, der in einem mitschwingenden Körper durch genauen Einklang erzeugt wird, als Einheit setzen, so wird durch einen Ton, der um $\frac{1}{8}$ tiefer oder höher ist, die Tonstärke des mittönenden Körpers gleich 0,1, wenn der mittönende Körper nach 38 Schwingungen nur mehr 0,1 der Tonstärke besitzt, die ihm durch einen einmaligen Anstofs gegeben ist. Nimmt die Intensität der Eigenschwingungen so rasch ab, dafs die Stärke des Tones, wenn der mittönende Körper für sich erregt wird, schon nach 19 Schwingungen auf 0,1 herabsinkt, so bewirkt ein Ton, der $\frac{1}{4}$ Ton höher oder tiefer ist, in dem mittönenden Körper

---

[1]) *Helmholtz*, Tonempfindungen III. Ausgabe p. 220 und Beilage X. Diese Sätze über Resonanz lassen gleichzeitig erkennen, weshalb in der Mundhöhle die Eigentöne mitklingen können, selbst wenn sie nicht gerade Obertöne des gesungenen oder gesprochenen Klanges sind.

inen Ton, der 0,1 der Stärke des durch genauen Gleichklang erzeugten Tones besitzt. Die gleiche Tonstärke des Mitschwingens tritt ein durch Töne, welche verschieden sind um

$\frac{1}{2}$ Ton,	wenn	die	Intensität	des	Eigentones	nach	9,5	Schwingungen
$\frac{3}{4}$ "	"	"	"	"	"	"	6,33	"
1 "	"	"	"	"	"	"	4,75	"
$\frac{5}{4}$ "	"	"	"	"	"	"	3,80	"
leine Terz,	"	"	"	"	"	"	3,17	"
$\frac{7}{4}$ Ton,	"	"	"	"	"	"	2,71	"
rofse Terz,	"	"	"	"	"	"	2,37	"

uf 0,1 der durch einen Anstofs erregten ursprünglichen Tonstärke herabesunken ist. Man sieht also, dafs nur solche Körper, in denen die einmal rregten Schwingungen sehr rasch an Stärke abnehmen durch Töne, welche on ihren Eigentönen verschieden sind, in merkliche Mitschwingungen veretzt werden, dafs also starr elastische Körper nur dann merklich mitönen, wenn einer ihrer Eigentöne erklingt. In solchen mitschwingenden örpern ist also die Tonhöhe gleich derjenigen des erregenden Tones.

Ferner ergibt sich aus den Versuchen von Savart[1]) der wie es scheint llgemeine Satz, dafs die mitgeteilten Schwingungen stets parallel sind en ankommenden. Von den vielen Versuchen Savarts führen wir nur lgenden an. Ein feiner Streifen von Holz wird an seinem einen Ende an inem auf einem Boden aufgesetzten Holzstück befestigt (Fig. 291), an

Fig. 291.



einem andern Ende ist eine gespannte Saite befestigt. Wenn man der espannten Saite mittels eines Violinbogens eine schwingende Bewegung rteilt, senkrecht zur Ebene des Streifens, so gerät der Streifen in transersale Schwingungen, wie man aus der hüpfenden Bewegung des Sandes uf dem Streifen ersieht. Wenn man aber die Saite in einer mit der Ebene es Streifens parallelen Richtung in Schwingung versetzt, so schwingen die 'eile des Streifens in der Ebene desselben hin und her. Sand auf den treifen gestreut, erhält keine hüpfende, sondern nur eine gleitende Beregung.

Da die Tonhöhe durch die an starr elastische Körper übertragenen litschwingungen, wie wir eben ableiteten, nicht geändert wird, so benutzt an in der Musik diese Erscheinung, um schwachen Klängen durch Resoanz eine bedeutende Stärke zu verleihen. Eine Saite einfach in Schraubtöcke von Blei eingespannt, gibt nur einen schwachen, kaum hörbaren Ton. Venn man sie dagegen auf einer Platte elastischen Holzes ausspannt, uittels elastischer Halter daran befestigt und mittels Stegen von elastischem Iolze damit in Verbindung setzt, so wird durch die Resonanz der Platte er Ton sehr bedeutend verstärkt.

---

[1]) *Savart*, Annales de chim. et de phys. XIX.

Der Klang einer Geige verdankt seine Kraft nur der Resonanz des Bodens, auf welchem die Saiten ausgespannt sind; ebenso ist beim Klavier die Stärke des Tones wesentlich abhängig von der Güte des mitschwingenden Resonanzbodens, mit welchem die Saiten durch den Steg, durch welchen sie gezogen sind, in Verbindung stehen. Ebenso gibt eine Stimmgabel einfach in der Luft gehalten einen äufserst schwachen kaum hörbaren Ton, derselbe wird aber sehr kräftig, wenn man die Gabel wie in Fig. 258 auf einen Resonanzkasten stellt, einen Kasten von elastischem Holze, dessen Luftsäule den Ton der Gabel gibt, oder wenn man sie auf den Resonanzkasten einer Geige oder überhaupt auf eine elastische Platte stellt.

Diese tonverstärkende Wirkung der mitschwingenden Platte erklärt sich unmittelbar aus den Gesetzen der Mechanik. So lange Saiten oder transversal schwingende Stäbe von kleiner Ausdehnung allein in der Luft schwingen, setzen sie nur kleine Luftmengen in Bewegung, wenn sie aber mit ausgedehnten elastischen Flächen in Verbindung, diese in isochrone Mitschwingungen versetzen, wird durch diese Schwingungen eine viel gröfsere Luftmenge in Bewegung versetzt, und mit der Masse der schwingenden Teilchen wächst die Intensität des Tones.

Was aber an Intensität des Tones gewonnen wird, das geht an Dauer verloren; eine Stimmgabel oder eine gespannte Saite behalten, wenn sie für sich schwingen, ihre Bewegung lange bei, mit einem Resonanzboden verbunden, verlieren sie ihren Ton sehr rasch.

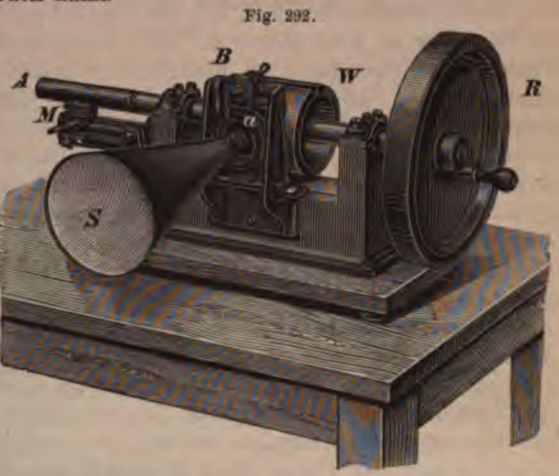
Nach dem Vorigen sieht man nun auch, welche Instrumente, um klingend zu werden, mit einem Resonanzboden verbunden werden müssen, welche nicht; alle diejenigen, welche den Ton durch Schwingungen von elastischen Streifen oder gespannten Saiten hervorbringen, brauchen einen Resonanzkasten oder Resonanzboden, diejenigen aber, bei denen die Luft direkt in Bewegung gesetzt wird, wie bei den Blasinstrumenten, bedürfen eines tonverstärkenden Mittels nicht.

Die Resonanz verändert die Höhe eines erregten Tones nicht, wohl aber hat sie wesentlichen Einflufs auf den Klang, da die in einem Klange vorhandenen Partialtöne durch Resonanz nicht in demselben Verhältnis verstärkt werden. Der Klang einer Geige ist deshalb ein ganz anderer als der einer freien mit dem Bogen gestrichenen Saite. Ja der Klang der Geige wird ganz wesentlich von der Güte des Resonanzkastens bedingt, indem nur ein sehr elastischer gut gearbeiteter Kasten die höheren Partialtöne ebenso verstärkt als die tiefern.

Eine äufserst interessante Anwendung der Resonanz, welche zugleich zeigt, wie vollständig und genau die mitschwingenden Körper die Schwingungen reproducieren, ist neuerlichst in dem von Bell konstruierten Telephon und dem von Edison konstruierten Phonographen gemacht worden. Das Telephon werden wir im vierten Bande besprechen. Beide Apparate zeigen, dafs nicht nur feine Gummimembranen, sondern auch starre Platten alle an sie ankommenden Schwingungen aufnehmen, sie verwenden die Schwingungen der Platten nur in etwas verschiedener Weise, um gegen die Platte gesandte Töne oder Klänge oder auch die menschliche Sprache, das Telephon an einem entfernten Ort, der Phonograph am Orte der Erzeugung des Klanges zu reproducieren.

Der wesentliche Teil des Phonographen, von dem Fig. 292 eine Abbildung zeigt in der Form, welche ihm von der Maschinenfabrik Osenbrück & Co. zu Hemelingen bei Bremen gegeben ist, ist die etwa 0,25^{mm} dicke Eisenblechplatte, welche mit ihrem Rande in der kreisförmigen Fassung *a* befestigt ist und den Boden des Schallbechers *S* bildet. Eine an der Fassung *a* der Platte befestigte Stahlfeder, welche bis genau unter die Mitte der Platte reicht, drückt auf der vom Sprachrohr abgewandten Seite ein kurzes Stück dicken Kautschukrohres gegen die Mitte der Platte. Diese Stahlfeder trägt an ihrem Ende einen feinen vorn nicht zu spitzen, vielmehr etwas abgerundeten Stift senkrecht zur Ebene der Platte. Sendet man nun einen Klang in das Sprachrohr, so nimmt die Platte alle hingesandten Schwingungen auf und überträgt sie durch das Kautschukrohr auf den Stift, welcher dann gerade so in Bewegung gerät, wie die Flammen der Königschen Flammenapparate Fig. 264, welche, wie wir sahen, jeden Partialton des in den Schalltrichter gesandten Klanges wiedergeben. Die Platte mit dem Schalltrichter wird von einem festen Rahmen getragen, der mit der unter *B* sichtbaren Schraube der Walze *W* etwas näher gebracht oder von ihr entfernt werden kann.

Fig. 292.



Die Spitze schreibt ihre Bewegungen auf die Walze *W*, welche, wie die Figur zeigt, auf der Axe *A* aufgesetzt ist, die durch die Kurbel des Schwungrades *R* in Drehung versetzt werden kann, und bei der Drehung durch die in die Mutter *M* eingreifende Schraube, welche in das Ende der Axe bei *A* eingeschnitten ist, vorwärts bewegt wird. In die Walze *W* ist der Schraube bei *A* entsprechend eine Spiralfurche eingeschnitten. Die Walze *W* wird mit einem Blatte dünner Zinnfolie, etwa 1 Quadratdecimeter 1 Gramm wiegend, überzogen. Der die Platte mit der Spitze tragende Rahmen wird dann so gestellt, dafs die Spitze mit sanftem Drucke auf der Zinnfolie über der Vertiefung der Spiralfurche aufsteht.

Sendet man nun in den Schalltrichter, respektive in das bei dem Hineinsenden des Tones ihn ersetzende kleinere Mundstück, einen Klang gegen die Platte oder spricht man mit kräftiger Stimme dagegen, während gleichzeitig die Walze in Rotation versetzt wird, so prägt der Stift, indem die Furche unter ihm weiter gleitet, seine Schwingungen in die Metallfolie ein. Die Eindrücke erscheinen dem freien Auge wie kleine eingedrückte Punkte, mit dem Mikroskope betrachtet erkennt man in ihnen indes mehr oder weniger starke Vertiefungen je nach der Art des Klanges, den sie darstellen. Ein Durchschnitt durch die Eindrücke längs der Furche gibt eine

Kurve, nur nicht mit so starken Erhöhungen und Vertiefungen, wie sie die Enden der Flammen der Königschen Flammenbilder zeigen.

Man bringt dann, wenn die in den Phonographen zu sendenden Klänge oder die Rede beendet ist, die Walze wieder in die Anfangslage zurück, während man den Rahmen mit der Spitze etwas zurückgezogen hat. Ist die Walze wieder in der Anfangslage angekommen, so bringt man die Spitze wieder in die Lage, dafs sie an dem Staniol anliegt, wie sie es bei dem Niederschreiben der Schwingungen that. Man ersetzt dann das Mundstück durch den Schalltrichter S und dreht die Walze mit derselben Geschwindigkeit wieder vorwärts, wie vorher bei dem Schreiben. Da die gegen die Zinnfolie drückende Spitze genau dieselben Schwingungen, bei ihrer Bewegung über die Vertiefungen fort, wieder annimmt, und der Platte mitteilt, welche sie bei dem Hineinsenden des Klanges oder der Rede angenommen hatte, so kommen jetzt derselbe Klang oder dieselbe Rede wieder aus dem Schalltrichter hervor, welche man vorher hineingesandt hat. Der zurückkehrende Klang ist nur erheblich schwächer, und der Klang der zurückkehrenden Rede ist im allgemeinen etwas näselnd, wie Auerbach in den Beiblättern zu Poggendorffs Annalen Bd. II ganz richtig bemerkt.

Ist die Geschwindigkeit, mit der man bei der Reproduktion des Klanges die Walze dreht, eine andere als beim Hineinsenden desselben, so wird die Tonhöhe des reproducierten Klanges eine andere, ist die Geschwindigkeit ungleichmäfsig, so werden hineingesungene Klänge unrein, die hineingesprochene Rede bei der Reproduktion undeutlich. Um die bei der Bewegung mit freier Hand schwierig zu erhaltende Gleichmäfsigkeit der Bewegung zu erzeugen, dient eben das schwere Schwungrad R. Eine noch gröfsere Regelmäfsigkeit ist dadurch zu erreichen, dafs man die Axe durch ein Uhrwerk von konstanter Geschwindigkeit dreht.

Die Reproduktion der Klänge und der menschlichen Rede durch den Phonographen ist ein vollgültiger und äufserst interessanter Beweis für die Richtigkeit der Helmholtzschen Theorie des Klanges überhaupt und der Vokalklänge der menschlichen Stimme insbesondere. Hier erhält eben die schwingende Platte bei der Reproduktion des Klanges die Schwingungen in der Zusammengesetztheit zurück, wie sie durch die einzelnen Partialtöne des hineingesandten Klanges bedingt ist, und nichts anderes. Dafs die Schwingungen der Platte dann wesentlich denselben Klang reproducieren, beweist eben, dafs in dieser Zusammengesetztheit der Schwingungen die Wesenheit des Klanges begründet ist und in nichts anderm.

Eine Untersuchung der Kurven, die, wie vorhin erwähnt, ein durch die Vertiefungen des Staniols geführter Längsschnitt liefert, kann eine weitere Bestätigung der Klang- und Vokaltheorie liefern. In dieser Weise haben Fleming Jenkin und Ewing[1]) den Phonographen benutzt, indem sie durch eine nicht näher zu beschreibende Vorrichtung die den Vertiefungen entsprechenden Kurven in vergröfsertem Mafsstabe aufzeichnen liefsen, und dann an diesen Kurven die Intensitäten der einzelnen Partialtöne, welche die Vokalklänge zusammensetzten, bestimmten. Auch die so erhaltenen Resultate stimmen im wesentlichen mit der Helmholtzschen Theorie überein[2]).

[1]) *Fleming Jenkin* und *J. A. Ewing*. Nature Bd. XVIII p. 340. 394. 454.

[2]) Man sehe das Referat über diese Arbeit in den Beiblättern zu Poggendorffs Annalen Bd. II p. 691 von *Auerbach*.

§ 174.

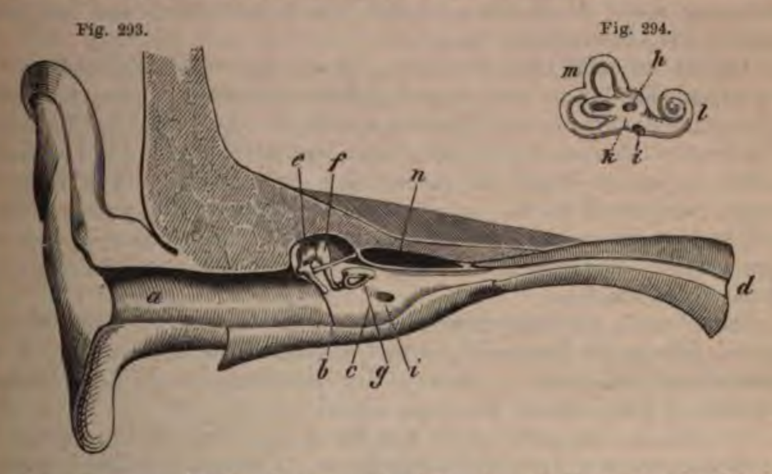
Das menschliche Ohr. Durch die Mitteilung der schwingenden Be-
egung an die die Gehörnerven umgebenden elastischen Medien und da-
urch an den Gehörnerven selbst nehmen wir den Schall wahr.

Das Gehörorgan des Menschen umfafst drei Abteilungen von Hohl-
äumen, welche zum grösten Teil in dem festen Knochen des Schläfen-
eines eingeschlossen sind, das äufsere, mittlere und innere Ohr; die beiden
rstern sind mit Luft, das innere Ohr ist mit Wasser angefüllt.

Zum äufsern Ohr gehört die Ohrmuschel und der äufsere Gehörgang,
um mittlern Ohr die Paukenhöhle und die Ohrtrompete, die tuba Eustachii.

Der äufsere Gehörgang *a* (Fig. 293) ist durch das Trommelfell *b*,
elches in seinem ganzen Umfange an Knochen angeheftet ist, von der
aukenhöhle *c* getrennt, diese verengert sich weiterhin zur Ohrtrompete *d*,
welche in der Nasenhöhle mündet. Die Höhle des innern Ohres, von der
ig. 294 einen Abgufs in natürlicher Gröfse darstellt, liegt in dem Knochen,
elcher die hintere Wand der Paukenhöhle bildet. Zwischen ihr und dem
rommelfell liegt in der Paukenhöhle die Reihe der Gehörknöchelchen.

Fig. 293. Fig. 294.



Der Hammer (malleus) *e* ist mit seinem langen Fortsatz oder Stiel im
entrum des Trommelfells, ferner in einer Linie von da zum obern Ansatz-
ande hinauf und nahe dem letztern noch einmal mit seinem kurzen Fort-
atze am Trommelfell angeheftet. Aufserdem ist er noch durch einen
urzen Fortsatz, der gerade nach vorn über dem Rande des Trommelfells
in liegt (und deshalb in der Figur abgeschnitten ist), an der Knochen-
and der Paukenhöhle angeheftet.

Sein Kopf, der den obern Rand des Paukenfelles überragt, steht durch
in Gelenk mit dem zweiten Knochen, dem Ambos (incus) *f* (Fig. 293) in
erbindung. Der Ambos ist aufserdem mit einem kurzen (in der Figur
inter dem Hammer liegenden) Fortsatz an der hintern Wand der Pauken-
öhle angestützt.

Vom Ambos *geht ein langer* Fortsatz parallel dem Stiele des Hammers
ach unten; an seinem Ende ist der dritte Knochen, der Steigbügel g

(Fig. 293) befestigt, der horizontal nach hinten liegt. Die Platte, in der seine beiden Leisten zusammenstofsen, der Fufstritt, ist an ihrem Rande herum häutig mit dem Rande des ovalen Fensters *h* (Fig. 294) verbunden, welches in der Mitte des hintern Teiles der Paukenhöhle in die Höhle des innern Ohres führt.

Das innere Ohr steht durch zwei Öffnungen mit der Paukenhöhle in Verbindung durch das ovale Fenster *h*, welches von der Platte des Steigbügels bedeckt ist, und das unterhalb demselben liegende runde Fenster *i*, welches durch eine einfache feine Membran geschlossen ist. Das ovale Fenster führt zum mittlern Teile des innern Ohres, zum Vorhof (vestibulum) *k* (Fig. 294), in welchem dem Fenster und somit der Platte des Steigbügels gerade gegenüber ein Zweig des Gehörnerves einmündet. Vom Vorhof geht nach der einen Seite der spiralig gewundene Gang der Schnecke (cochlea) *l* (Fig. 294) aus, in welchem sich ein besonderer Ast der Nerven von der Axe aus verteilt. Zur Schnecke führt aufserdem direkt von der Paukenhöhle aus das runde Fenster *i*.

Nach der andern Seite gehen vom Vorhofe die drei halbzirkelförmigen Kanäle *m*, in drei zu einander senkrechten Ebenen gebogen, in je zwei Mündungen aus. Auch diese erhalten durch die eine etwas erweiterte Mündung Äste des Gehörnerven.

Das Trommelfell ist mit seinem Centrum ein wenig trichterförmig in die Paukenhöhle hinein vertieft und dadurch gespannt. Diese Spannung kann durch eine Drehung des Hammers um die den obern Rand des Trommelfelles tangierende (zur Ebene der Figur senkrechte) Axe des Fortsatzes, mit dem er an die Wand der Paukenhöhle befestigt ist, etwas vermehrt werden. Dadurch rückt das untere Ende seines Stieles dem ovalen Fenster näher, und da die andern Gehörknöchelchen seiner Bewegung einigermafsen folgen, so wird dadurch der Fufstritt des Steigbügels etwas in das ovale Fenster hineingetrieben.

Das Wasser des Labyrinthes kann diesem Drucke nur dadurch ausweichen, dafs es die das runde Fenster verschliefsende Membran gegen die Paukenhöhle hinausdrängt, so dafs mit der stärkern Spannung des Trommelfelles auch diejenige dieser Membran wächst.

Im grofsen und ganzen geht aus der anatomischen Beschreibung des Gehörorgans die Art der Schallwahrnehmung hinlänglich deutlich hervor. Die Schwingungen der Luft teilen sich zunächst dem Trommelfelle mit, das dadurch entweder in longitudinale Schwingungen, wie Johannes Müller annimmt, oder in transversale Schwingungen, bei denen die Membran als solche schwingt, wie andere wollen, versetzt wird. Die Schwingungen des Trommelfells pflanzen sich dann durch die Reihe der Gehörknöchelchen zum ovalen Fenster und so in die Flüssigkeit des Vorhofes, und durch die Luft der Paukenhöhle zum runden Fenster und in die Flüssigkeit der Schnecke fort. In beiden Flüssigkeiten, der des Vorhofes sowohl, dem ovalen Fenster gerade gegenüber, als auch jener der Schnecke endigen Teile der Gehörnerven.

Aber auch in den halbzirkelförmigen Kanälen endigen Zweige des Gehörnerves, auch diese müssen daher zum Hören beitragen. Es ist nun eine wahrscheinliche Hypothese, dafs die durch den Ton erregten Schwingungen der Kopfknochen sich der Flüssigkeit in den halbzirkelförmigen Kanälen

itteilen, und dafs diese dann durch die in denselben mündenden Nerven-
ndigungen percipiert werden.

Die neuern anatomischen Entdeckungen über den Bau des innern Ohres,
esonders die Art, wie die Nerven dort endigen, von Max Schultze und
em Marchese Corti haben Helmholtz[1]) in den Stand gesetzt, die Perception
es Schalles genauer zu erkennen. Es würde die uns in diesem Buche ge-
treckten Grenzen weit überschreiten, wollten wir diese Fragen hier aus-
ührlich besprechen; nur einen Punkt müssen wir etwas genauer hervor-
eben, nämlich wodurch nach der Hypothese von Helmholtz das mensch-
iche Ohr in den Stand gesetzt wird, jeden Klang in seine einzelnen
artialtöne zu zerlegen. Diese Zerlegung findet wahrscheinlich in der
chnecke statt und wird ermöglicht durch die eigentümlichen Gebilde, mit
welchen dort die Nervenendigungen in Verbindung stehen. Die Schnecke
st nämlich ihrer ganzen Länge nach durch eine teils knöcherne, teils
membranöse Scheidewand in zwei Hälften geteilt, eine obere und eine
ntere, die eine mündet im Vorhof, die andere läuft gegen die Paukenhöhle
us und ist durch die Membran des runden Fensters geschlossen. Der
nöcherne Teil der Scheidewand befindet sich an der innern Seite der
Windungen und durch diesen Teil derselben treten die Nervenfasern in
ie häutige Membran über, und dort endigen sie an den Cortischen Fasern,
membranösen Streifen, welche an jener häutigen Membran, der membrana
asilaris angewachsen, zwischen derselben und einer an der Schneckenwand
efindlichen Membran, der Cortischen Membran ausgespannt sind. Die
Breite der membrana basilaris ist in ihrem Beginn eine geringe, sie wächst,
mehr sie sich der Kuppel der Schnecke nähert bis mehr als zum Zwölf-
chen. Die Membran selbst besteht aus radialen, sie der Breite nach durch-
tzenden ziemlich festen Fasern, welche parallel, in der angegebenen Weise
n Länge wachsend neben einander gelagert sind, und welche in der Längs-
chtung der Membran viel weniger fest mit einander verbunden sind. Durch
ese eigentümliche Struktur, infolge deren die Membran in der Richtung
er Breite sehr viel stärker gespannt ist als in der Richtung der Länge,
rhält sich die membrana basilaris annähernd so, als wären ihre Radial-
sern ein System von gespannten Saiten, deren membranöse Verbindung
ur dazu dient die schwingende Flüssigkeit der Schnecke an dem freien
urchtritt zwischen den Saiten zu hindern, und so zu bewirken, dafs die
chwingungen der Flüssigkeit sich auf die Membran übertragen. Es werden
eshalb die Bewegungen der einzelnen Fasern der Membran dieselben sein,
s wäre jede einzelne unabhängig von den andern und folgte jede für sich
en Schwingungen des Wassers in der Schnecke. Für diese radialen Fasern
er membrana basilaris mit ihren Anhängen, den Cortischen Fasern nimmt
un Helmholtz an, dafs jede für eine bestimmte Schwingungszahl abge-
immt ist. Danach wird ein in das Ohr eindringender Ton namentlich
iejenige Stelle der Membran in Mitschwingungen versetzen, an denen der
igenton der gespannten und mit den verschiedenen Anhangsgebilden be-
steten Radialfasern der Membran dem erregenden Ton am besten ent-
pricht, von da werden sich die Schwingungen in schnell abnehmender
tärke auf die benachbarten Teile ausbreiten. Dafs die Fasern, trotz ihrer

[1]) *Helmholtz,* Tonempfindungen III. Ausgabe p. 198—232.

geringen Länge auf die tieferen Töne der Tonskala abgestimmt sein können, das liegt nach der Annahme von Helmholtz eben in den Anhangsgebilden, welche die Fasern belasten.

Durch die Schwingungen der Radialfasern der Membran werden also direkt die mit denselben verbundenen Cortischen Fasern in dieselben Schwingungen versetzt, und damit die in diesen Fasern befindlichen Nerventeile, welche die Empfindung des Tones vermitteln. Es würde demnach für jeden Ton eine bestimmte oder doch eine beschränkte Zahl von Nervenfasern erregt, so daſs die verschiedenen Töne von ganz verschiedenen Fasern empfunden werden.

Aus dieser Theorie des Hörens, welche dasselbe als einen speciellen Fall des Mittönens auffaſst, erklärt sich zunächst die groſse Empfindlichkeit, welche ein geübtes Ohr für geringe Unterschiede in der Tonhöhe hat, welche nach Angabe von E. H. Weber soweit geht, daſs das Ohr Töne als verschieden erkennt, deren Schwingungsverhältnis 1000 : 1001 ist, eine Angabe, welche Cornu und Mercadier[1]) bestätigen. Dieselben geben an, daſs ein geübtes Ohr bei der tönenden Saite eines Monochordes, welche die Länge von einem Meter hat, deutlich die Verschiebung des Steges um 1^{mm} wahrnehme.

Nach Kölliker enthält nämlich das Ohr etwa 3000 Cortische Fasern. Rechnet man nun etwa 200 auf die Töne, welche auſserhalb der in der Musik gebrauchten Grenzen liegen, so würden für die 7 Oktaven, deren Töne in der Musik benutzt werden, 2800 Fasern übrig bleiben, also etwa 400 für jede Oktave; nach der Angabe von E. H. Weber würde ein geübtes Ohr etwa 700 Tonstufen innerhalb der Oktave zu unterscheiden imstande sein, also eine noch gröſsere Zahl, als der für jede Oktave vorhandenen Anzahl von Cortischen Fasern entspricht. Das liegt nach Helmholtz daran, daſs wenn ein Ton angegeben wird, dessen Höhe zwischen dem zweier benachbarter Cortischer Fasern liegt, daſs dann beide in Schwingungen versetzt werden, diejenige aber stärker, deren Eigenton dem angegebenen näher liegt. Die Empfindlichkeit des Ohres für verschiedene Tonhöhen wird also nur von der Feinheit abhängen, mit welcher der Unterschied der Erregungsstärke der beiden Fasern wahrgenommen werden kann. Dieses Einwirken eines Tones auf mehrere Fasern erklärt es auch, daſs bei kontinuierlich steigender Tonhöhe unsere Empfindung sich kontinuierlich ändert und nicht stufenweise springt, wie es der Fall sein müſste, wenn durch jeden Ton nur eine einzelne Cortische Faser in Schwingung versetzt würde.

Aus dieser Theorie des Hörens ergibt sich weiter, daſs wenn ein zusammengesetzter Klang oder Accord dem Ohre zugeleitet wird, daſs dann alle diejenigen Fasern erregt werden, deren Eigenton in der Klangmasse vorhanden ist. Da somit die Empfindungen örtlich getrennte sind, so muſs bei gehöriger Aufmerksamkeit und Übung das Ohr die einzelnen Töne auch getrennt auffassen können.

Unser Ohr muſs demnach die zusammengesetzten Klänge gerade so in ihre einfachen Bestandteile zerlegen, wie eine Reihe abgestimmter Resonatoren oder Membranen durch die ihnen entsprechenden Töne eines zusammengesetzten Klanges zum Tönen gebracht werden. Das Hören ist, soweit es physikalisch oder physiologisch definierbar ist, ein specieller Fall des Mittönens.

[1]) *Cornu* und *Mercadier*, Comptes Rendus T. LXVIII. p. 301.

§ 175.

Einflufs der Bewegung des tönenden Körpers oder des Ohres uf die Höhe des wahrgenommenen Tones. Wenn wir den durch eine chwingende Bewegung der Luft bestehenden Schall durch die den Nerven uitgeteilten Schwingungen empfinden und die Anzahl der in der Zeiteinheit n das Ohr eindringenden Schwingungen mafsgebend ist für die Höhe des mpfundenen Tones, so mufs es auf die letztere von Einflufs sein, ob der Beobachter und das tönende Instrument sich von einander in einer konstanten Entfernung befinden, oder ob die beiden sich einander nähern oder von einander entfernen.

Doppler[1]) hat diesen Satz näher verfolgt und kommt zu dem Schlusse, lafs wenn der Beobachter und das tönende Instrument sich nähern, der wahrgenommene Ton höher werden mufs, da dann die Eindrücke auf das Ohr sich rascher folgen als im Zustande der Ruhe. Ebenso mufs der Ton iefer werden, wenn der Beobachter und die Tonquellen sich von einander ntfernen, da dann die Zahl der in das Ohr eindringenden Wellen eine leinere wird.

Bezeichnen wir die Länge der Wellen mit l, die Geschwindigkeit des challes in der Luft mit c, diejenige, mit welcher der schwingende Körper ach einer Richtung hin bewegt wird, mit b, so wird nach dieser Richtung in die Länge der Wellen um $\frac{b}{c} \cdot l$ verkürzt, nach der entgegengesetzten eite hin aber um ebensoviel verlängert. Denn hat z. B. der von dem önenden Körper ausgehende Wellenberg um die Länge einer Welle sich rtgepflanzt, so würde bei ruhendem Instrumente der folgende Wellenberg as Instrument verlassen, und da er von derselben Stelle ausgeht, gerade m die Länge einer Welle von dem ersten entfernt sein. Hat sich aber as Instrument während dieser Zeit in der Richtung der vorschreitenden Welle bewegt, so geht der zweite Wellenberg nach derselben Zeit wie vorin von einem dem ersten Wellenberge nähern Orte aus, er ist also von em ersten um weniger als die Länge der Welle bei der Ruhe entfernt, der die Welle wird kürzer. Nach der andern Seite wird sie aber um bensoviel länger.

Ist die Länge der Welle l, so ist die Zeit, während welcher der rste Wellenberg um l sich fortpflanzt, gleich der Schwingungsdauer T, lso, da $l = c \cdot T$,

$$T = \frac{l}{c},$$

nd da wir die Geschwindigkeit des tönenden Körpers mit b bezeichneten, hat sich derselbe in der Zeit T um die Strecke

$$b \cdot T = \frac{b}{c} \cdot l$$

der Richtung der Welle fortbewegt, die Länge der Welle wird also adurch

$$l\left(1 \mp \frac{b}{c}\right) = \frac{c}{n}\left(1 \mp \frac{b}{c}\right),$$

[1]) *Doppler*, Über farbiges Licht der Doppelsterne. Prag 1842.

wenn wir mit n die Schwingungszahl oder was dasselbe ist, die Anzahl der auf die Strecke c kommenden Wellen bezeichnen, wenn das Instrument ruht.

Die an einem ruhenden Ort ankommende Schwingungsanzahl ist nun gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Wellenlänge, also hier gleich

$$\frac{c}{\frac{c}{n}\left(1 \mp \frac{b}{c}\right)} = n \cdot \frac{c}{c \mp b},$$

wo das negative Vorzeichen für die Orte gilt, denen sich das Instrument nähert, und das positive für die, von denen es sich entfernt.

Wenn andererseits der Beobachter sich gegen das ruhende Instrument bewegt mit einer Geschwindigkeit a, so werden in der Zeiteinheit nicht nur die Schwingungen in das Ohr kommen, welche den ruhenden Beobachter treffen, sondern auch diejenigen, welche auf der Strecke a liegen, so dafs die Zahl der wahrgenommenen Schwingungen wird

$$n' = n + \frac{a}{l},$$

und entfernt sich der Beobachter

$$n' = n - \frac{a}{l},$$

oder da $l = \frac{c}{n}$,

$$n' = n \pm \frac{a}{l} = n \cdot \frac{c \pm a}{c}.$$

In jedem Falle wird also die Schwingungsmenge, die das Ohr erhält, beim Annähern von Beobachter und Tonquelle gröfser, beim Entfernen kleiner; findet das Erste statt, mufs der Ton höher, das Zweite, tiefer werden.

Diese Folgerung ist durch die Erfahrung bestätigt.

A. Seebeck[1]) gibt an, dafs er in den Papieren seines Vaters eine dahin gehörige Angabe gefunden habe. Ein Schlitten, wie man sie im Gebirge zum jähen Herabrutschen an Bergabhängen gebraucht, gab dem Beobachter Gelegenheit zu bemerken, dafs der Ton einer Pfeife, die auf dem Schlitten geblasen wurde, beim Vorüberfahren plötzlich tiefer wurde.

Buys Ballot[2]) hat eine ausgedehnte Beobachtungsreihe über diesen Punkt angestellt. Auf der Eisenbahn zwischen Utrecht und Maarsen waren möglichst nahe der Bahn mehrere Musiker aufgestellt, welche die Tonhöhe eines auf einem mit der Lokomotive vorüberfahrenden Signalhorne gegebenen Tones schätzten; ein anderer auf der Lokomotive fahrender Beobachter verglich den Ton der auf den Stationen geblasenen Hörner bei Annäherung und Entfernung der Lokomotive mit dem des mitfahrenden Hornes. Die Geschwindigkeit des Wagens wurde bestimmt, indem nach zwei Chronometern die Zeit aufgeschrieben wurde, welche zum Durchlaufen von 100 Metern gebraucht war.

---

1) *Seebeck*, in Doves Repertorium Bd. VIII. p. 87.
2) *Buys Ballot*, Poggendorffs Annalen. Bd. LXVI.

Die Beobachtungen bestätigen im allgemeinen die Theorie, indem fast mer Veränderungen der Tonhöhe in dem von der Theorie geforderten nne eintraten; eine genaue Übereinstimmung der berechneten Tonänderungen it den beobachteten kann bei solchen Versuchen nicht erwartet werden, o nur eine Schätzung des Beobachters die Änderung der Tonhöhe be-immt.

Dagegen ist es Vogel[1]) gelungen eine volle Bestätigung der Theorie erhalten, indem er den Ton der Dampfpfeife einer Lokomotive benutzte nd mit Hülfe eines Musikers genau die Tonhöhe bestimmte, wenn die okomotive mit konstanter Geschwindigkeit sich ihm näherte und dann ach dem Vorüberfahren sich entfernte. Die Änderung der Tonhöhe ent-prach mit einer merkwürdigen Genauigkeit der Dopplerschen Theorie.

Man kann die Erscheinung des Mittönens benutzen, wie zuerst . Mayer[2]) gezeigt hat, um zu beweisen, daſs in der That die Änderung er Tonhöhe gerade die von der Theorie verlangte ist. Man nimmt zwei enau gleiche Stimmgabeln etwa c_2, 512 Schwingungen gebend; streicht an die eine an, so tönt die andere kräftig mit. Verstimmt man die ne, etwa durch Überziehen eines leichten straffen Kautschukringes, so aſs sie in der Sekunde zwei Schwingungen weniger macht, so tönt die ndere Gabel nicht mehr mit, wenn man die verstimmte anstreicht. Stellt an sich dann aber mit der verstimmten Gabel in einiger Entfernung von er nicht verstimmten auf, bringt erstere zum Tönen, und bewegt sich dann it der verstimmten tönenden Gabel mit der konstanten Geschwindigkeit n etwa 1,2 Meter gegen die andere hin, so kommt dieselbe wieder zum önen. Stellt man die verstimmte Gabel auf, so muſs man, um dieselbe zum ittönen zu bringen, die nicht verstimmte mit derselben Geschwindigkeit tfernen. Wenn man dagegen die zweite Gabel nicht verstimmt, so tönt e erste nicht, wenn man mit der tönenden Gabel sich mit der gleichen eschwindigkeit nähert oder entfernt. Daſs diese Bewegungsgeschwindig-it der Dopplerschen Theorie entspricht, ergibt sich leicht. Es müssen n der verstimmten Gabel her in der Sekunde 512 Schwingungen zur cht verstimmten Gabel gelangen, während sie selbst in der Sekunde 510 hwingungen macht. Die Geschwindigkeit b, mit der sie der nicht ver-immten Gabel genähert werden muſs, ergibt sich somit aus

$$512 = 510 \cdot \frac{c}{c - b} \cdot$$

Setzen wir die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft bei gewöhn-cher Temperatur rund $c = 340^{m}$, so wird

$$b = 1{,}21^{m},$$

ie es vorhin angegeben wurde. Man kann so die Richtigkeit des Doppler-hen Satzes sogar objektiv sichtbar machen, wenn man die Schwingungen er Gabel auf die eine oder andere Weise sichtbar macht.

1) *H. C. Vogel*, Poggend. Ann. Bd. CLVIII.
2) *A. M. Mayer*, Poggend. Ann. Bd. CXLVI.

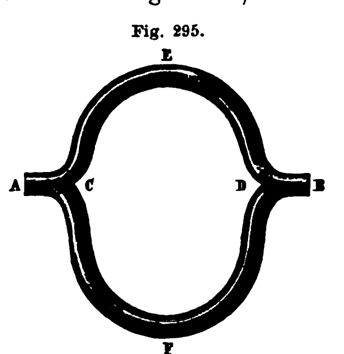
§ 176.

Interferenz des Schalles. Wenn sich nach einer und derselben Richtung zwei Schallwellen gleicher Länge fortpflanzen, so mufs nach der Natur der Wellenbewegung die Resultierende aus den beiden Schallwellen abhängen von der Phasendifferenz, mit welcher die beiden Wellen zusammentreffen.

Treffen zwei Schallwellen ohne Phasendifferenz zusammen, so müssen sie sich verstärken, treffen sie dagegen mit einer Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge zusammen, so müssen sie sich aufheben. Dafs letzteres in der That der Fall ist, davon kann man sich durch einen einfachen Versuch überzeugen. Bringt man eine Klangscheibe zum Tönen, so dafs das diagonale Kreuz entsteht, so schwingen die neben einander liegenden Quadranten gleichzeitig nach entgegengesetzten Richtungen, indem, wie wir sahen, die Knotenlinien zwei in entgegengesetzter Phase befindliche Teile der Scheibe trennen. Führt man nun eine solche tönende Scheibe am Ohre vorüber, so verschwindet der Ton jedesmal, wenn das Ohr sich vor einer Knotenlinie befindet. Von dem einen Quadranten wird dann ein Wellenberg ins Ohr gesandt und zugleich von dem andern ein Wellenthal, die Bewegung des Trommelfelles ist daher infolge der einen Welle die entgegengesetzte derjenigen der andern Welle, die Bewegung und somit der Schall hört auf.

Diesen Fall der Interferenz von Schallwellen hat Hopkins[1]) auf sehr einfache Weise sichtbar gemacht. Er stellte eine Röhre von Pappe oder Holz her, welche unten gabelförmig in zwei Röhren endigte, und deren oberes Ende mit einer feinen Membran überspannt war. Bestreut man die Membran mit etwas trocknem Sand und hält die Röhre so über eine tönende Klangscheibe, dafs die beiden offenen Enden der Gabel sich über zwei neben einander liegenden Quadranten der Scheibe befinden, so gerät die oben über die Röhre gespannte Membran nicht in schwingende Bewegung, der Sand bleibt ruhig, hält man aber die offenen Enden der Gabel über gegenüberliegende Quadranten, so gerät der Sand in hüpfende Bewegung. Im ersten Falle gehen von den beiden Quadranten zugleich entgegengesetzte Bewegungen in die Röhre, dieselben heben sich auf, im letzten Falle aber gleichgerichtete, sie verstärken sich.

Fig. 295.



In anderer Weise hat Nörremberg[2]) die Interferenz der Schallwellen gezeigt. Ein verzweigtes Rohr von der Form Fig. 295 wurde in eine Wand eingemauert, und auf der einen Seite der Wand ein Ton erzeugt, der nur durch die Luft des Rohres in den durch die Wand abgetrennten Raum eindringen konnte. Wurde eine der beiden Röhren verstopft, so drangen alle Töne durch das Rohr hindurch, wurden aber beide geöffnet, so blieben alle Töne aus, für welche die Differenz der Röhrenlängen ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge war.

---

[1]) *Hopkins*, Poggend. Ann. Bd. XLIV.

[2]) *Müller-Pouillet*, Lehrbuch der Physik. Braunschw. 1856. p. 382. Diese Methode ist vorgeschlagen von J. F. W. Herschel, Philosophical Magazin, 3. ser. T. III. 1833. Poggend. Ann. Bd. XXXI.

Eine sehr bequeme Form, welche zu einer Reihe verschiedener Versuche brauchbar ist, hat Quincke[1]) dem eben besprochenen Interferenzapparat gegeben. Fig. 296 gibt eine dieser Formen, Fig. 297 eine andere. Die erste in den gleich anzugebenden Dimensionen löscht den Ton a_1 (440 Schwingungen) und alle seine ungeraden Vielfachen aus. Zwei T-förmige Glasröhren CAC_1 und CBC_1 sind an den Enden rechtwinklig umgebogen und bei C durch einen kurzen, bei C_1 durch einen langen Kautschukschlauch verbunden. Gibt man dem letztern eine Länge von etwa 390^{mm}, so entspricht er einer halben Wellenlänge des Tones a_1 in Luft. Das mit einem kurzen Kautschukschlauch versehene Ende A des Apparates setzt man in den äufsern Gehörgang des einen Ohres, verstopft das andere mit einem Siegellackpfropf und läfst den Klang der Stimmgabel durch den langen Kautschukschlauch BB_1 und die verzweigte Röhrenleitung ins Ohr gelangen,

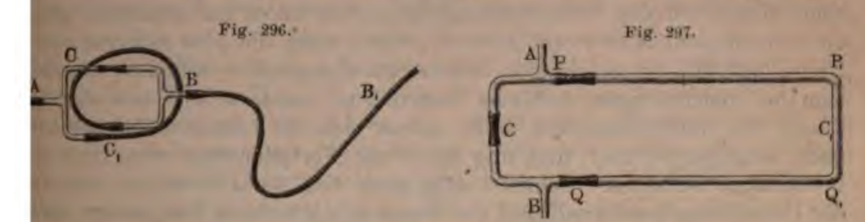


Fig. 296. Fig. 297.

indem man die Zinken der angeschlagenen Gabel vor das offene Ende B_1 des Schlauches hält, oder auch den Stiel der Gabel in den Schlauch steckt und die Gabel anschlägt. Die dem Grundton der Gabel entsprechenden Wellen löschen sich dann bei B aus, und man nimmt ihn nicht wahr. Drückt man aber bei C oder C_1 den Kautschukschlauch zu, so dafs die Welle nur durch ein Rohr dringen kann, so tritt der Ton kräftig in das Ohr hinein.

Der Apparat Fig. 297 unterscheidet sich von dem eben besprochenen dadurch, dafs der lange Kautschukschlauch durch das Glasrohr PP_1Q_1Q ersetzt ist; indem man eine Reihe solcher Röhren herstellt, die an Stelle dieses mit dem Stücke BCA verbunden werden, kann man die Interferenzröhre für eine ganze Anzahl von Tönen stimmen.

Von den mannichfachen Versuchen, zu welchen diese Röhren dienen können, erwähnen wir hier nur die Beobachtung der Klangfarbe. Eine solche Röhre löscht nicht nur einen bestimmten Ton aus, sondern auch alle seine ungeradzahligen Obertöne; deshalb löscht eine solche Röhre den Klang einer gedeckten Orgelpfeife ganz aus, es bleibt nur das Blasegeräusch zurück, bei einer offenen Orgelpfeife dagegen ändert sie nur den Klang, da die geraden Partialtöne des Klanges nicht ausgelöscht werden. Man kann deshalb durch eine solche Röhre sofort erkennen, ob in einem Klange nur ungerade, oder ob auch gerade Partialtöne in ihm enthalten sind.

Eine sehr instruktive Einrichtung hat König diesen Interferenzröhren gegeben, indem er sie mit seinen manometrischen Flammen in Verbindung setzte. An die Stelle des Ohres bei der Quinckeschen Einrichtung treten

[1]) *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXVIII.

die § 160 (Fig. 262) erwähnten kleinen Kapseln mit den Flammen. Königs Interferenzröhre ist posaunenartig eingerichtet. Ist die Röhre ganz zusammengeschoben, so sind beide dem eindringenden Tone offene Wege ganz gleich, er dringt in die Kapsel ein und setzt die Flamme in Vibration; zieht man nun die eine Hälfte aus, so wird der eine Weg des Tones länger, und ist er gleich $\frac{1}{2}$ Wellenlänge, so heben sich die Schwingungen in der Kapsel auf, und die Flamme brennt ruhig. Indem man auf diese Weise die Länge der Welle eines Tones von bekannter Schwingungszahl messen kann, liefert der Apparat sogar ein sehr bequemes Mittel, die Geschwindigkeit des Schalles zu bestimmen.

Interferenz des Schalles durch gleichzeitiges Aussenden entgegengesetzt gerichteter Impulse von zwei naheliegenden Orten hat Seebeck[1]) mittels der Sirene sehr deutlich nachgewiesen. Richtet man gegen eine Löcherreihe einer Sirene von den beiden entgegengesetzten Seiten her senkrecht gegen die Scheibe zwei Röhren und zwar so, dafs, wenn die eine sich vor einem Loche befindet, die andere sich dem nächsten gegenüber befindet, so erhält man bei gleichzeitigem Anblasen keinen Ton, sondern hört nur das Geräusch der durchströmenden Luft, indem sich die beiden Stöfse der Luft nach entgegengesetzter Richtung bei ihrer Fortpflanzung zum Ohre des Beobachters aufheben. Schliefst man aber eine der Röhren, so tritt der der Umdrehungsgeschwindigkeit der Sirene entsprechende Ton hervor. Stellt man die Röhren aber so, dafs die Stöfse alternierend erfolgen, so also, dafs der Abstand der Röhren gleich dem halben Abstande der Löcher ist, so hört man denselben Ton, nur viel stärker.

Wenn man auf einer Scheibe konzentrisch zwei Löcherreihen anbringt, von denen die eine doppelt so viel Löcher hat, als die andere, so gibt diese die Oktave von dem Tone der letztern, und man hört, wenn beide gleichzeitig und gleichseitig angeblasen werden, in der Regel beide Töne zugleich.

Geschieht jedoch das Anblasen von beiden Seiten her und zwar so, dafs jeder Luftstrom des tiefern Tones mit einem Luftstrome des höhern Tones zusammenfällt, so verschwindet der höhere Ton ganz und man hört nur den tiefern.

Es werden in diesem Falle die abwechselnden Impulse des höhern Tones durch die gleichzeitigen des tiefern aufgehoben und die Hälfte der Impulse des höhern Tones erzeugt den tiefern Ton.

Eine sehr interessante Interferenz des Schalles ist von W. Weber bei transversalschwingenden Stäben und Stimmgabeln beobachtet[2]) und später von Kiessling genauer untersucht[3]). Gehen von zwei Punkten A und B (Fig. 298), deren Abstand in Bezug auf die Länge der Schallwellen nicht verschwindend klein ist, gleichzeitig Verdichtungen und Verdünnungen aus, so werden sich diese rings um A und B und zwar, wenn wir nur eine durch A und B gelegte Horizontalebene betrachten, kreisförmig ausbreiten. Die gleichzeitig von A und B ausgehenden Kreise werden sich dann in Punkten

---

[1]) *A. Seebeck*, Doves Repertorium Bd. VI.

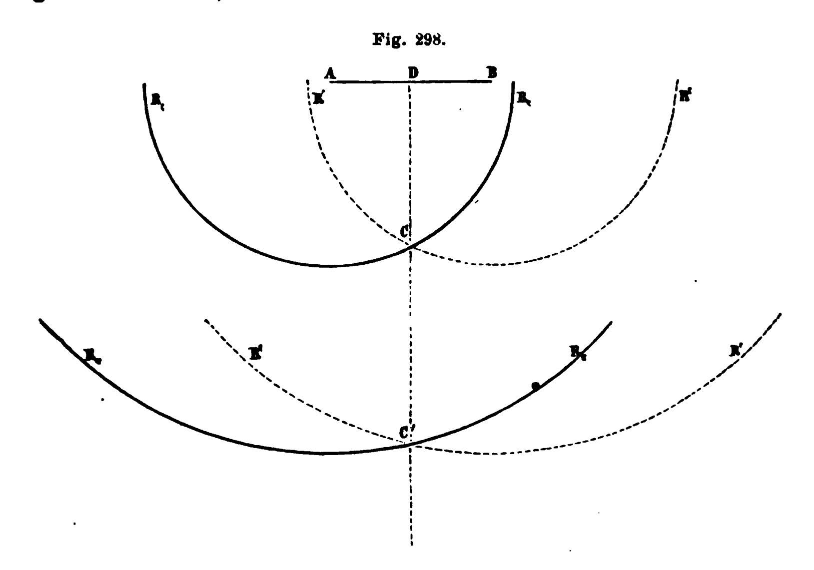
[2]) *W. Weber*, O. C. S. Schweigger und Schweigger-Seidel Jahrbuch für Chemie und Physik Bd. XLVIII (18).

[3]) *Kiessling*, Poggend. Ann. Bd. CXXX.

C, C' schneiden, welche in einer zu AB senkrechten, in der Mitte von D errichteten Linie liegen. Die in der Nähe dieser Linie liegenden Luftteilchen werden dann gleichzeitig immer von einem von A ausgehenden Wellenberge und von B ausgehenden Wellenthale getroffen, sie werden daher immer in Ruhe sein, auf der ganzen Linie CD mufs der Schall verschwinden.

Wie Kiessling durch genaue Messungen konstatiert hat, findet eine solche Interferenz bei jedem parallelepipedischen in transversale Schwingungen versetzten Stabe statt; es tritt dort die Interferenz in einer durch die Axe des Stabes gelegten nahezu zur Schwingungsrichtung senkrechten Ebene auf. Um sie zu beobachten nimmt man am besten einen Stab von rechteckigem Querschnitt, dessen Seiten ziemlich von einander verschieden sind,

Fig. 298.



damit der Stab parallel der einen Seite schwingend einen wesentlich andern Ton gibt als parallel der andern Seite schwingend. Ein solcher Stab ist einem nahezu quadratischen vorzuziehen, weil, wenn man den Stab parallel einer Seite in Schwingungen versetzt, auch immer Schwingungen parallel der andern Seite auftreten. Ist nun die Dicke des Stabes nach beiden Richtungen nahe dieselbe, so ist der Ton für beide Schwingungsrichtungen auch nahe gleich, und die Beobachtung wird dann durch die im nächsten Paragraphen zu besprechenden Stöfse gestört und unsicher. Man hängt den Stab in zwei Knoten auf und bringt ihn durch Streichen mit dem Bogen parallel einer Seite zum Schwingen. Man führt dann in das eine Ohr, während das andere fest verschlossen ist, einen Kautschukschlauch, dessen anderes Ende gerade, das heifst senkrecht zur Schlauchaxe abgeschnitten ist. Führt man dieses Ende des Schlauches in einiger Entfernung vom Stabe in einer der Schwingungsrichtung parallelen Richtung an dem Stabe vorüber, so verschwindet der Ton vollständig, sobald die Mitte der untern Schlauchöffnung sich gerade in der durch CD (Fig. 298) und *die Stabaxe gelegten Ebene* befindet. Wie Kiessling angibt, läfst sich

die Lage der Interferenzebene auf diese Weise sehr genau feststellen, da schon eine Verschiebung des Schlauchendes um 0,1mm genügt, um den Ton wieder hörbar zu machen.

Am leichtesten lassen sich diese Interferenzen an einer Stimmgabel beobachten. Dreht man eine solche sehr rasch vor dem Ohre um den Stiel derselben als vertikale Axe herum, so hört man den Ton entsprechend den 4 Interferenzflächen J_1 J_2 J_3 J_4 (Fig. 299), viermal verschwinden. Eine genauere Untersuchung der Interferenzflächen in diesem Falle hat Kiesslin g ergeben, dafs sie hyperbolisch gekrümmt sind, infolge der Reflexionen, welche die von den inneren Seiten der Zinken ausgehenden Schwingungen an der andern Zinke erfahren, und weil die Bewegung der Luft an der einen Zinke auch durch jene von der andern Zinke erregten beeinflufst wird. Umgibt man die eine Zinke mit einer möglichst engen Glasröhre, so dafs die Bewegung dieser Zinke sich der umgebenden Luft nicht mitteilt, und wegen der starken Krümmung der Glasröhre keine merkliche Reflexion der Wellen zu den von der andern Zinke erregten Schwingungen eintritt, so finden die Interferenzen wieder in einer Ebene statt. Bringt man dann aber zwischen den beiden Zinken eine ebene Glasplatte an, so dafs eine Reflexion der von der einen Zinke erregten Welle an derselben stattfindet, so tritt die Krümmung wieder hervor, ein Beweis, dafs die Krümmung der Interferenzfläche eine Folge der Durchkreuzung teils der reflektierten mit den direkt erregten, teils der von der andern Zinke herrührenden mit den von der einen Zinke erregten Schwingungen ist.

Fig. 299.



§ 177.

Interferenz von Wellen ungleicher Länge. Stöfse. In dem vorigen Paragraphen haben wir das Zusammentreffen zweier Wellenzüge gleicher Periode betrachtet und haben gesehen, wie dadurch die den einzelnen Wellenzügen entsprechenden Töne verstärkt oder geschwächt, oder selbst unterdrückt werden, je nach der Phasendifferenz, mit welcher die Wellenzüge gleichzeitig in unserem Ohre ankommen. Die Resultierende dieser Interferenzen war aber eine stetig sich gleich bleibende, die Verstärkung oder Schwächung des Tones dauerte in ganz gleicher Weise fort, so lange die einzelnen Töne fortdauerten, da die Wellen von gleicher Geschwindigkeit und Länge mit konstanter Phasendifferenz immer an einem und demselben Orte ankommen.

Wie zwei Wellenzüge gleicher Länge, so können auch zwei Wellenzüge verschiedener Länge mit einander interferieren, jedoch ist das Resultat der Interferenz ein wesentlich anderes, viel komplicierteres als in dem vorigen Falle.

Werden nämlich an einem und demselben Orte zwei Töne mit verschiedener Schwingungszahl erregt, so tritt in diesen nicht immer zu-

gleich Wellenberg oder Wellenthal auf, sondern in beiden Tönen zu verschiedenen Zeiten, da sie in dem einen Tone rascher auf einander folgen als in dem andern. Gibt der höhere Ton in der Sekunde z. B. eine Schwingung mehr, und nehmen wir an, dafs beim Beginne die Schwingungen beider genau gleichzeitig waren, so werden allmählich die Schwingungen des tiefern Tones gegen diejenigen des höhern zurückbleiben; nach einer halben Sekunde wird der tiefere Ton gerade ein Thal aussenden, wenn der höhere einen Wellenberg aussendet. Nach einer weitern halben Sekunde wird der tiefere Ton um noch eine halbe Schwingung zurückbleiben, so dafs am Ende der ersten Sekunde wieder Wellenberg und Wellenberg zusammentreffen.

Zwei derartige Wellen können sich daher nicht dauernd schwächen oder dauernd stärken, da die Schwingungen nicht gleichzeitig gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, sondern bald gleichgerichtet, bald entgegengesetzt gerichtet sind. Das Ohr eines Beobachters wird daher abwechselnd, wenn zugleich die Wellenberge oder die Wellenthäler das Ohr treffen, die Summe der Impulse der einzelnen Wellen erhalten, oder wenn ein Wellenberg und ein Wellenthal zusammentreffen, die Differenz der Impulse. Während demnach das Ohr beide Töne wahrnimmt, wird es zugleich von Zeit zu Zeit Verstärkungen und Schwächungen des Tones wahrnehmen müssen.

Die Erfahrung bestätigt diese Schlüsse vollkommen, denn läfst man zugleich zwei Töne, die nahezu gleich gestimmt sind, ansprechen, so hört man während des Tönens von Zeit zu Zeit deutliche Schläge, indem die Intensität des Tones abwechselnd gestärkt und geschwächt wird.

Diese Schläge nennt man Stöfse oder Schwebungen. Beträgt der Unterschied der Schwingungszahlen in der Sekunde eins, so fällt am Anfange jeder Sekunde Wellenberg und Wellenberg zusammen, wir werden daher in jeder Sekunde eine Verstärkung des Tones, einen Stofs wahrnehmen. Ist der Unterschied der Schwingungszahlen gleich zwei, so wird bei gleichzeitigem Anfang beider Töne nach der ersten Viertelsekunde der höhere Ton dem tiefern um $\frac{1}{2}$, nach einer halben Sekunde um eine ganze Oscillation vorgeeilt sein. Schon nach einer halben Sekunde werden also dann wieder zwei Wellenberge zusammentreffen, wir werden in der Sekunde zwei Stöfse wahrnehmen.

Dafs die Zahl der Stöfse überhaupt gleich der Differenz der Schwingungen derjenigen Töne sein mufs, aus denen sie entstehen, entwickelt Hällström[1]) in folgender Weise. Seien r und s die Schwingungen der angestimmten Töne in der Sekunde, und x die Anzahl der Stöfse. In der Zeit $\frac{1}{x}$ entsteht dann ein Stofs, und in dieser Zeit macht der Ton mit der Schwingungszahl r, $\frac{r}{x}$, der andere Ton $\frac{s}{x}$ Schwingungen, da r und s die Schwingungszahl in der Zeit 1 ist.

In derselben Zeit aber, in welcher durch das Zusammenwirken der Schwingungen ein Stofs entsteht, mufs, wie wir vorhin erwähnten, der höhere Ton eine Schwingung mehr vollführen, oder es mufs

$$\frac{s}{x} - \frac{r}{x} = 1,$$

$$s - r = x$$

1) *Hällström*, Poggend. Ann. Bd. XXIV.

oder allgemein die Anzahl der Stöfse in einer Sekunde mufs gleich der Differenz der Schwingungszahlen beider Töne sein.

Man hat vielfach darüber gestritten, ob die Stöfse nur subjektiver Natur seien, das heifst, ob sie nur im Ohre durch Zusammentreffen der einzelnen Impulse entständen, oder ob sie objektiver Natur seien, das heifst, ob wirklich an den Interferenzstellen eine stärkere Bewegung der Luftteilchen vorhanden sei. Ein einfacher vom Orgelbauer F. Lange[1]) in Berlin konstruierter Apparat beweist jedoch die objektive Natur der Stöfse auf das entschiedenste. Lange brachte in den Fufs einer Zungenpfeife mit gläserner Wand zwei Rohrwerke und setzte auf jedes eine Pfeife, so dafs er zwei Zungenpfeifen erhielt, die durch denselben Luftstrom angeblasen wurden. Die Pfeifen werden nahe gleich gestimmt, so dafs die Stöfse sich sehr langsam folgen. Bei Betrachtung der Zungen sieht man dann, wie die Exkursion derselben bei jedem Stofse um vieles bedeutender ist als sonst; ein direkter Beweis, dafs die den Stofs erzeugenden Impulse in der That sich zu gröfsern Schwingungen summieren, dafs die Stöfse nicht subjektiver, sondern objektiver Natur sind.

König[2]), der in einer ausgedehnten Untersuchung, bei welcher er zur Tonerzeugung, um einfache Töne zu erhalten, nur Stimmgabeln benutzte, die Zahl der von zwei Tönen gegebenen Stöfse innerhalb der ganzen Skala der Tonleiter bestimmte, gelangt in Bezug auf die Stöfse zu einem etwas andern Resultat, er glaubt, dafs nicht nur Stöfse entstehen, welche gleich der Differenz der Schwingungszahl der Töne sind, sondern dafs, wenn man sich einem harmonischen Intervall nähert, auch Stöfse auftreten, gerade als wenn der Grundton von dem betreffenden Obertone begleitet wäre. Gehen wir also von einem Tone aus, der etwa 64 Schwingungen macht, $C = c_{-1}$, und nehmen eine zweite Gabel, deren Töne wir durch Laufgewichte, die an den Zinken verschiebbar sind, allmählich bis zur doppelten Schwingungszahl erhöhen können, so hört man zunächst die Stöfse gleich der Differenz der Schwingungszahl, die bis zu 10, entsprechend 74 Schwingungen der zweiten Gabel, einzeln hörbar sind. Bei weiterer Steigerung der Tonhöhe der zweiten Gabel hört man die Stöfse als Rollen. Nähert sich die zweite Gabel der Quint, so geht nach Königs Bezeichnung das Rollen in ein verworrenes Rasseln über, wie wenn zu den bisher gehörten Stöfsen auch solche mit der Oktave des Grundtones hinzukämen. Geht man über die Quint hinaus, so dauert dieses Rasseln zunächst fort, zwischen der Sext und Septime geht dasselbe wieder in Rollen über, und bei der Septime, die 120 Schwingungen entspricht, hört man wieder einzeln 8 Stöfse, also die Zahl der Stöfse, welche der Differenz der Schwingungen mit der Oktave des andern Stimmgabeltones entsprechen. Nähert sich der Ton der Oktave, so nimmt dem entsprechend die Zahl der Stöfse ab, bis sie bei der Oktave verschwinden. König nimmt somit an, dafs nicht nur zwei dem Einklange nahe Töne Stöfse geben, die der Differenz ihrer Schwingungen entsprechen, sondern auch Töne, die nahe im Verhältnisse 1 : 2, ebenso auch 1 : 3, 1 : 4 u. s. w. stehen, gerade so, wie wenn der tiefere Ton von den betreffenden Obertönen begleitet wäre.

[1]) Der Apparat wurde mir von Herrn *Lange* im Jahre 1857 zu Berlin gezeigt; er ist in manche Kabinette übergegangen.

[2]) *König*, Poggend. Ann. Bd. CLVII.

König ist auch der Ansicht, daſs sich diese Stöſse aus der Zusammen-
tzung der Schwingungen der beiden Töne ableiten lassen, eine Auffassung,
er ich mich jedoch nicht anschlieſsen kann.

Helmholtz[1]) sieht diese von König als obere bezeichneten Stöſse als
lche an, die in der That mit den betreffenden Obertönen des Grundtones
bildet werden, indem er darauf hinweist, daſs bei den kräftigen von König
gewandten Schwingungen der Gabeln die Obertöne auftreten müssen.
ei einer Gabel, die 64 Schwingungen in der Sekunde machte, konnte er
it geeigneten Resonatoren die Obertöne bis zum fünften hören, wenn die
abel stark angeschlagen war; die Zinken machten dann Schwingungen, deren
mplitude 1 Centimeter betrug. Bei so groſser Breite der Schwingungen
nes scharfkantigen Körpers, wie es die Gabelzinken sind, müssen in der
ngebenden Luft Wirbelbewegungen entstehen, die erheblich von dem Ge-
tze der einfachen Schwingungen abweichen, und deshalb in ähnlicher Weise
e Obertöne hervorrufen, wie es die schwingenden Zungen thun. Daſs
s Auftreten der Obertöne durch derartige Störungen der einfachen Be-
egungen infolge der groſsen Amplituden bedingt ist, ergibt sich auch
raus, daſs sie bei dem Austönen der Gabel viel früher als der doch auch
r sehr schwach hörbare Grundton der Gabel verschwinden, da bei dem
ustönen der Gabel die Schwingungen kleiner und kleiner werden und dann
e Luft nur mehr nach ihrer eigenen Periode in Bewegung versetzen.

Eine sehr wichtige Anwendung der Stöſse rührt von Scheibler[2]) her,
mlich ihre Anwendung zum reinen Stimmen zweier Töne und zur Be-
immung ihrer absoluten Schwingungszahl. Wie ersteres, was ein mehr
aktisches Interesse hat, geschehen kann, sieht man leicht, da die Stöſse
ch um so langsamer folgen, je näher die Töne gleich gestimmt sind, je
ringer ihr Schwingungsunterschied ist. Jedem Ton entspricht ein tiefer
gender und ein höher liegender, der mit ihm in der Sekunde eine genau
stimmte Zahl z. B. vier Stöſse gibt. Dies benutzte Scheibler folgender-
aſsen. Eine Stimmgabel gibt z. B. a_1 an, er stellt dann eine Stimmgabel
r, die einen etwas tiefern Ton hat und mit der a_1-Gabel genau vier
öſse in der Sekunde gibt. Um nun die Saite eines Monochords genau auf
zu stimmen, wird sie mit der tiefern Gabel verglichen und so gespannt,
ſs sie mit derselben vier Stöſse gibt. Der Ton der Saite ist dann genau
s eingestrichene a_1.

Um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, wandte
heibler zwei Methoden an. Die erste Methode bestand in Folgendem.

Auf einem Monochord wurde eine Saite aufgespannt, welche genau den
n einer a_1-Gabel angab und die Länge der Saite in 2000 Teile geteilt.
er eine Steg der Saite war verschiebbar, so daſs die Saite verlängert
ler verkürzt werden konnte. In beiden Fällen gab der Ton der Saite mit
m der Gabel Stöſse. Scheibler bestimmte nun mit gröſster Genauigkeit,
n wieviel die Saite verlängert oder verkürzt werden muſste, damit sie mit
r Gabel genau vier Stöſse in einer Sekunde gab. Die Stellen, wo der
eg sich dann befindet, nannte er Nebenstellen.

---

[1]) *Helmholtz*, Tonempfindungen, IV. Ausgabe p. 263.
[2]) *Röber in Doves* Repertorium. Bd. III. Poggend. Ann. Bd. XXXII.

Da die Anzahl der Stöfse gleich ist dem Unterschiede der Schwingungszahlen der beiden Töne, so ist, wenn wir die Schwingungszahl der a_1-Saite mit x bezeichnen, die Schwingungszahl der bis zur tiefern Nebenstelle verlängerten Saite $x - 4$, der bis zur höhern Nebenstelle verkürzten $x + 4$. Ist die Saite bis zur tiefern Nebenstelle um a länger, bis zur höhern um b kürzer, so ist nach den Schwingungsgesetzen der gespannten Saiten

$$x : x - 4 = 2000 + a : 2000$$

und

$$x : x + 4 = 2000 - b : 2000,$$

oder

$$x : 4 = 2000 + a : a$$

und

$$x : 4 = 2000 - b : b.$$

Jede der beiden Gleichungen gibt uns x, so dafs wir durch zwei solche Versuche eine Kontrole des aus einem gefundenen Wertes haben.

Bei den Versuchen mit seiner Stimmgabel fand Scheibler $a = 18,2$, und daraus

$$x = 443,56$$

als Schwingungszahl seiner a_1-Stimmgabel.

Die andere Zählung der absoluten Schwingungszahl geschieht nur durch Beobachtung der Stöfse. Ihr Princip ist folgendes. Die Anzahl der Stöfse gibt uns den Unterschied der Schwingungszahl beider Töne. Kennen wir das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen, so können wir aus beiden, dem Verhältnis und der Differenz der Schwingungszahlen beide berechnen.

Nun geben zwei mefsbar verschiedene Töne jedoch keine Stöfse, sondern Kombinationstöne. Um daher den Schwingungsunterschied zweier Töne zu erhalten, wandte Scheibler Zwischentöne an. Er stellte eine Reihe von Stimmgabeln her, deren Töne möglichst genau nach der gleichschwebenden Temperatur gestimmt, die chromatische Tonleiter von a gaben. Dann verfertigte er eine Anzahl sogenannter Zwischengabeln, deren Töne zwischen je zweien der chromatischen Tonleiter lagen, deren jede mit der nächst tiefern und der nächst höhern eine messbare Anzahl von Stöfsen gab. So z. B. verfertigte er zwei Gabeln, deren erste einen Ton gab etwas höher als a, deren zweite einen Ton gab etwas tiefer als *ais*. Die erste gab mit a in der Minute 272,4 Stöfse, die zweite mit der ersten in der Minute 270,8 Stöfse und mit der *ais*-Gabel 240 Stöfse.

Ist demnach die Schwingungszahl von $a = x$, so ist die Schwingungszahl der ersten Zwischengabel $x + 4,54$, die der zweiten, welche mit der ersten in der Minute 270,8, in der Sekunde daher 4,52 Stöfse gab, gleich $x + 4,54 + 4,52$ und die der *ais*-Gabel $x + 13,06$.

In der temperierten Skala ist die Schwingungszahl von *ais*

$$x' = x \sqrt[12]{2} = x \cdot 1,059\,46.$$

Zur Berechnung von x und x' haben wir daher

$$\frac{x'}{x} = 1{,}059\,46,$$

$$x' - x = 13{,}06,$$

$$13{,}06 + x = 1{,}059\,46\,x,$$

$$x = \frac{13{,}06}{0{,}05946} = 219{,}6.$$

Um aber noch genauere Resultate zu erhalten, schritt Scheibler in dieser Weise durch die ganze Tonleiter fort und bestimmte den Schwingungsunterschied zwischen a und a_1. Er fand, wenn wir die Schwingungszahl des Tones a_1 mit x_1 bezeichnen,

$$x_1 - x = 219{,}666\,7.$$

Nun ist aber zugleich

$$x_1 = 2x$$

und demnach

$$x = 219{,}666,$$

$$x_1 = 439{,}333.$$

Diese Methode, die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, ist zwar etwas mühsam, aber in den Händen eines geschickten Experimentators wohl die genaueste, da man hier keinerlei störenden Einfluſs zu befürchten hat.

§ 178.

Kombinationstöne. Wenn man zwei musikalische Töne verschiedener Höhe gleichzeitig und kräftig tönen läſst, so nimmt man, wenn das Intervall derselben nicht zu klein ist, im allgemeinen keine Schwebungen wahr, es tritt dann aber eine andere Einwirkung des gleichzeitigen Tönens, ein neuer Ton, der sogenannte Kombinationston hervor, Töne, welche zuerst von Sorge[1]) beobachtet und später von Tartini allgemeiner bekannt gemacht sind, nach welchem sie auch wohl den Namen Tartinischer Töne führen.

Wie die Zahl der Schwebungen gleich der Differenz der Schwingungszahl der sie bildenden Töne ist, so ist auch die Schwingungszahl dieser Kombinationstöne gleich der Differenz in der Schwingungszahl der Töne, aus denen sie hervorgehen. So entsteht z. B. aus Grundton und Quinte als Kombinationston die tiefere Oktave des Grundtones; da die beiden Töne die Schwingungszahlen 2 und 3 haben, so ist ihre Differenz gleich 1, also der halben Schwingungszahl des Grundtones oder die Schwingungszahl der tiefern Oktave. Aus Grundton und Terz, welchen die Schwingungszahlen 4 und 5 entsprechen, bildet sich der Kombinationston 1, also die zweittiefere Oktave des Grundtones, aus Grundton und Quarte, welche dem Verhältnis 3 und 4 entsprechen, die Unterquint der tiefern Oktave, oder die zweittiefere Oktave der Quarte.

Läſst man anstatt zweier einfacher Töne zwei zusammengesetzte Klänge gleichzeitig ertönen, so liefern nicht nur die Grundtöne, sondern auch die harmonischen Obertöne mit einander und mit den Grundtönen Kombinations-

[1]) *Sorge.* Man sehe *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 228.

töne nach demselben Gesetze. Sind die Schwingungszahlen der Grundtöne r und s, so sind die harmonischen Obertöne $2r, 3r \ldots 2s, 3s \ldots$ und das Schema der sich bildenden Kombinationstöne ist folgendes:

r	und	s	geben	$s - r$
$2r$	„	s	„	$2r - s$
$2s$	„	r	„	$2s - r$
$2s$	„	$2r$	„	$2s - 2r$.

So geben Grundton und Terz, 4 und 5, mit ihren Obertönen die Kombinationstöne 1, 3, 6, 2 etc., von denen der Ton 3 oft sehr deutlich zu hören ist.

Aber auch bei einfachen Tönen können solche mehrfache Kombinationstöne auftreten, gerade als wenn die entstehenden Kombinationstöne mit einander und den primären Tönen wieder Kombinationstöne lieferten. Folgendes Schema stellt die so möglichen Töne dar.

Ursprüngliche Töne	Kombinationstöne	
r, s	$s - r$	erster
$s - r, r$	$2r - s$	zweiter
$2r - s, s$	$2s - 2r$	dritter
$2r - s, s - r$	$3r - 2s$	vierter u. s. f.

$s - r$ und r sowie $2r - s$ und r geben keine neuen Töne, sondern die schon vorhandenen r und $s - r$.

Die Kombinationstöne lassen sich am besten beobachten, wenn die komponierenden Töne ein und dieselbe Luftmasse in heftige Erschütterung versetzen, deshalb ganz besonders, wenn man eine mit mehreren Löcherreihen versehene Sirene auf einen Windkasten setzt und gleichzeitig zwei Löcherreihen anbläst.

Man hört nur einen Ton, wenn man eine Löcherreihe anbläst; sobald man die zweite, wie das bei der mit einem Duraccord versehenen Doveschen Sirene sehr leicht geht, öffnet, hört man aufser dem zweiten Tone noch eine Reihe von Kombinationstönen.

Ebenso erhält man die Kombinationstöne mit der Physharmonika oder zwei auf derselben Windlade stehenden Zungenpfeifen sehr deutlich; auch mit der Geige sind sie sehr gut zu erhalten.

Aufser den bisher besprochenen hat Helmholtz[1]) noch eine zweite Klasse von Kombinationstönen entdeckt, welche er Summationstöne nennt, und deren Tonhöhe dadurch gegeben ist, dafs die Schwingungszahl stets gleich ist der Summe der Schwingungen der sie bildenden Töne. Grundton und Quint liefern so die Terz der folgenden Oktave $2 + 3 = 5$, Grundton und grofse Terz $4 + 5 = 9$ die Sekunde der höhern Oktave, Grundton und Sexte die Quarte der höhern Oktave. Die Bedingung, dafs man die Summationstöne kräftig hört, ist dieselbe, welche die erste Art, die Helmholtz Differenztöne nennt, kräftig hören läfst, beide Töne müssen dieselbe Luftmasse in Bewegung setzen; man hört sie deshalb mit der mehrstimmigen Sirene oder mit Orgelpfeifen am besten, immer aber sind die Summationstöne schwächer als die Differenztöne. Nichtsdestoweniger ist ihre Wahr-

---

[1]) Helmholtz, Poggend. Ann. Bd. XCIX.

rnung nicht schwer, da sie zu den sie bildenden Tönen und den Differenz-
en im allgemeinen in einem unharmonischen Verhältnisse stehen.

Die Kombinationstöne sah man früher als rein subjektive Töne an,
che aus den Schwebungen, wenn sie hinreichende Schnelligkeit haben,
Ohre sich bilden, man glaubte, wenn die Stöfse mit hinreichender
nelligkeit erfolgen, dafs sie dann im Ohre als Ton empfunden werden.
mholtz hat jedoch darauf aufmerksam gemacht, dafs diese Theorie der
nbinationstöne unrichtig sei. Zunächst nämlich existieren die Kombina-
nstöne zum Teil objektiv aufser dem Ohr, denn man kann dieselben bei
Sirene oder den Orgelpfeifen durch für sie abgestimmte Resonatoren
stärken. Wie wir aber früher hervorgehoben haben, wird die Luft eines
sonators nur in Schwingungen versetzt, wenn dem Eigenton des Resona-
s entsprechende einfache Schwingungen in denselben eindringen. Ebenso
in man mit einer Quinckeschen Interferenzröhre den Nachweis liefern,
s die Kombinationstöne von Orgelpfeifen oder einer Physharmonika
ektive Existenz haben[1]). Stimmt man eine solche Röhre auf einen der
den Töne ab, so tritt der Kombinationston auch dann deutlich auf,
wohl der eine der beiden Töne gar nicht zum Ohre dringen kann. In
lern Fällen bildet sich der Kombinationston allerdings erst im Ohr, z. B.
in man zwei Stimmgabeln als Tonquellen benutzt, indes auch in dem
le kann man sie nicht als aus der Empfindung der Schwebungen hervor-
end betrachten, sondern sie bilden sich am Trommelfell, welches den
nbinationstönen entsprechend schwingt[2]). Denn zunächst würde eine
he Entstehungsweise die Summationstöne unmöglich machen, da diesen
keine Schwebungen entsprechen, dann aber auch widerspricht diese
ahme der feststehenden Erfahrung, dafs das Ohr jedes Tongemisch in
e einfachen Töne zerlegt. Würden deshalb aufserhalb des Ohres die
wingungen nur nach der Periode der komponierenden Töne erfolgen, so
de das Ohr niemals aus ihnen einen neuen Ton bilden.

Helmholtz[3]) hat deshalb eine neue Theorie der Kombinationstöne ge-
en, indem er annimmt, dafs bei dem Zusammenwirken der Schallwellen
einfache Interferenzgesetz keine Gültigkeit mehr hat. Das einfache
rferenzgesetz sprachen wir dahin aus (§ 128), dafs bei dem Zusammen-
en mehrerer Schwingungen die resultierende Bewegung einfach gleich
Summe der Teilbewegungen sei. Diesem Gesetze liegt aber die Voraus-
ung zu Grunde, dafs auch für die resultierende Bewegung der Satz seine
tigkeit bewahre, dafs in jedem Momente die Kraft, mit welcher das
vingende Teilchen gegen die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird,
Abstande des Teilchens von der Gleichgewichtslage proportional ist,
also die Gleichung auch hier besteht

$$\varphi = -ky,$$

1) *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXVIII. p. 186.

2) *König* versucht in seiner schon im vorigen Paragraphen erwähnten Arbeit
diese Kombinationstöne den Nachweis zu liefern, dafs sie aus den Stöfsen
tehen, und nennt sie deshalb Stofstöne, er übersieht aber bei seiner ganzen
aktion, dafs diese erst im Ohr sich bildenden Töne durch die Schwingungen
Trommelfells in der sofort abzuleitenden Weise durch die Obertöne der
mgabeltöne entstehen.

3) *Helmholtz*, Poggend. Ann. Bd. XCIX. p. 532.

wenn y den Abstand des Teilchens von der Gleichgewichtslage bedeutet. Dieser Satz gilt aber nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Amplituden. Werden die Amplituden der Schwingungen grofs, so dürfen wir diese Voraussetzung nicht mehr machen, dann hängt der Wert von φ nicht nur von der ersten, sondern auch von höhern Potenzen von y ab. Helmholtz nimmt nun an, dafs bei dem Zusammenwirken zweier Töne die Amplituden der Schwingungen, sei es der Luft, sei es nur des Trommelfells, eine solche Gröfse erhalten, dafs auch die Quadrate der Verschiebungen einen merklichen Einflufs auf die bewegenden Kräfte erhalten, und weist nach, dafs dann neue Systeme einfacher Schwingungen entstehen müssen, deren Schwingungsdauer derjenigen der Kombinationstöne, und zwar sowohl der Differenztöne als der Summationstöne entspricht.

Bezeichnen wir die Masse eines beweglichen Punktes mit m, so wird die Kraft, wenn er sich im Abstande y von der Gleichgewichtslage befindet, die ihn gegen dieselbe zurückzieht, durch

$$-m\varphi = ay + by^2$$

dargestellt; wirken gleichzeitig zwei schwingende Bewegungen auf den Punkt ein, welche durch die Gleichungen gegeben sind

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} = \alpha \cdot \sin(pt)$$

$$y' = \beta \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1} + \tau\right) = \beta \cdot \sin(qt + c),$$

so sind die Kräfte, welche infolge dessen auf den betrachteten Punkt zur Zeit t wirken, nach § 126

$$-mp^2\,\alpha \sin(pt) - mq^2\,\beta \sin(qt + c);$$

wir erhalten demnach für die den Punkt zur Zeit t gegen die Gleichgewichtslage treibende Kraft, wenn wir seinen Abstand von der Gleichgewichtslage zur Zeit t mit y bezeichnen,

$$-m\frac{d^2y}{dt^2} = ay + by^2 + f \cdot \sin(pt) + g \cdot \sin(qt + c),$$

wenn wir wie früher für $\varphi = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ einsetzen und die Koefficienten der beiden letzten Glieder mit f und g bezeichnen.

Die Integralrechnung leitet hieraus folgende Beziehung zwischen y und t ab.

$$y = A \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{a}{m}} + h\right) + u \cdot \sin(pt) + v \cdot \sin(qt + c) + w \cdot \cos(2pt)$$

$$+ i \cdot \cos 2(qt + c) + k \cos[(p - q)\,t - c] + l \cdot \cos[(p + q)\,t + c] \cdots$$

und jedes dieser Glieder gibt für sich eine eigene schwingende Bewegung, deren Amplituden A, u, v, w, i, k, l in bestimmter Weise von den Gröfsen a, b, f, g, p, q abhängig sind. Das erste Glied gibt diejenige Bewegung, welche der Punkt annimmt, wenn er einmal aus der Gleichgewichtslage gebracht sich selbst überlassen wird; seine Schwingungsdauer ist gegeben (§ 126) durch

$$\sqrt{\frac{a}{m}} = \frac{2\pi}{T}; \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{a}{m}},$$

das zweite und dritte Glied die ursprüngliche Bewegung, das vierte und fünfte Bewegungen von doppelter Schnelligkeit, also die Oktaven der ursprünglichen Töne, das sechste den Differenzton und das siebente den Summationston. Denn die Schwingungszahl des vorletzten Gliedes ist, da

$$p - q = 2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) = 2\pi (N - N_1),$$

gleich der Differenz der Schwingungen der ursprünglichen Töne. Ebenso ist die Schwingungszahl des letzten Gliedes gleich $N + N_1$.

Aufser den hingeschriebenen Gliedern liefert die ursprüngliche Gleichung noch weitere, deren Schwingungszahlen höheren harmonischen Tönen und dem zweiten, dritten etc. Kombinationstone entsprechen. Es genüge indes, soweit die Resultate der Helmholtzschen Rechnung angedeutet zu haben, deren Entwicklung die uns hier gestatteten mathematischen Hülfsmittel weit überschreiten würde.

Die Theorie von Helmholtz erklärt auch unmittelbar, weshalb die Kombinationstöne bei der Sirene so stark werden, da dort, wenn die Luft gleichzeitig durch zwei Löcherreihen entweicht, die Schwingungsamplitude wegen des Heransstürzens einer grofsen Luftmasse ins Freie eine sehr grofse werden mufs. Werden die Töne anders, etwa durch Stimmgabeln erzeugt, so bilden sich diese Schwingungen erst am Trommelfell, in welchem sich dann Schwingungen finden, welche der Periode der Kombinationstöne entsprechen.

§ 179.

Ursachen der Konsonanz und Dissonanz. Im § 155 haben wir as aus der Erfahrung abgeleitete Gesetz mitgeteilt, dafs in der Musik die ntervalle, welche durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben sind, konnierend seien, dafs zwei von diesen Tönen gleichzeitig angegeben auf das hr einen wohlthuenden Eindruck machen, während andere Töne, wie 8, 9 ler 15, 16 oder 1 und $\frac{15}{8}$ u. s. f. zusammen angegeben dissonant sind. ber den Grund der Konsonanz gerade jener Intervalle und der Dissonanz er übrigen konnten wir damals keine andere Angabe machen. Erst die heorie von Helmholtz über die musikalischen Klänge in Verbindung mit en in den beiden letzten Paragraphen gemachten Erfahrungen über die Schwebungen und Kombinationstöne macht es möglich zu erkennen, weshalb ene einfachen Intervalle Konsonanzen liefern, während die übrigen Intervalle dissonant sind[1]).

Die Grundlage der Helmholtzschen Theorie der Konsonanz und Dissonanz ist der Satz, dafs eine Klangmasse nur dann auf unser Ohr einen angenehmen Eindruck machen kann, wenn sie gleichmäfsig abfliefst, wenn die Töne neben einander bestehen ohne sich zu stören; dafs dagegen eine Klangmasse einen unangenehmen Eindruck auf das Ohr macht, dafs sie dissonant ist, wenn dieselbe aus einzelnen Stöfsen besteht, wenn es ein durch Schwebungen intermittierender Klang ist. Die Schwebungen können dabei so rasch erfolgen, dafs wir uns der einzelnen nicht deutlich bewufst werden, dafs wir sie nicht zählen können. Helmholtz vergleicht, um diesen Satz zu begründen, sehr treffend die Tonempfindungen mit den Licht-

[1]) *Helmholtz*, Tonempfindungen p. 273 ff. erste Ausgabe 1863.

empfindungen, die ganz ähnliches bieten. Keine Beleuchtung macht auf das Auge einen unangenehmern Eindruck als eine flackernde, bei welcher in rascher Folge der Lichtreiz stärker und schwächer wird. Ein knarrender, intermittierender Ton ist nun für die Gehörnerven ganz dasselbe, was ein flackerndes Licht für die Gesichtsnerven ist; es wird dadurch eine viel intensivere und unangenehmere Reizung des Organes bewirkt wie durch einen gleichmäſsigen dauernden Ton.

Früher glaubte man, daſs man die Schwebungen als solche nur vernehme, wenn sie langsam erfolgen, daſs sie aber bei rascher Folge sich zu dem ersten Differenzton zusammensetzen; die Unrichtigkeit dieser Ansicht haben wir vorhin nachgewiesen; Helmholtz gibt aber auſserdem eine Beobachtungsmethode an, durch die man sich überzeugen kann, daſs man die Schwebungen noch deutlich wahrnimmt, wenn sie die Zahl 30 übersteigen. Man braucht nur mit zwei auf a' abgestimmten Gabeln oder gedeckten Orgelpfeifen durch Verstimmung der einen Schwebungen hervorzubringen, und die Verstimmung ganz allmählich zu verstärken. Anfänglich, wenn in der Sekunde nur 4—6 Schwebungen entstehen, kann man sie einzeln auffassen und zählen, wird die Verstimmung gröſser und gröſser, etwa bis zu einem Halbton, wo die Zahl der Schwebungen etwa 30 beträgt, so gelingt das nicht mehr. Aber wenn man so eine allmähliche Steigerung der Zahl der Stöſse hervorbringt, so erkennt man deutlich, daſs der sinnliche Eindruck derjenige einzelner Stöſse ist, und erkennt weiter auch, daſs eben dieser intermittierende Eindruck es ist, welcher das Unangenehme der Dissonanz bewirkt.

Wenn man die Zahl der Stöſse durch Erweiterung des Intervalls vergröſsert, durch Übergang zu einem ganzen Ton auf 60 oder zu einer kleinen Terz $a_1\, c_2$ auf 88 bringt, so wird der Eindruck des intermittierenden Klanges immer schwächer, und bei der kleinen Terz ist kaum eine Spur desselben mehr wahrzunehmen, sie macht schon den Eindruck eines gleichmäſsig abflieſsenden Tones. Man könnte deshalb glauben, daſs wie bei dem Auge ein sich rasch wiederholendes Aufblitzen eines Lichtes den Eindruck kontinuierlicher Beleuchtung macht, so auch bei dem Ohre ein etwa 90mal in der Sekunde wiederkehrender Tonstoſs den Eindruck eines kontinuierlichen Tones mache. Daſs indes dem nicht so ist, davon kann man sich leicht überzeugen, indem man die Zahl der Stöſse anstatt durch Erweiterung des Intervalls durch Verlegung des engern Intervalls in höhere Gegenden der Skala vergröſsert. Der Halbton $h\, c_1$ gibt 33 Schwebungen, die deutlich als intermittierende Stöſse erkannt werden, gibt man unmittelbar nachher $h_1 c_2$ mit 66, $h_2 c_3$ mit 132 Stöſsen an, so erkennt man, daſs der sinnliche Eindruck wesentlich derselbe ist. Die Wahrnehmbarkeit der Schwebungen hängt also nicht allein von ihrer Anzahl ab, sondern auch davon, daſs die sie erzeugenden Intervalle hinreichend nahe liegen. Den Grund für den letztern Umstand sieht Helmholtz darin, daſs Schwebungen im Ohre nur dann bestehen können, wenn die Töne der Skala nahe genug liegen, um dieselben Nervenanhängsel, dieselben Cortischen Fasern in Mitschwingungen zu versetzen. Wenn sich die beiden angegebenen Töne zu weit von einander entfernen, werden die Schwingungen der von beiden gemeinsam erregten Fasern zu schwach, als daſs man deren Schwebungen noch wahrnehmen könnte.

Die Wahrnehmbarkeit der Stöfse hängt also von der Zahl derselben und der Weite des Intervalls ab; ist das Intervall enge, so nimmt man eine grofse Zahl wahr, ist es weiter, so kommt nur eine weit geringere Zahl zur Empfindung, und bei weiten Intervallen wie Quart oder Quint kommen sie gar nicht mehr zur Wahrnehmung.

Aus diesen Sätzen von Helmholtz ergibt sich zunächst, dafs alle engen Intervalle, grofse und kleine Sekunden innerhalb des in der Musik gebrauchten Tonsystems dissonierend sein müssen, sie erklären, weshalb die Dissonanzen in den mittlern Tonlagen am schärfsten sind, und weshalb in den tiefern Tonlagen, in der grofsen und tiefern Hälfte der kleinen Oktave die kleinen Terzen schon merklich rauh klingen, da sie in diesen zwischen 15 und 30 Schwebungen geben.

Aus der Helmholtzschen Theorie des Klanges ergibt sich dann aber ebenso, weshalb die grofse und kleine Septime und die verstimmten konsonierenden Intervalle der musikalischen Klänge dissonant sind. Wie wir nämlich sahen, sind die Klänge nicht einfache Töne, sondern Accorde, die aus dem Grundton und seinen harmonischen Obertönen aufgebaut sind. Gerade so nun wie die einfachen Töne Schwebungen hervorbringen, so thun es auch die Obertöne der Klänge mit einander und den Grundtönen und aufserdem können auch die Kombinationstöne Schwebungen veranlassen. Wenn deshalb zwei Klänge, welche, wie fast alle in der Musik gebrauchten Klänge, deutliche Obertöne haben, unter diesen solche besitzen, welche hinreichend nahe zusammenliegen, so werden diese Schwebungen liefern und deshalb die beiden Klänge ein dissonantes Intervall bilden.

Man erkennt darnach sofort, dafs die kleine oder grofse Septime eine Dissonanz sein mufs, da der erste Oberton des Grundtones mit den Septimen das Intervall eines Halbtones oder eines ganzen Tones bildet. Die grofse Septime ist $1 : \frac{15}{8}$, der erste Oberton des Grundtones ist 2 oder $\frac{16}{8}$, man sieht, das Verhältnis dieses zur Septime ist $\frac{16}{15}$, ein Halbton. Dasselbe gilt für die grofse und kleine None.

Dem entgegen erkennt man sofort, dafs die Oktave eine vollkommene Konsonanz sein mufs, da die Obertöne der Oktave auch alle Obertöne des Grundtones sind, und deshalb keine andern Schwebungen auftreten können wie in dem Klange des Grundtones selbst, Schwebungen, die erst sehr hohen Obertönen entsprechen, welche deshalb so schwach sind, dafs sie nicht mehr gehört werden.

Die auf die Oktave folgende ebenfalls noch als vollkommen zu bezeichnende Konsonanz ist die Quint, deren Schwingungsverhältnis 2 : 3 ist. Die in diesen beiden Klängen enthaltenen Obertöne sind

Grundton	2,	4,	6,	8,	10,	12
Quinte		3	6		9	12.

Man sieht, der erste Oberton der Quint fällt mit dem zweiten der Oktave zusammen und der dritte Oberton der Quint steht zu dem vierten und fünften Oberton der Oktave im Verhältnis eines ganzen Tones.

Eben weil es die tiefsten Obertöne sind, welche in diesen Intervallen zusammenfallen, in der Oktave der Grundton des zweiten Klanges mit dem ersten Oberton des ersten, in der Quint der erste Oberton des zweiten mit *dem zweiten Obertone* des ersten, in der Duodecime 1 : 3 der Grundton des

